

### Zadatak 361 (Matej, gimnazija)

U trokutu s osnovicom duljine  $a$  i visinom duljine  $v$  upišite pravokutnik najveće moguće površine, s tim da jedna stranica pravokutnika pripada osnovici trokuta.

#### Rješenje 361

Ponovimo!

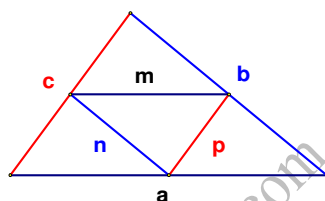
$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, \quad a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}, \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

#### Srednjice trokuta

Dužine koje spajaju polovišta stranica trokuta zovu se srednjice trokuta. Svaki trokut ima tri srednjice. Svaka srednjica trokuta usporedna je sa suprotnom stranicom trokuta, a duljina joj je jednaka polovici duljine te stranice.



$$a = 2 \cdot m, \quad b = 2 \cdot n, \quad c = 2 \cdot p.$$

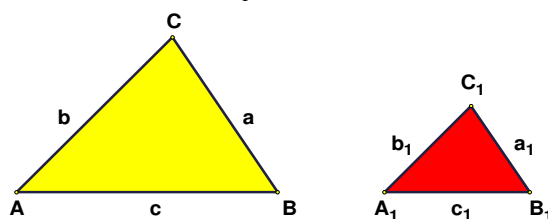
#### Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1.$$

$$\frac{a_1}{a} = k, \quad \frac{b_1}{b} = k, \quad \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta  $k$  zovemo koeficijent sličnosti.



Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera  $a$  i  $d$  jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera  $b$  i  $c$ .

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od  $180^\circ$ .

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima  $90^\circ$ ).

**Površina pravokutnika** je jednaka umnošku njegove duljine  $a$  i širine  $b$ .

$$P = a \cdot b.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su  $a \neq 0$ ,  $b$  i  $c$  realni brojevi. Broj  $a$  naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja,  $b$  linearni koeficijent, a  $c$  slobodni koeficijent polinoma.

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je  $a > 0$ , maksimum ako je  $a < 0$ .

Oznake za derivaciju su:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
$c$	0
$x$	1
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$

Ako je  $c$  konstanta, a  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$  su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))', \quad (f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije  $y = f(x)$

**I.** Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

**II.** Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x) = 0$$

**III.** Riješi se dobivena jednažba

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots, x_i \text{ su rješenja jednažbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

**IV.** Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y'' = f''(x) = (f'(x))'$$

**V.** Svaka stacionarna točka  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$  uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za  $f''(x_i) > 0$  u  $x_i$  je minimum
- za  $f''(x_i) < 0$  u  $x_i$  je maksimum.

Ako je  $f''(x_i) = 0$ , dalje slijedi:

**VI.** Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x) = (f''(x))'$$

**VII.** Svaka stacionarna točka  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$  uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za  $f'''(x_i) \neq 0$  u  $x_i$  funkcija ima točku infleksije

Ako je  $f'''(x_i) = 0$ , dalje slijedi:

**VIII.** Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$$

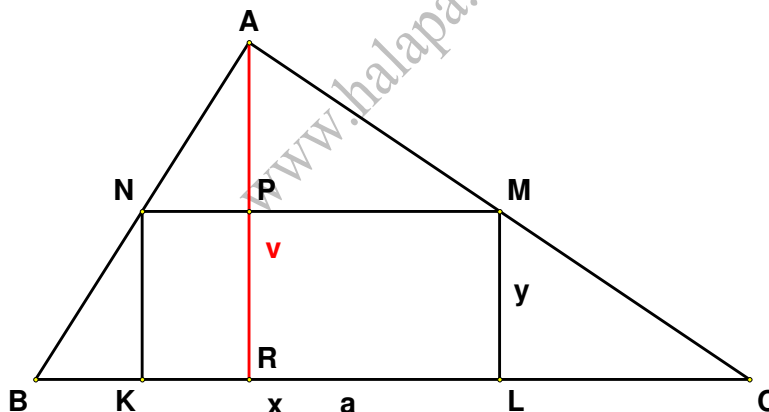
**IX.** Svaka stacionarna točka  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$  uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za  $f^{(4)}(x_i) > 0$  u  $x_i$  je minimum
- za  $f^{(4)}(x_i) < 0$  u  $x_i$  je maksimum.

Ako je  $f^{(4)}(x_i) = 0$ , slijede daljnja istraživanja.

Ako funkcija  $f(x)$  ima derivacije druga derivacija glasi:

$$f''(x) = (f'(x))'$$



Sa slike vidi se:

$$|BC| = a, |AR| = v, |KL| = |NM| = x, |ML| = |NK| = |PR| = y$$

$$|AP| = |AR| - |PR| = v - y$$

$$\angle CBA = \angle MNA, \angle BCA = \angle NMA, \angle BAC = \angle NAM$$

Iz sličnosti trokuta  $\triangle BCA$  i  $\triangle NMA$  slijedi razmjer:

$$|BC| : |AR| = |NM| : |AP| \Rightarrow a : v = x : (v - y) \Rightarrow a \cdot (v - y) = v \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot v - a \cdot y = v \cdot x \Rightarrow v \cdot x = a \cdot v - a \cdot y \Rightarrow a \cdot y = a \cdot v - v \cdot x \Rightarrow a \cdot y = v \cdot (a - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot y = v \cdot (a - x) / \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow y = \frac{v \cdot (a - x)}{a}.$$

Tada je ploština pravokutnika KLMN jednaka

$$P = x \cdot y \Rightarrow P = x \cdot \frac{v \cdot (a-x)}{a} \Rightarrow P = \frac{x \cdot v \cdot (a-x)}{a} \Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x - v \cdot x^2}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x}{a} - \frac{v \cdot x^2}{a} \Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x}{a} - \frac{v \cdot x^2}{a} \Rightarrow P = v \cdot x - \frac{v}{a} \cdot x^2 \Rightarrow P = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x.$$

1. inačica

Uočimo da smo dobili kvadratnu funkciju

$$P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x.$$

Računamo za koju vrijednost x ona ima maksimum.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x \\ a = -\frac{v}{a}, b = v, c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_0 = -\frac{v}{2 \cdot \left(-\frac{v}{a}\right)} \Rightarrow x_0 = \frac{\frac{v}{1}}{2 \cdot \frac{v}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\frac{v}{1}}{2 \cdot \frac{v}{a}} \Rightarrow x_0 = \frac{\frac{1}{1}}{2 \cdot \frac{1}{a}} \Rightarrow x_0 = \frac{a}{2}.$$

Prema tome, ploština pravokutnika je najveća ako je  $x = \frac{a}{2}$ , a to znači da je  $\overline{NM}$  srednjica trokuta ABC.

2. inačica

Potrebno je odrediti vrijednost x za koju P(x) ima maksimalnu vrijednost. Njezina je derivacija:

$$P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x \Rightarrow P'(x) = \left(-\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x\right)' \Rightarrow P'(x) = \left(-\frac{v}{a} \cdot x^2\right)' + (v \cdot x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(x) = -\frac{v}{a} \cdot (x^2)' + v \cdot x' \Rightarrow P'(x) = -\frac{v}{a} \cdot 2 \cdot x + v \cdot 1 \Rightarrow P'(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v.$$

Ako funkcija P(x) ima ekstremnu vrijednost, mora biti:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v = 0 \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x = -v \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x = -v \cdot / \cdot \left(-\frac{a}{2 \cdot v}\right) \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Da bismo utvrdili da za  $x = \frac{a}{2}$  funkcija P(x) ima maksimum treba pokazati da je  $P''(x) < 0$  za  $x = \frac{a}{2}$ .

Druga derivacija funkcije P(x) je:

$$P''(x) = (P'(x))' \Rightarrow P''(x) = \left(-2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v\right)' \Rightarrow P''(x) = \left(-2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x\right)' + v' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x' + 0 \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot 1 \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} < 0,$$

tj. funkcija P(x) ima u  $x = \frac{a}{2}$  maksimum. Prema tome, ploština pravokutnika je najveća ako je  $x = \frac{a}{2}$ ,

a to znači da je  $\overline{NM}$  srednjica trokuta ABC.

### Vježba 361

U trokutu s osnovicom duljine c i visinom duljine v upišite pravokutnik najveće moguće površine, s tim da jedna stranica pravokutnika pripada osnovici trokuta.

**Rezultat:**  $x = \frac{c}{2}$ .

**Zadatak 362 (Borna, srednja škola)**

Jedna kateta pravokutnog trokuta dulja je od druge za 10 cm, a kraća je od hipotenuze za 10 cm. Kolike su stranice ovog trokuta?

**Rješenje 362**

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

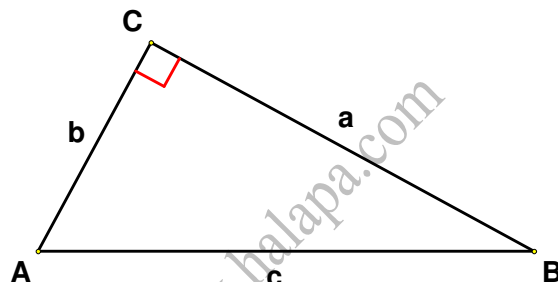
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Pitagorin poučak**

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c, \quad |BC| = a, \quad |CA| = b$$

Neka je  $x$  duljina veće katete.

$$a = |BC| = x.$$

Tada je:

- duljina kraće katete

$$b = |CA| = x - 10$$

- duljina hipotenuze

$$c = |AB| = x + 10.$$

Prema Pitagorinu poučku imamo

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |BC|^2 + |CA|^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (x+10)^2 = x^2 + (x-10)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 20 \cdot x + 100 &= x^2 + x^2 - 20 \cdot x + 100 \Rightarrow x^2 + 20 \cdot x + 100 = x^2 + x^2 - 20 \cdot x + 100 \Rightarrow \\ \Rightarrow 20 \cdot x &= x^2 - 20 \cdot x \Rightarrow x^2 - 20 \cdot x = 20 \cdot x \Rightarrow x^2 - 20 \cdot x - 20 \cdot x = 0 \Rightarrow x^2 - 40 \cdot x = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \cdot (x - 40) &= 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 40 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \text{ nema smisla} \\ x = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 40 \text{ cm} \Rightarrow a = 40 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Dalje će biti:

$$\left. \begin{array}{l} b = |CA| = x - 10 \\ c = |AB| = x + 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 40 - 10 \\ c = 40 + 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 30 \text{ cm} \\ c = 50 \text{ cm} \end{array} \right\}.$$

### Vježba 362

Jedna kateta pravokutnog trokuta dulja je od druge za 1 cm, a kraća je od hipotenuze za 1 cm. Kolike su stranice ovog trokuta?

**Rezultat:** 3 cm, 4 cm, 5 cm.

### Zadatak 363 (Ante, srednja škola)

Ako za šiljaste kutove trokuta ABC vrijedi jednakost  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ , kakav je trokut ABC?

### Rješenje 363

Ponovimo!

$$\sin x = \cos(90^\circ - x), \quad \cos x = \sin(90^\circ - x), \quad \sqrt{a^2} = a, \quad a \geq 0.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Šiljasti kut je kut s mjerom manjom od  $90^\circ$ .

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Za šiljaste kutove  $\alpha$  i  $\beta$  pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 &\Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \beta \quad / \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ šiljasti kutovi} \\ \sin \alpha > 0, \cos \beta > 0 \end{array} \right] \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ. \end{aligned}$$

Trokut ABC je pravokutan.

### Vježba 363

Ako za šiljaste kutove trokuta ABC vrijedi jednakost  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ , kakav je trokut ABC?

**Rezultat:** Pravokutan.

### Zadatak 364 (Tonka, gimnazija)

U pravokutnome je trokutu mjera jednoga kuta  $67^\circ$ . Koliki je omjer duljina hipotenuze i kraće katete toga trokuta?

A. 1.09      B. 1.34      C. 2.36      D. 2.56

### Rješenje 364

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Šiljasti kut je kut s mjerom manjom od  $90^\circ$ .

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

**Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.**

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Za šiljaste kutove  $\alpha$  i  $\beta$  pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

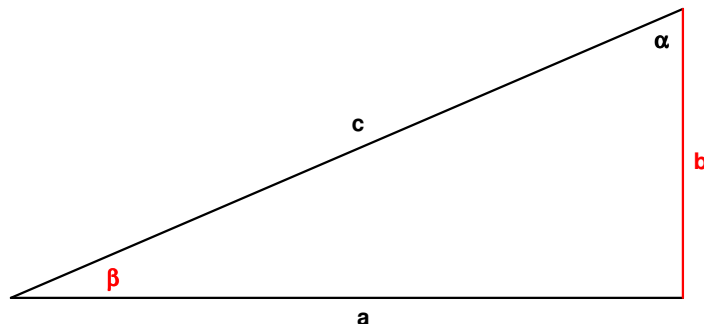
**Sinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

**Kosinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Neka je  $\alpha = 67^\circ$ . Mjera drugog šiljastog kuta  $\beta$  u pravokutnome trokutu iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 67^\circ \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 67^\circ + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - 67^\circ \Rightarrow \beta = 23^\circ.$$

Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut. Slika!



1. inačica

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \sin \beta \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{1} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin 23^\circ} \Rightarrow \frac{c}{b} = 2.56.$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\cos \alpha}{1} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos 67^\circ} \Rightarrow \frac{c}{b} = 2.56.$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 364

U pravokutnome je trokutu mjera jednoga kuta  $60^\circ$ . Koliki je omjer duljina hipotenuze i kraće katete toga trokuta?

- A. 1      B. 2      C. 1.5      D. 0.5

**Rezultat:** B.

### Zadatak 365 (Matej, gimnazija)

Kružnici polumjera  $r = 3.6$  cm upisan je trokut kojem su dvije stranice dugačke 5 cm i 5.8 cm. Koliki su kutovi tog trokuta i kolika je duljina treće stranice?

### Rješenje 365

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Zbroj kutova u trokutu je  $180^\circ$ .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Poučak o sinusu

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot R, \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2 \cdot R, \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2 \cdot R, \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot R,$$

pri čemu su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica trokuta, a  $R$  duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.  
 Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)  
 U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

Neka su, na primjer,  $a = 5$  cm i  $b = 5.8$  cm, a  $r = 3.6$  cm. Mjere kutova  $\alpha$  i  $\beta$  dobijemo pomoću poučka o sinusu.

Kut  $\alpha$

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \alpha} &= 2 \cdot r \Rightarrow 2 \cdot r = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow 2 \cdot r = \frac{a}{\sin \alpha} / \cdot \frac{\sin \alpha}{2 \cdot r} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{2 \cdot r} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left( \frac{a}{2 \cdot r} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} a = 5 \text{ cm} \\ r = 3.6 \text{ cm} \end{array} \right] \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left( \frac{5 \text{ cm}}{2 \cdot 3.6 \text{ cm}} \right) \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array} \right] \Rightarrow \alpha = 43^\circ 58' 59". \end{aligned}$$

Kut  $\beta$

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin \beta} &= 2 \cdot r \Rightarrow 2 \cdot r = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow 2 \cdot r = \frac{b}{\sin \beta} / \cdot \frac{\sin \beta}{2 \cdot r} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{2 \cdot r} \Rightarrow \beta = \sin^{-1} \left( \frac{b}{2 \cdot r} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} b = 5.8 \text{ cm} \\ r = 3.6 \text{ cm} \end{array} \right] \Rightarrow \beta = \sin^{-1} \left( \frac{5.8 \text{ cm}}{2 \cdot 3.6 \text{ cm}} \right) \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array} \right] \Rightarrow \beta = 53^\circ 39' 50". \end{aligned}$$

Mjera kuta  $\gamma$  iznosi:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (43^\circ 58' 59" + 53^\circ 39' 50") \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array} \right] \Rightarrow \gamma = 82^\circ 21' 11". \end{aligned}$$

Duljinu treće stranice  $c$  trokuta možemo izračunati na više načina.

1. inačica

Rabimo kosinusov poučak.

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma / \sqrt{\quad} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} a = 5 \text{ cm} \\ b = 5.8 \text{ cm} \\ \gamma = 82^\circ 21' 11" \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow c = \sqrt{5^2 + 5.8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5.8 \cdot \cos(82^\circ 21' 11")} \Rightarrow c = 7.1 \text{ cm}. \end{aligned}$$

2. inačica

Rabimo sinusov poučak.

$$\begin{aligned} c : a &= \sin \gamma : \sin \alpha \Rightarrow c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \gamma \Rightarrow c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \gamma / \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} a = 5 \text{ cm} \\ \gamma = 82^\circ 21' 11" \\ \alpha = 43^\circ 58' 59" \end{array} \right] \Rightarrow c = \frac{5 \text{ cm} \cdot \sin(82^\circ 21' 11")}{\sin(43^\circ 58' 59")} \Rightarrow c = 7.1 \text{ cm}. \end{aligned}$$

3. inačica



Rabimo sinusov poučak.

$$c : b = \sin \gamma : \sin \beta \Rightarrow c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \Rightarrow c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \cdot \frac{1}{\sin \beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} b = 5.8 \text{ cm} \\ \gamma = 82^\circ 21' 11'' \\ \beta = 53^\circ 39' 50'' \end{array} \right] \Rightarrow c = \frac{5.8 \text{ cm} \cdot \sin(82^\circ 21' 11'')}{\sin(53^\circ 39' 50'')} \Rightarrow c = 7.1 \text{ cm}.$$

### Vježba 365

Kružnici polumjera  $r = 36$  mm upisan je trokut kojem su dvije stranice dugačke 5 cm i 58 mm. Koliki su kutovi tog trokuta i kolika je duljina treće stranice?

**Rezultat:**  $43^\circ 58' 59''$ ,  $53^\circ 39' 50''$ ,  $82^\circ 21' 11''$ , 7.1 cm.

### Zadatak 366 (Lara, gimnazija)

Vertikalni štup duljine 1 m nalazi se u blizini ulične svjetiljke postavljene na visinu 3 m iznad tla. Horizontalna udaljenost štapa od svjetiljke iznosi 1.6 m. Kolika je duljina sjene štapa na horizontalnoj podlozi?

### Rješenje 366

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Tangens** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \text{ i } c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera  $a$  i  $d$  jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera  $b$  i  $c$ .

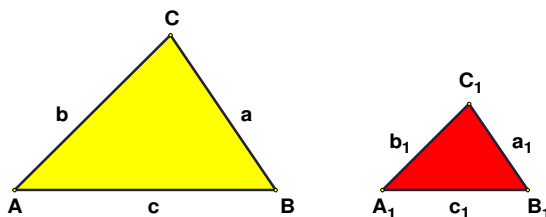
$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

### Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta  $k$  zovemo koeficijent sličnosti.



### Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

### Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

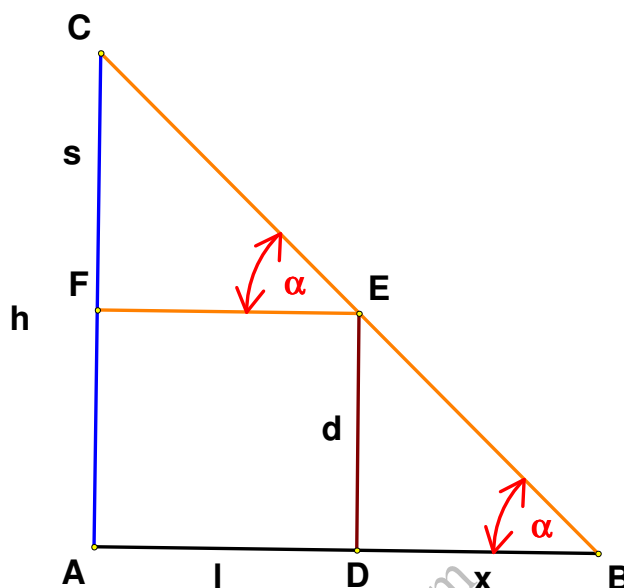
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

### Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

### Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.



Sa slike vidi se:

$$\begin{aligned} |AC| = h = 3 \text{ m}, |AF| = |DE| = d = 1 \text{ m}, |FC| = |AC| - |AF| = s = 2 \text{ m} \\ |AD| = |FE| = l = 1.6 \text{ m}, |DB| = x, |AB| = |AD| + |DB| = l + x = 1.6 + x \\ \angle ABC = \angle FEC = \alpha \end{aligned}$$

1. inačica

Iz sličnosti trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle DBE$  dobije se razmjer:

$$\begin{aligned} |AC| : |AB| = |DE| : |DB| \Rightarrow 3 : (1.6 + x) = 1 : x \Rightarrow 3 \cdot x = 1.6 + x \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \cdot x - x = 1.6 \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \text{ /: } 2 \Rightarrow x = 0.8 \text{ m} = 80 \text{ cm}. \end{aligned}$$

2. inačica

Iz sličnosti trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle FEC$  dobije se razmjer:

$$\begin{aligned} |AC| : |AB| = |FC| : |FE| \Rightarrow 3 : (1.6 + x) = 2 : 1.6 \Rightarrow 4.8 = 2 \cdot (1.6 + x) \Rightarrow \\ \Rightarrow 4.8 = 2 \cdot (1.6 + x) \text{ /: } 2 \Rightarrow 2.4 = 1.6 + x \Rightarrow 1.6 + x = 2.4 \Rightarrow x = 2.4 - 1.6 \Rightarrow x = 0.8 \text{ m} = 80 \text{ cm}. \end{aligned}$$

3. inačica

Iz sličnosti trokuta  $\triangle DBE$  i  $\triangle FEC$  dobije se razmjer:

$$|FC| : |FE| = |DE| : |DB| \Rightarrow 2 : 1.6 = 1 : x \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \text{ /: } 2 \Rightarrow x = 0.8 \text{ m} = 80 \text{ cm}.$$

4. inačica

Uočimo pravokutne trokute  $\triangle ABC$  i  $\triangle DBE$  i pomoću funkcije tangens odredimo kut  $\alpha$  u oba trokuta.

- $\triangle ABC$

$$\text{tg } \alpha = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{h}{1.6 + x} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{3}{1.6 + x}$$

- $\triangle DBE$

$$\text{tg } \alpha = \frac{|DF|}{|DB|} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{d}{x} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{1}{x}.$$

Dalje slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{1.6+x} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{1.6+x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 3 \cdot x = 1.6+x \Rightarrow 3 \cdot x - x = 1.6 \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \quad /: 2 \Rightarrow x = 0.8 \text{ m} = 80 \text{ cm}.$$

5. inačica

Uočimo pravokutne trokute  $\triangle ABC$  i  $\triangle FEC$  i pomoću funkcije tangens odredimo kut  $\alpha$  u oba trokuta.

- $\triangle ABC$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{1.6+x} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{1.6+x}$$

- $\triangle FEC$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|FC|}{|FE|} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{s}{l} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1.6}.$$

Dalje slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{1.6+x} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1.6} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{1.6+x} = \frac{2}{1.6} \Rightarrow 4.8 = 2 \cdot (1.6+x) \Rightarrow 4.8 = 2 \cdot (1.6+x) \quad /: 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2.4 = 1.6+x \Rightarrow 1.6+x = 2.4 \Rightarrow x = 2.4 - 1.6 \Rightarrow x = 0.8 \text{ m} = 80 \text{ cm}.$$

6. inačica

Uočimo pravokutne trokute  $\triangle DBE$  i  $\triangle FEC$  i pomoću funkcije tangens odredimo kut  $\alpha$  u oba trokuta.

- $\triangle DBE$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|DF|}{|DB|} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{x} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x}.$$

- $\triangle FEC$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|FC|}{|FE|} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{s}{l} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1.6}.$$

Dalje slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1.6} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{1.6} \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \quad /: 2 \Rightarrow x = 0.8 \text{ m} = 80 \text{ cm}.$$
$$\Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \quad /: 2 \Rightarrow x = 0.8 \text{ m} = 80 \text{ cm}.$$



### Vježba 366

Vertikalni štap duljine 1 m nalazi se u blizini ulične svjetiljke postavljene na visinu 3 m iznad tla. Horizontalna udaljenost štapa od svjetiljke iznosi 16 dm. Kolika je duljina sjene štapa na horizontalnoj podlozi?

**Rezultat:** 80 cm.

### Zadatak 367 (4B, TUPŠ)

Odredimo polumjer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice  $a = 11$  cm i  $b = 18$  cm zatvaraju kut od  $68^\circ 30'$ .

- A. 9.31 cm      B. 8.66 cm      C. 10.5 cm      D. 9.9 cm

### Rješenje 367

Ponovimo!

Poučak o sinusu

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot R, \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2 \cdot R, \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2 \cdot R, \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot R,$$

pri čemu su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica trokuta, a  $R$  duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.

Poučak o kosinusu (kosinusoov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

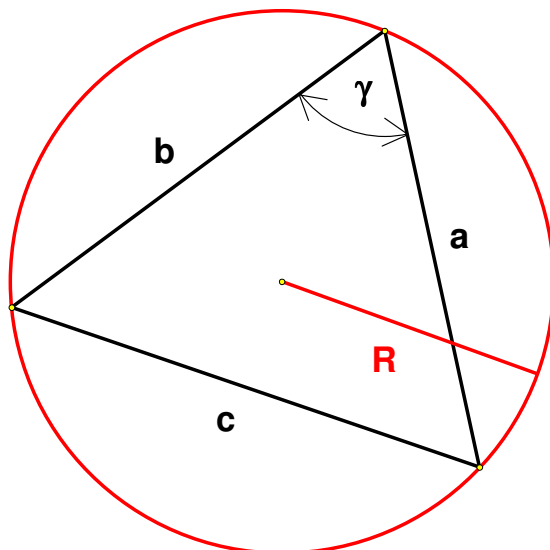
Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma, \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta, \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Ploština trokuta

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R},$$

gdje su  $a$ ,  $b$ ,  $c$  duljine stranica trokuta,  $R$  polumjer trokutu opisane kružnice.



1. inačica

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \\ \frac{c}{\sin \gamma} &= 2 \cdot R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma / \sqrt{\phantom{x}} \\ 2 \cdot R &= \frac{c}{\sin \gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left. \begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma} \\ 2 \cdot R &= \frac{c}{\sin \gamma} / \cdot \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma} \\ R &= \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}}{2 \cdot \sin \gamma} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} a = 11 \text{ cm} \\ b = 18 \text{ cm} \\ \gamma = 68^\circ 30' \end{array} \right] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow R = \frac{\sqrt{(11 \text{ cm})^2 + (18 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 11 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} \cdot \cos 68^\circ 30'}}{2 \cdot \sin 68^\circ 30'} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \boxed{\text{rezultat}} \Rightarrow R = 9.31 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

2. inačica

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \\ P &= \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma / \sqrt{\phantom{x}} \\ P &= \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} / \cdot \frac{R}{P} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left. \begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma} \\ R &= \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot P} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}}{4 \cdot P} \Rightarrow \left[ P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \right] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma} \Rightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}}{2 \cdot \sin \gamma} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} a = 11 \text{ cm} \\ b = 18 \text{ cm} \\ \gamma = 68^\circ 30' \end{array} \right] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow R = \frac{\sqrt{(11 \text{ cm})^2 + (18 \text{ cm})^2 - 2 \cdot 11 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} \cdot \cos 68^\circ 30'}}{2 \cdot \sin 68^\circ 30'} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \boxed{\text{rezultat}} \Rightarrow R = 9.31 \text{ cm.}
 \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 367

Odredimo polumjer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice  $a = 11$  cm i  $b = 18$  cm zatvaraju kut od  $60^\circ$ .

- A. 9.07 cm      B. 9.12 cm      C. 9.5 cm      D. 9.02 cm

**Rezultat:** A.

[www.halapa.com](http://www.halapa.com)