Zadatak 361 (Matej, gimnazija)

U trokutu s osnovicom duljine a i visinom duljine v upišite pravokutnik najveće moguće površine, s tim da jedna stranica pravokutnika pripada osnovici trokuta.

Rješenje 361

Ponovimo!

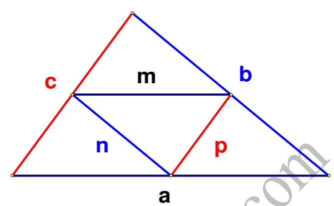
$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Srednjice trokuta

Dužine koje spajaju polovišta stranica trokuta zovu se srednjice trokuta. Svaki trokut ima tri srednjice. Svaka srednjica trokuta usporedna je sa suprotnom stranicom trokuta, a duljina joj je jednaka polovici duljine te stranice.



$$a \quad m \ , \ a=2\cdot m \quad , \quad b \quad n \ , \ b=2\cdot n \quad , \quad c \quad p \ , \ c=2\cdot p.$$

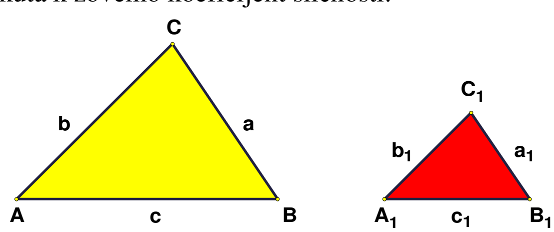
Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1 \ , \ \beta=\beta_1 \ , \ \gamma=\gamma_1.$$

$$\frac{a_1}{a}=k \quad , \quad \frac{b_1}{b}=k \quad , \quad \frac{c_1}{c}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Površina pravokutnika je jednaka umnošku njegove duljine a i širine b.

$$P=a \cdot b.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a \cdot x^2+b \cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a \cdot x^2+b \cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0=-\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.
Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(c \cdot f(x)\right)'=c \cdot \left(f(x)\right)'\quad ,\quad \left(f(x) \pm g(x)\right)'=\left(f(x)\right)' \pm \left(g(x)\right)'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)
I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y'=f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x)=0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke
IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y''=f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y'''=f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i)\neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'$$

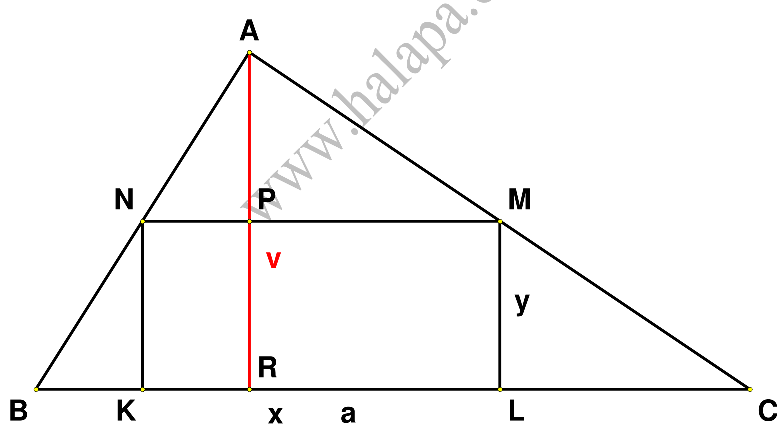
IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i)=0$, slijede daljnja istraživanja.

Ako funkcija f(x) ima derivacije druga derivacija glasi:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'.$$



Sa slike vidi se:

$$|BC|=a\ ,\ |AR|=v\ ,\ |KL|=|NM|=x\ ,\ |ML|=|NK|=|PR|=y$$

$$|AP|=|AR|-|PR|=v-y$$

$$\angle CBA=\angle MNA\ ,\ \angle BCA=\angle NMA\ ,\ \angle BAC=\angle NAM$$

Iz sličnosti trokuta ΔBCA i ΔNMA slijedi razmjer:

$$|BC|:|AR|=|NM|:|AP|\ \Rightarrow\ a:v=x:(v-y)\ \Rightarrow\ a\cdot(v-y)=v\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot v-a\cdot y=v\cdot x\ \Rightarrow\ v\cdot x=a\cdot v-a\cdot y\ \Rightarrow\ a\cdot y=a\cdot v-v\cdot x\ \Rightarrow\ a\cdot y=v\cdot(a-x)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot y=v\cdot(a-x)\ /\cdot\frac{1}{a}\ \Rightarrow\ y=\frac{v\cdot(a-x)}{a}.$$

Tada je ploština pravokutnika KLMN jednaka

$$P = x \cdot y \Rightarrow P = x \cdot \frac{v \cdot (a - x)}{a} \Rightarrow P = \frac{x \cdot v \cdot (a - x)}{a} \Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x - v \cdot x^2}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x}{a} - \frac{v \cdot x^2}{a} \Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x}{a} - \frac{v \cdot x^2}{a} \Rightarrow P = v \cdot x - \frac{v}{a} \cdot x^2 \Rightarrow P = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x.$$

1.inačica

Uočimo da smo dobili kvadratnu funkciju

$$P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x.$$

Računamo za koju vrijednost x ona ima maksimum.

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x \\ a = -\frac{v}{a} \;,\; b = v \;,\; c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_\circ = -\frac{b}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_\circ = -\frac{v}{2 \cdot \left(-\frac{v}{a}\right)} \Rightarrow x_\circ = \frac{\frac{v}{1}}{2 \cdot \frac{v}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_\circ = \frac{\frac{v}{1}}{2 \cdot \frac{v}{a}} \Rightarrow x_\circ = \frac{\frac{1}{1}}{2 \cdot \frac{1}{a}} \Rightarrow x_\circ = \frac{a}{2}.$$

Prema tome, ploština pravokutnika je najveća ako je $x = \frac{a}{2}$, a to znači da je $\overline{NM}$ srednjica trokuta ABC.

2.inačica

Potrebno je odrediti vrijednost x za koju P(x) ima maksimalnu vrijednost. Njezina je derivacija:

$$P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x \Rightarrow P'(x) = \left(-\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x\right)' \Rightarrow P'(x) = \left(-\frac{v}{a} \cdot x^2\right)' + (v \cdot x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(x) = -\frac{v}{a} \cdot \left(x^2\right)' + v \cdot x' \Rightarrow P'(x) = -\frac{v}{a} \cdot 2 \cdot x + v \cdot 1 \Rightarrow P'(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v.$$

Ako funkcija P(x) ima ekstremnu vrijednost, mora biti:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v = 0 \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x = -v \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x = -v \;/ \cdot \left(-\frac{a}{2 \cdot v}\right) \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Da bismo utvrdili da za $x = \frac{a}{2}$ funkcija P(x) ima maksimum treba pokazati da je $P''(x) < 0$ za $x = \frac{a}{2}$.

Druga derivacija funkcije P(x) je:

$$P''(x) = \left(P'(x)\right)' \Rightarrow P''(x) = \left(-2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v\right)' \Rightarrow P''(x) = \left(-2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x\right)' + v' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x' + 0 \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot 1 \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} < 0,$$

tj. funkcija P(x) ima u $x = \frac{a}{2}$ maksimum. Prema tome, ploština pravokutnika je najveća ako je $x = \frac{a}{2}$, a to znači da je $\overline{NM}$ srednjica trokuta ABC.

Vježba 361

U trokutu s osnovicom duljine c i visinom duljine v upišite pravokutnik najveće moguće površine, s tim da jedna stranica pravokutnika pripada osnovici trokuta.

Rezultat: $x = \frac{c}{2}.$

Zadatak 362 (Borna, srednja škola)

Jedna kateta pravokutnog trokuta dulja je od druge za 10 cm, a kraća je od hipotenuze za 10 cm. Kolike su stranice ovog trokuta?

Rješenje 362

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

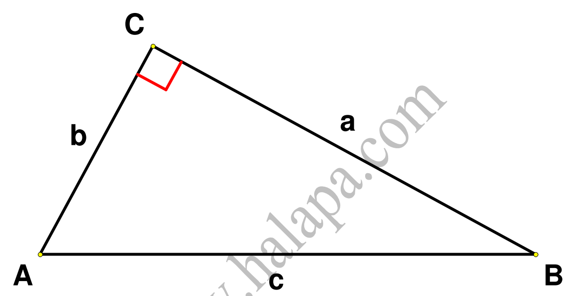
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \quad , \quad |BC| = a \quad , \quad |CA| = b$$

Neka je x duljina veće katete.

$$a = |BC| = x.$$

Tada je:

- duljina kraće katete

$$b = |CA| = x - 10$$

- duljina hipotenuze

$$c = |AB| = x + 10.$$

Prema Pitagorinu poučku imamo

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (x+10)^2 = x^2 + (x-10)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 20 \cdot x + 100 = x^2 + x^2 - 20 \cdot x + 100 \Rightarrow x^2 + 20 \cdot x + 100 = x^2 + x^2 - 20 \cdot x + 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \cdot x = x^2 - 20 \cdot x \Rightarrow x^2 - 20 \cdot x = 20 \cdot x \Rightarrow x^2 - 20 \cdot x - 20 \cdot x = 0 \Rightarrow x^2 - 40 \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (x - 40) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 40 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ nema smisla} \\ x = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 40 \; cm \Rightarrow a = 40 \; cm.$$

Dalje će biti:

$$\left.\begin{array}{l} b=|CA|=x-10 \\ c=|AB|=x+10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=40-10 \\ c=40+10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=30\ cm \\ c=50\ cm \end{array}\right\}.$$

Vježba 362

Jedna kateta pravokutnog trokuta dulja je od druge za 1 cm, a kraća je od hipotenuze za 1 cm. Kolike su stranice ovog trokuta?

Rezultat: 3 cm, 4 cm, 5 cm.

Zadatak 363 (Ante, srednja škola)

Ako za šiljaste kutove trokuta ABC vrijedi jednakost $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, kakav je trokut ABC?

Rješenje 363

Ponovimo!

$$\sin x = \cos\left(90^\circ - x\right) \quad , \quad \cos x = \sin\left(90^\circ - x\right) \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Šiljasti kut je kut s mjerom manjom od 90º.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \beta \ / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ šiljasti kutovi} \\ \sin \alpha > 0 \ , \ \cos \beta > 0 \end{array}\right] \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin\left(90^\circ - \beta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Trokut ABC je pravokutan.

Vježba 363

Ako za šiljaste kutove trokuta ABC vrijedi jednakost $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, kakav je trokut ABC?

Rezultat: Pravokutan.

Zadatak 364 (Tonka, gimnazija)

U pravokutnome je trokutu mjera jednoga kuta 67º. Koliki je omjer duljina hipotenuze i kraće katete toga trokuta?

A. 1.09 *B.* 1.34 *C.* 2.36 *D.* 2.56

Rješenje 364

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Šiljasti kut je kut s mjerom manjom od 90º.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

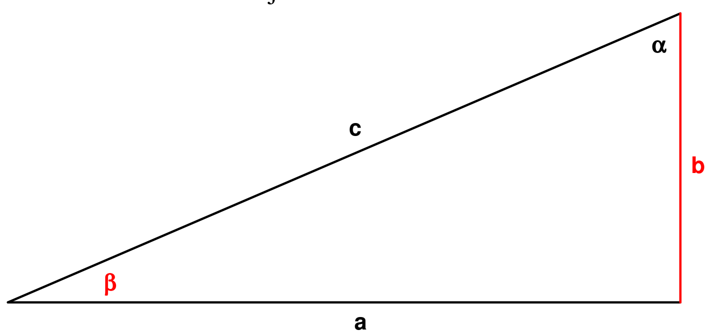
Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha+\beta=90^\circ.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Neka je α = 67º. Mjera drugog šiljastog kuta β u pravokutnome trokutu iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=67^\circ\\ \alpha+\beta=90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow 67^\circ+\beta=90^\circ \Rightarrow \beta=90^\circ-67^\circ \Rightarrow \beta=23^\circ.$$

Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut. Slika!



1.inačica

$$\sin\beta=\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c}=\sin\beta \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{1} \Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{1}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{1}{\sin 23^\circ} \Rightarrow \frac{c}{b}=2.56.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\cos\alpha=\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c}=\cos\alpha \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\cos\alpha}{1} \Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{1}{\cos 67^\circ} \Rightarrow \frac{c}{b}=2.56.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 364

U pravokutnome je trokutu mjera jednoga kuta 60º. Koliki je omjer duljina hipotenuze i kraće katete toga trokuta?

$A.\ 1 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 1.5 \qquad D.\ 0.5$

Rezultat: B.

Zadatak 365 (Matej, gimnazija)

Kružnici polumjera r = 3.6 cm upisan je trokut kojem su dvije stranice dugačke 5 cm i 5.8 cm. Koliki su kutovi tog trokuta i kolika je duljina treće stranice?

Rješenje 365

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R \quad , \quad \frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R \quad , \quad \frac{b}{\sin\beta}=2\cdot R \quad , \quad \frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Neka su, na primjer, a = 5 cm i b = 5.8 cm, a r = 3.6 cm. Mjere kutova α i β dobijemo pomoću poučka o sinusu.

Kut α

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2 \cdot r \Rightarrow 2 \cdot r = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow 2 \cdot r = \frac{a}{\sin\alpha} \ / \cdot \frac{\sin\alpha}{2 \cdot r} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{2 \cdot r} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{2 \cdot r}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a = 5 \ cm \\ r = 3.6 \ cm \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5 \ cm}{2 \cdot 3.6 \ cm}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 43^\circ 58'59''.$$

Kut β

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2 \cdot r \Rightarrow 2 \cdot r = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow 2 \cdot r = \frac{b}{\sin\beta} \ / \cdot \frac{\sin\beta}{2 \cdot r} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{2 \cdot r} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{b}{2 \cdot r}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b = 5.8 \ cm \\ r = 3.6 \ cm \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{5.8 \ cm}{2 \cdot 3.6 \ cm}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 53^\circ 39'50''.$$

Mjera kuta γ iznosi:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \left(43^\circ 58'59'' + 53^\circ 39'50''\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = 82^\circ 21'11''.$$

Duljinu treće stranice c trokuta možemo izračunati na više načina.

1.inačica

Rabimo kosinusov poučak.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \ / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 5 \ cm \\ b = 5.8 \ cm \\ \gamma = 82^\circ 21'11'' \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{5^2 + 5.8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5.8 \cdot \cos\left(82^\circ 21'11''\right)} \Rightarrow c = 7.1 \ cm.$$

2.inačica

Rabimo sinusov poučak.

$$c : a = \sin\gamma : \sin\alpha \Rightarrow c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma \Rightarrow c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma \ / \cdot \frac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 5 \ cm \\ \gamma = 82^\circ 21'11'' \\ \alpha = 43^\circ 58'59'' \end{bmatrix} \Rightarrow c = \frac{5 \ cm \cdot \sin\left(82^\circ 21'11''\right)}{\sin\left(43^\circ 58'59''\right)} \Rightarrow c = 7.1 \ cm.$$

3.inačica

Rabimo sinusov poučak.

$$c : b = \sin\gamma : \sin\beta \;\Rightarrow\; c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma \;\Rightarrow\; c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma \;/\cdot\frac{1}{\sin\beta} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; c = \frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} b = 5.8\ cm \\ \gamma = 82^{\circ}\,21'11'' \\ \beta = 53^{\circ}\,39'50'' \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; c = \frac{5.8\ cm\cdot\sin\left(82^{\circ}\,21'11''\right)}{\sin\left(53^{\circ}\,39'50''\right)} \;\Rightarrow\; c = 7.1\ cm.$$

Vježba 365

Kružnici polumjera r = 36 mm upisan je trokut kojem su dvije stranice dugačke 5 cm i 58 mm. Koliki su kutovi tog trokuta i kolika je duljina treće stranice?

Rezultat: 43^0 58' 59'', 53^0 39' 50'', 82^0 21' 11'', 7.1 cm.

Zadatak 366 (Lara, gimnazija)

Vertikalni štap duljine 1 m nalazi se u blizini ulične svjetiljke postavljene na visinu 3 m iznad tla. Horizontalna udaljenost štapa od svjetiljke iznosi 1.6 m. Kolika je duljina sjene štapa na horizontalnoj podlozi?

Rješenje 366

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; a\cdot d = b\cdot c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

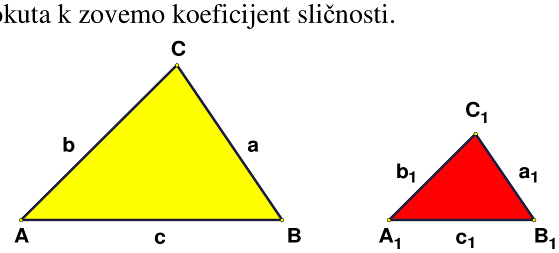
Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a\cdot d = b\cdot c.$$

Sličnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

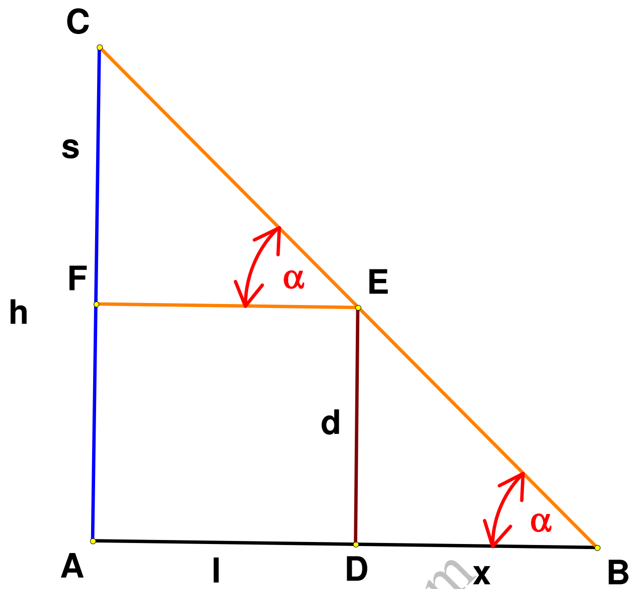
$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.



Sa slike vidi se:

$$|AC| = h = 3\ m\ ,\ |AF| = |DE| = d = 1\ m\ ,\ |FC| = |AC| - |AF| = s = 2\ m$$
$$|AD| = |FE| = l = 1.6\ m\ ,\ |DB| = x\ ,\ |AB| = |AD| + |DB| = l + x = 1.6 + x$$
$$\angle ABC = \angle FEC = \alpha$$

1.inačica
Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔDBE dobije se razmjer:

$$|AC| : |AB| = |DE| : |DB| \Rightarrow 3 : (1.6 + x) = 1 : x \Rightarrow 3 \cdot x = 1.6 + x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot x - x = 1.6 \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6\ /: 2 \Rightarrow x = 0.8\ m = 80\ cm.$$

2.inačica
Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔFEC dobije se razmjer:

$$|AC| : |AB| = |FC| : |FE| \Rightarrow 3 : (1.6 + x) = 2 : 1.6 \Rightarrow 4.8 = 2 \cdot (1.6 + x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4.8 = 2 \cdot (1.6 + x)\ /: 2 \Rightarrow 2.4 = 1.6 + x \Rightarrow 1.6 + x = 2.4 \Rightarrow x = 2.4 - 1.6 \Rightarrow x = 0.8\ m = 80\ cm.$$

3.inačica
Iz sličnosti trokuta ΔDBE i ΔFEC dobije se razmjer:

$$|FC| : |FE| = |DE| : |DB| \Rightarrow 2 : 1.6 = 1 : x \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6 \Rightarrow 2 \cdot x = 1.6\ /: 2 \Rightarrow x = 0.8\ m = 80\ cm.$$

4.inačica
Uočimo pravokutne trokute ΔABC i ΔDBE i pomoću funkcije tangens odredimo kut α u oba trokuta.

- ΔABC

$$tg\,\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{h}{1.6 + x} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{3}{1.6 + x}$$

- ΔDBE

$$tg\,\alpha = \frac{|DF|}{|DB|} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{d}{x} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{x}.$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha=\dfrac{3}{1.6+x} \\ tg\,\alpha=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{1.6+x}=\frac{1}{x} \Rightarrow 3\cdot x=1.6+x \Rightarrow 3\cdot x-x=1.6 \Rightarrow 2\cdot x=1.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=1.6\ /:2 \Rightarrow x=0.8\ m=80\ cm.$$

5.inačica

Uočimo pravokutne trokute ΔABC i ΔFEC i pomoću funkcije tangens odredimo kut α u oba trokuta.

- ΔABC

$$tg\,\alpha=\frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{h}{1.6+x} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{3}{1.6+x}$$

- ΔFEC

$$tg\,\alpha=\frac{|FC|}{|FE|} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{s}{l} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{2}{1.6}.$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha=\dfrac{3}{1.6+x} \\ tg\,\alpha=\dfrac{2}{1.6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{1.6+x}=\frac{2}{1.6} \Rightarrow 4.8=2\cdot(1.6+x) \Rightarrow 4.8=2\cdot(1.6+x)\ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4=1.6+x \Rightarrow 1.6+x=2.4 \Rightarrow x=2.4-1.6 \Rightarrow x=0.8\ m=80\ cm.$$

6.inačica

Uočimo pravokutne trokute ΔDBE i ΔFEC i pomoću funkcije tangens odredimo kut α u oba trokuta.

- ΔDBE

$$tg\,\alpha=\frac{|DF|}{|DB|} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{d}{x} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{1}{x}.$$

- ΔFEC

$$tg\,\alpha=\frac{|FC|}{|FE|} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{s}{l} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{2}{1.6}.$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha=\dfrac{1}{x} \\ tg\,\alpha=\dfrac{2}{1.6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{2}{1.6} \Rightarrow 2\cdot x=1.6 \Rightarrow 2\cdot x=1.6\ /:2 \Rightarrow x=0.8\ m=80\ cm.$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=1.6\ /:2 \Rightarrow x=0.8\ m=80\ cm.$$

Vježba 366

Vertikalni štap duljine 1 m nalazi se u blizini ulične svjetiljke postavljene na visinu 3 m iznad tla. Horizontalna udaljenost štapa od svjetiljke iznosi 16 dm. Kolika je duljina sjene štapa na horizontalnoj podlozi?

Rezultat: 80 cm.

Zadatak 367 (4B, TUPŠ)

Odredimo polumjer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice a = 11 cm i b = 18 cm zatvaraju kut od 68º 30'.

$A.\ 9.31\ cm \qquad B.\ 8.66\ cm \qquad C.\ 10.5\ cm \qquad D.\ 9.9\ cm$

Rješenje 367

Ponovimo!

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R \quad , \quad \frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R \quad , \quad \frac{b}{\sin\beta}=2\cdot R \quad , \quad \frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

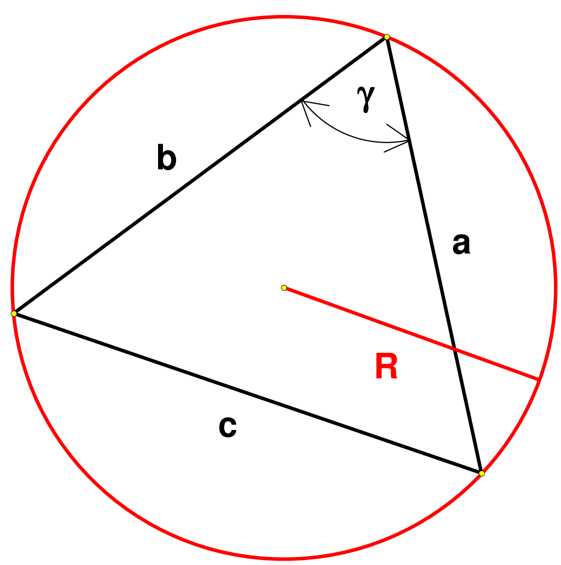
Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha.$$

Ploština trokuta

$$P=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R},$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, R polumjer trokutu opisane kružnice.



1.inačica

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \\ \frac{c}{\sin\gamma} &= 2\cdot R \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \;/\sqrt{\;} \\ 2\cdot R &= \frac{c}{\sin\gamma} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} \\ 2\cdot R &= \frac{c}{\sin\gamma} \;/\cdot\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} \\ R &= \frac{c}{2\cdot\sin\gamma} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{2\cdot\sin\gamma} \Rightarrow \left[\begin{matrix} a = 11\ cm \\ b = 18\ cm \\ \gamma = 68^\circ 30' \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{(11\ cm)^2+(18\ cm)^2-2\cdot 11\ cm\cdot 18\ cm\cdot\cos 68^\circ 30'}}{2\cdot\sin 68^\circ 30'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow R = 9.31\ cm.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \\ P &= \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \;/\sqrt{\;} \\ P &= \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} \;/\cdot\frac{R}{P} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} \\ R &= \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot P} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\cdot b\cdot\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{4\cdot P} \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\cdot b\cdot\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma} \Rightarrow R = \frac{\cancel{a\cdot b}\cdot\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{\cancel{4\cdot\frac{1}{2}}\cdot\cancel{a\cdot b}\cdot\sin\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}{2\cdot\sin\gamma} \Rightarrow \left[\begin{matrix} a = 11\ cm \\ b = 18\ cm \\ \gamma = 68^\circ 30' \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{(11\ cm)^2+(18\ cm)^2-2\cdot 11\ cm\cdot 18\ cm\cdot\cos 68^\circ 30'}}{2\cdot\sin 68^\circ 30'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow R = 9.31\ cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 367

Odredimo polumjer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice a = 11 cm i b = 18 cm zatvaraju kut od 60º.

$$A.\ 9.07\ cm \qquad B.\ 9.12\ cm \qquad C.\ 9.5\ cm \qquad D.\ 9.02\ cm$$

Rezultat: A.

Zadatak 368 (Ante, srednja škola)

U pravokutnom trokutu simetrala kuta α dijeli suprotnu katetu na dva segmenta. Omjer duljine većeg od njih prema duljini manjeg jest:

$$A.\ ctg\frac{\alpha}{2}:1 \qquad B.\ 1:\cos\alpha \qquad C.\ 2\cdot ctg\frac{\alpha}{2}:1 \qquad D.\ 1:\cos\frac{\alpha}{2} \qquad E.\ 1:\sin\frac{\alpha}{2}$$

Rješenje 368

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a^{1}=a\quad,\quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m}\quad,\quad tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta\quad,\quad tg\,\alpha=\frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^{2}\frac{\alpha}{2}}\quad,\quad 1+tg^{2}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\cos^{2}\frac{\alpha}{2}}.$$

$$1-tg^{2}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^{2}\frac{\alpha}{2}-\sin^{2}\frac{\alpha}{2}}{\cos^{2}\frac{\alpha}{2}}\quad,\quad \cos\alpha=\cos^{2}\frac{\alpha}{2}-\sin^{2}\frac{\alpha}{2}\quad,\quad \frac{a}{b}=a:b.$$

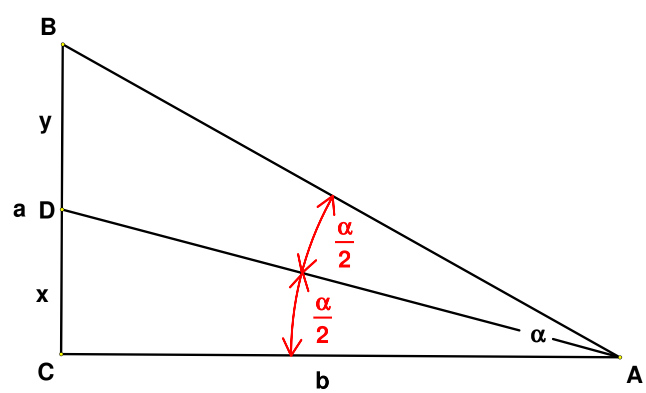
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut i prolazi njegovim vrhom. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od njegovih krakova.

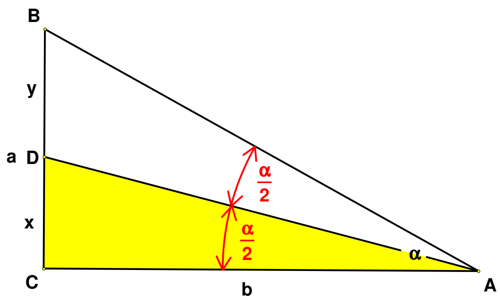


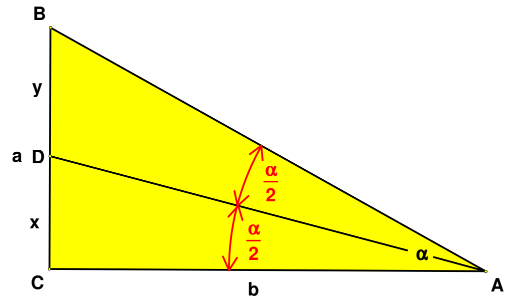
Sa slike vidi se:

$$\left|BC\right| = a \;\;,\;\; \left|DC\right| = x \;\;,\;\; \left|BD\right| = y \;\;,\;\; \angle CAD = \angle DAB = \frac{\alpha}{2} \;\;,\;\; \angle CAB = \alpha$$

Simetrala kuta α dijeli stranicu a na x i y.

$$x + y = a.$$





Uočimo pravokutne trokute ΔDCA i ΔBCA i pomoću funkcije tangens dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{b} \\ tg\,\alpha = \frac{x+y}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x}{b} = tg\,\frac{\alpha}{2} \\ \frac{x+y}{b} = tg\,\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x}{b} = tg\,\frac{\alpha}{2} \;/\cdot b \\ \frac{x+y}{b} = tg\,\alpha \;/\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2} \\ x+y = b\cdot tg\,\alpha \end{array}\right\}.$$

1.inačica

Preoblikujemo drugu jednakost.

$$x + y = b\cdot tg\,\alpha \;\Rightarrow\; x + y = b\cdot tg\,\alpha \;/\cdot \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; 1 + \frac{y}{x} = \frac{b\cdot tg\,\alpha}{x} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{b\cdot tg\,\alpha}{x} - 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{b\cdot tg\,\alpha}{x} - \frac{1}{1} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{b\cdot tg\,\alpha - x}{x} \;\Rightarrow\; \left[\, x = b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2} \,\right] \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{b\cdot tg\,\alpha - b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}}{b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{b\cdot\left(tg\,\alpha - tg\,\frac{\alpha}{2}\right)}{b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{b\cdot\left(tg\,\alpha - tg\,\frac{\alpha}{2}\right)}{b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\frac{\alpha}{2}}{tg\,\frac{\alpha}{2}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow y:x=1:\cos\alpha.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Preoblikujemo drugu jednakost.

$$x+y=b\cdot tg\,\alpha \Rightarrow y=b\cdot tg\,\alpha-x \Rightarrow \left[x=b\cdot tg\frac{\alpha}{2}\right] \Rightarrow y=b\cdot tg\,\alpha-b\cdot tg\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=b\cdot\left(tg\,\alpha-tg\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow y=b\cdot\left(\frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}-tg\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow y=b\cdot\left(\frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=b\cdot\frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-tg^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow y=b\cdot\frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}-tg\frac{\alpha}{2}+tg^3\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=b\cdot\frac{tg\frac{\alpha}{2}+tg^3\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow y=b\cdot\frac{tg\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1+tg^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1+tg^2\frac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \\ 1-tg^2\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \end{array}\right] \Rightarrow y=b\cdot\frac{tg\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow y=b\cdot\frac{tg\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=b\cdot\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Sada je

$$\frac{y}{x}=\frac{b\cdot\dfrac{tg\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{b\cdot tg\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{b\cdot\dfrac{tg\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{b\cdot tg\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{y}{x}=\frac{1}{\cos\alpha} \ \Rightarrow \ y : x = 1 : \cos\alpha.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 368

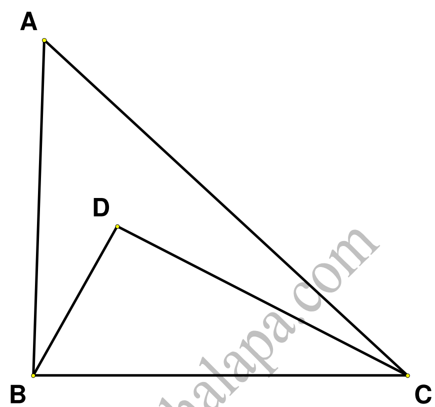
U pravokutnom trokutu simetrala kuta α dijeli suprotnu katetu na dva segmenta. Omjer duljine manjeg od njih prema duljini većeg jest:

$A.\ 1 : ctg\frac{\alpha}{2}$ $\quad B.\ \cos\alpha : 1$ $\quad C.\ 1 : 2\cdot ctg\frac{\alpha}{2}$ $\quad D.\ \cos\frac{\alpha}{2} : 1$ $\quad E.\ \sin\frac{\alpha}{2} : 1$

Rezultat: B.

Zadatak 369 (Tomislav, srednja škola)

U trokutu ABC, prikazanome na skici, kutovi $\angle ABD$ i $\angle BCD$ imaju jednaku mjeru. Mjera kuta $\angle ACB$ je 50º, a kuta $\angle BDC$ je 85º. Odredite mjeru kuta $\angle BAC$.

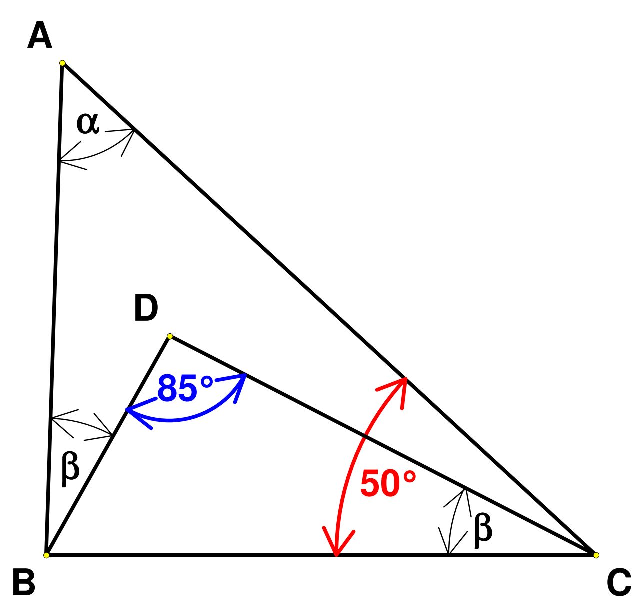


Rješenje 369

Ponovimo!

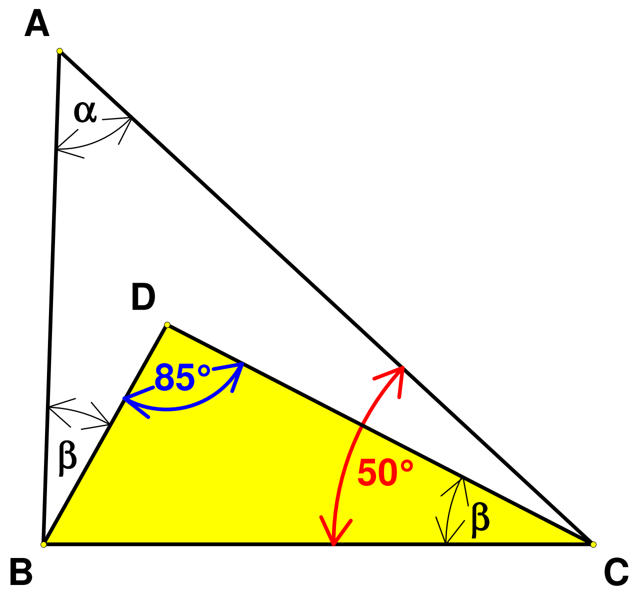
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}.$$



Sa slike vidi se:

$$\angle ABD = \angle BCD = \beta \ , \ \angle ACB = 50^\circ \ , \ \angle BDC = 85^\circ \ , \ \angle BAC = \alpha$$



Za kutove trokuta BCD vrijedi:

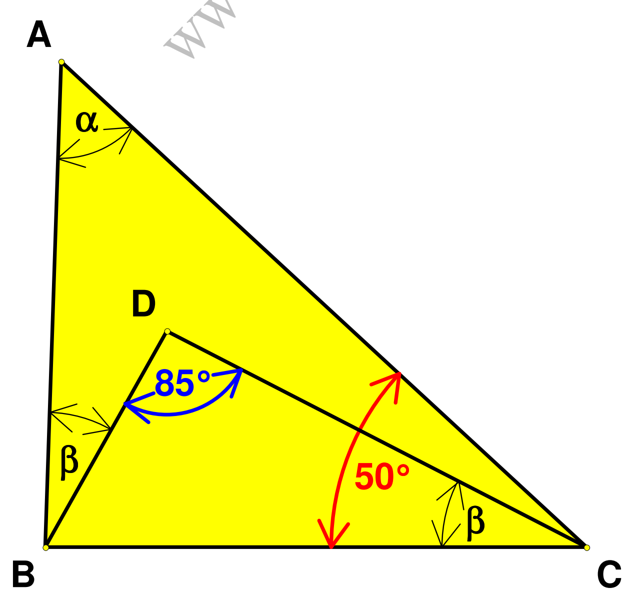
$$\angle DBC + \angle BDC + \angle BCD = 180^\circ \ \Rightarrow \ \angle DBC + 85^\circ + \beta = 180^\circ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \angle DBC = 180^\circ - 85^\circ - \beta \ \Rightarrow \ \angle DBC = 95^\circ - \beta.$$

Sada je

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \ \Rightarrow \ \angle ABC = \beta + 95^\circ - \beta \ \Rightarrow \ \angle ABC = \beta + 95^\circ - \beta \ \Rightarrow \ \angle ABC = 95^\circ.$$

Promatramo trokut ABC.



Za njegove kutove vrijedi:

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ \ \Rightarrow \ \alpha + 50^\circ + 95^\circ = 180^\circ \ \Rightarrow \ \alpha = 180^\circ - 50^\circ - 95^\circ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \alpha = 35^\circ.$$

Vježba 369

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 370 (Tomislav, srednja škola)

Duljine dviju stranica raznostraničnog trokuta su 4 i 6, a njima nasuprotni kutovi odnose se kao 1 : 2. Duljina treće stranice trokuta iznosi:

$$A.\ 8 \qquad B.\ 4 \qquad C.\ 5 \qquad D.\ 6 \qquad E.\ 7$$

Rješenje 370

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \quad , \quad \cos\left(180^\circ - x\right) = -\cos x \quad , \quad \cos(3 \cdot x) = 4 \cdot \cos^3 x - 3 \cdot \cos x.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima.
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Neka je a = 4, b = 6, α : β = 1 : 2.
Iz razmjera slijedi:

$$\alpha : \beta = 1 : 2 \Rightarrow \beta = 2 \cdot \alpha.$$

Zbroj kutova u trokutu je 180º pa vrijedi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ} \Rightarrow \alpha+2\cdot\alpha+\gamma=180^{\circ} \Rightarrow 3\cdot\alpha+\gamma=180^{\circ} \Rightarrow \gamma=180^{\circ}-3\cdot\alpha.$$

Pomoću sinusova poučka dobije se:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a:\sin\alpha=b:\sin\beta \Rightarrow a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot\sin(2\cdot\alpha)=b\cdot\sin\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} a=4 \\ b=6 \end{bmatrix} \Rightarrow 4\cdot\sin(2\cdot\alpha)=6\cdot\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\sin(2\cdot\alpha)=6\cdot\sin\alpha \;/:2 \Rightarrow 2\cdot\sin(2\cdot\alpha)=3\cdot\sin\alpha \Rightarrow 2\cdot2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=3\cdot\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=3\cdot\sin\alpha \Rightarrow 4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cdot\sin\alpha=0 \Rightarrow \sin\alpha\cdot(4\cdot\cos\alpha-3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \sin\alpha=0 \text{ nema smisla} \\ 4\cdot\cos\alpha-3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\cdot\cos\alpha-3=0 \Rightarrow 4\cdot\cos\alpha=3 \Rightarrow 4\cdot\cos\alpha=3 \;/:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{4}.$$

Računamo cos γ.

$$\cos\gamma=\left[\gamma=180^{\circ}-3\cdot\alpha\right]=\cos\left(180^{\circ}-3\cdot\alpha\right)=-\cos(3\cdot\alpha)=-\left(4\cdot\cos^{3}\alpha-3\cdot\cos\alpha\right)=$$

$$=-4\cdot\cos^{3}\alpha+3\cdot\cos\alpha=3\cdot\cos\alpha-4\cdot\cos^{3}\alpha=\cos\alpha\cdot\left(3-4\cdot\cos^{2}\alpha\right)=\left[\cos\alpha=\frac{3}{4}\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\left(3-4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(3-4\cdot\frac{9}{16}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(3-\cancel{4}\cdot\frac{9}{\cancel{16}}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(3-\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{1}-\frac{9}{4}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{12-9}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}.$$

Računamo duljinu stranice c pomoću kosinusova poučka.

$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \Rightarrow \begin{bmatrix} a=4\;,\;b=6 \\ \cos\gamma=\frac{9}{16} \end{bmatrix} \Rightarrow c^{2}=4^{2}+6^{2}-2\cdot4\cdot6\cdot\frac{9}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^{2}=16+36-48\cdot\frac{9}{16} \Rightarrow c^{2}=16+36-\cancel{48}\cdot\frac{9}{\cancel{16}} \Rightarrow c^{2}=16+36-3\cdot9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^{2}=16+36-27 \Rightarrow c^{2}=25 \Rightarrow c^{2}=25 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow c=\sqrt{25} \Rightarrow c=5.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 370

Duljine dviju stranica raznostraničnog trokuta su 8 i 12, a njima nasuprotni kutovi odnose se kao 1 : 2. Duljina treće stranice trokuta iznosi:

A. 16 *B.* 8 *C.* 10 *D.* 12 *E.* 14

Rezultat: C.

Zadatak 371 (Stjepan, srednja škola)

Omjer kateta u pravokutnom trokutu je 5 : 12. Kolika je veća kateta, ako je polumjer trokutu upisane kružnice jednak 3?

$A.\ 19 \qquad B.\ 18 \qquad C.\ 17 \qquad D.\ 16 \qquad E.\ 15$

Rješenje 371

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

$$\sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Ploština pravokutnog trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot b}{2},$$

gdje su a i b duljine kateta.
Poluopseg trokuta je:

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

Ploština trokuta

$$P = r \cdot s,$$

gdje je r polumjer trokutu upisane kružnice, s poluopseg trokuta.
Iz razmjera i Pitagorina poučka odredimo katete a i b te hipotenuzu c.

$$\left.\begin{array}{l} a : b = 5 : 12 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 5 \cdot t \ , \ b = 12 \cdot t \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow c^2 = (5 \cdot t)^2 + (12 \cdot t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 \cdot t^2 + 144 \cdot t^2 \Rightarrow c^2 = 169 \cdot t^2 \Rightarrow c^2 = 169 \cdot t^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow c = \sqrt{169 \cdot t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; c=\sqrt{169}\cdot\sqrt{t^2} \;\Rightarrow\; c=13\cdot t.$$

Pomoću formula za ploštinu trokuta dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{a\cdot b}{2} \\ P=r\cdot s \end{array}\right\} \Rightarrow \; \frac{a\cdot b}{2}=r\cdot s \;\Rightarrow\; \left[\, s=\frac{a+b+c}{2} \,\right] \;\Rightarrow\; \frac{a\cdot b}{2}=r\cdot\frac{a+b+c}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \frac{a\cdot b}{2}=r\cdot\frac{a+b+c}{2} \;/\cdot 2 \;\Rightarrow\; a\cdot b=r\cdot(a+b+c) \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} a=5\cdot t \;,\; b=12\cdot t \;,\; c=13\cdot t \\ r=3 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 5\cdot t\cdot 12\cdot t=3\cdot(5\cdot t+12\cdot t+13\cdot t) \;\Rightarrow\; 60\cdot t^2=3\cdot 30\cdot t \;\Rightarrow\; 60\cdot t^2=90\cdot t \;\Rightarrow$$

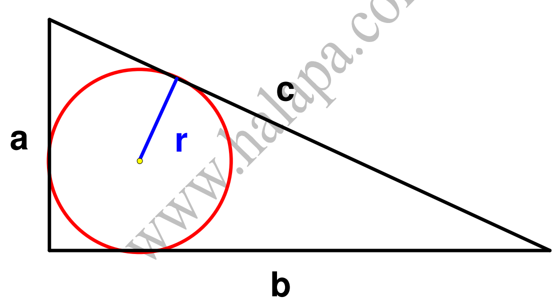
$$\Rightarrow \; 60\cdot t^2=90\cdot t \;/:30 \;\Rightarrow\; 2\cdot t^2=3\cdot t \;\Rightarrow\; 2\cdot t^2-3\cdot t=0 \;\Rightarrow\; t\cdot(2\cdot t-3)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t=0 \text{ nema smisla} \\ 2\cdot t-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 2\cdot t-3=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot t=3 \;\Rightarrow\; 2\cdot t=3 \;/:2 \;\Rightarrow\; t=\frac{3}{2}.$$

Računamo duljinu veće katete b.

$$\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2} \\ b=12\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \; b=12\cdot\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; b=12\cdot\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; b=6\cdot 3 \;\Rightarrow\; b=18.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 371

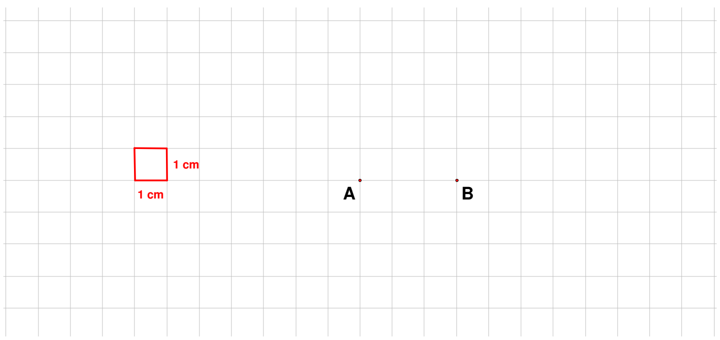
Omjer kateta u pravokutnom trokutu je 10 : 24. Kolika je veća kateta, ako je polumjer trokutu upisane kružnice jednak 3?

A. 19 *B.* 18 *C.* 17 *D.* 16 *E.* 15

Rezultat: B.

Zadatak 372 (Katarina, maturantica)

Kvadratići u kvadratnoj mreži imaju stranice duljine 1 cm. U kvadratnu mrežu ucrtajte bilo koju točku C tako da površina trokuta ABC bude 6 cm^2.



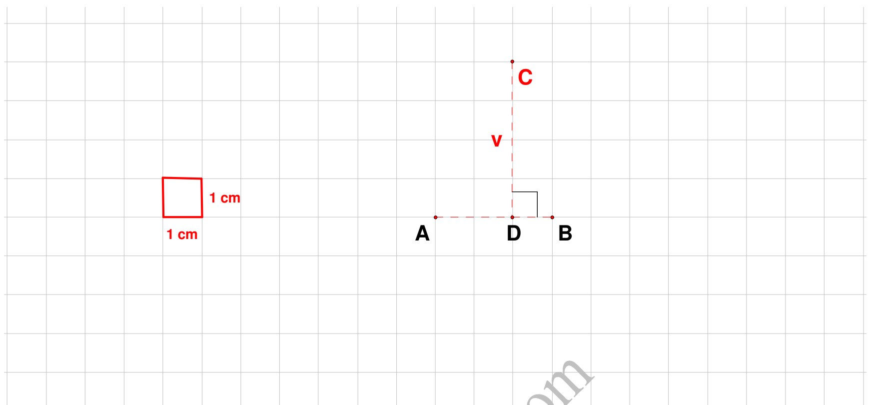
Rješenje 372

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}\quad,\quad P=\frac{b\cdot v_b}{2}\quad,\quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.



Neka je C treći vrh traženog trokuta ABC.
Sa slike vidi se:

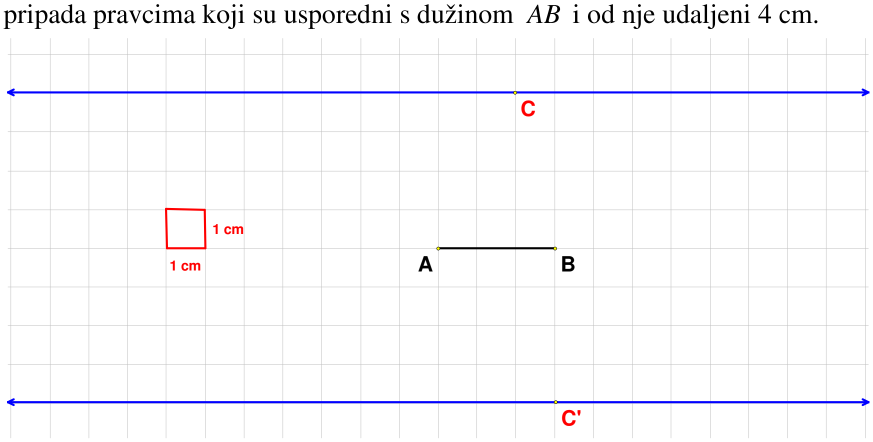
$$|AB|=3\ cm\ ,\ |CD|=v$$

Računamo duljinu visine v trokuta ABC.

$$P=\frac{|AB|\cdot v}{2}\Rightarrow\frac{|AB|\cdot v}{2}=P\Rightarrow\frac{|AB|\cdot v}{2}=P\ /\cdot\frac{2}{|AB|}\Rightarrow v=\frac{2\cdot P}{|AB|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\frac{2\cdot 6\ cm^2}{3\ cm}\Rightarrow v=4\ cm.$$

Treći vrh C pripada pravcima koji su usporedni s dužinom $\overline{AB}$ i od nje udaljeni 4 cm.



Vježba 372

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 373 (Katarina, maturantica)

Duljine stranica trokuta su u omjeru 4 : 5 : 6. Kolika je mjera najvećega kuta toga trokuta?

$$A.\ 68^\circ 21' \qquad B.\ 82^\circ 49' \qquad C.\ 90^\circ \qquad D.\ 120^\circ$$

Rješenje 373

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$a : b : c = 4 : 5 : 6 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 4 \cdot t \\ b = 5 \cdot t \\ c = 6 \cdot t \Rightarrow \text{najveći kut } \gamma \end{array}\right\}.$$

Računamo mjeru kuta γ.

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma=\cos^{-1}\left(\frac{(4\cdot t)^2+(5\cdot t)^2-(6\cdot t)^2}{2\cdot 4\cdot t\cdot 5\cdot t}\right) \Rightarrow \gamma=\cos^{-1}\left(\frac{16\cdot t^2+25\cdot t^2-36\cdot t^2}{40\cdot t^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma=\cos^{-1}\left(\frac{5\cdot t^2}{40\cdot t^2}\right) \Rightarrow \gamma=\cos^{-1}\left(\frac{5\cdot t^2}{40\cdot t^2}\right) \Rightarrow \gamma=\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow \gamma=82^\circ 49'.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 373

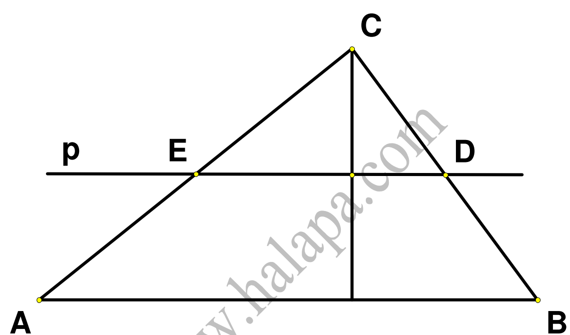
Duljine stranica trokuta su u omjeru 8 : 10 : 12. Kolika je mjera najvećega kuta toga trokuta?

$$A.\ 68^\circ 21' \qquad B.\ 82^\circ 49' \qquad C.\ 90^\circ \qquad D.\ 120^\circ$$

Rezultat: B.

Zadatak 374 (Katarina, maturantica)

Na skici su prikazani trokut ABC i pravac p. Pravac p prolazi polovištem visine iz vrha C toga trokuta i paralelan je sa stranicom $\overline{AB}$. Površina trokuta ABC je 5 cm^2. Kolika je površina trapeza ABDE?



Rješenje 374

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a\cdot d = b\cdot c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

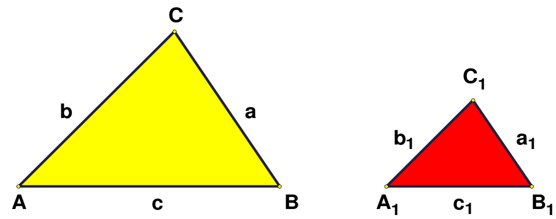
Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina pripadnih stranica.

$$\text{Ako je } \frac{a_1}{a} = k, \text{ tada je } \frac{P_1}{P} = k^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

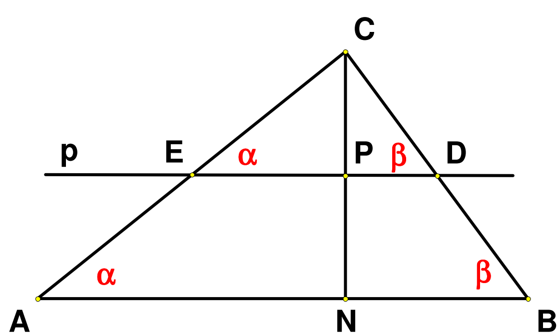
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne).
Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v,$$

gdje su a i c duljine osnovica, v je visina trapeza.

1.inačica



Sa slike vidi se:

$$|CP| = |PN| = \frac{1}{2} \cdot |CN| \;,\; |CN| = 2 \cdot |CP| \;,\; |CN| = 2 \cdot |PN|$$

Trokuti ΔABC i ΔEDC slični su (K – K) pa vrijedi razmjer:

$$\frac{|AB|}{|ED|}=\frac{|CN|}{|CP|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|ED|}=\frac{2\cdot|CP|}{|CP|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|ED|}=\frac{2\cdot|CP|}{|CP|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|ED|}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|ED|}=2 \;/\cdot|ED| \Rightarrow |AB|=2\cdot|ED|.$$

Za omjer površina trokuta ΔABC i ΔEDC vrijedi:

$$\frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|ED|\cdot|CP|}{\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CN|} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|ED|\cdot|CP|}{\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CN|} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{|ED|\cdot|CP|}{|AB|\cdot|CN|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{|ED|\cdot|CP|}{2\cdot|ED|\cdot2\cdot|CP|} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{|ED|\cdot|CP|}{2\cdot|ED|\cdot2\cdot|CP|} \Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_{EDC}}{P_{ABC}}=\frac{1}{4} \;/\cdot P_{ABC} \Rightarrow P_{EDC}=\frac{1}{4}\cdot P_{ABC} \Rightarrow \left[\, P_{ABC}=5\ cm^2 \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{EDC}=\frac{1}{4}\cdot 5\ cm^2 \Rightarrow P_{EDC}=\frac{5}{4}\ cm^2.$$

Površina trapeza ABDE iznosi:

$$P_{ABDE}=P_{ABC}-P_{EDC} \Rightarrow P_{ABDE}=5\ cm^2-\frac{5}{4}\ cm^2 \Rightarrow P_{ABDE}=\frac{5}{1}\ cm^2-\frac{5}{4}\ cm^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE}=\frac{20-5}{4}\ cm^2 \Rightarrow P_{ABDE}=\frac{15}{4}\ cm^2.$$

2.inačica

Visina trokuta EDC je **dva puta** manja od visine trokuta ABC. Zato je površina trokuta EDC **četiri puta** manja od površine trokuta ABC i iznosi:

$$P_{EDC}=\frac{1}{4}\cdot P_{ABC} \Rightarrow \left[\, P_{ABC}=5\ cm^2 \,\right] \Rightarrow P_{EDC}=\frac{1}{4}\cdot 5\ cm^2 \Rightarrow P_{EDC}=\frac{5}{4}\ cm^2.$$

Površina trapeza ABDE iznosi:

$$P_{ABDE}=P_{ABC}-P_{EDC} \Rightarrow P_{ABDE}=5\ cm^2-\frac{5}{4}\ cm^2 \Rightarrow P_{ABDE}=\frac{5}{1}\ cm^2-\frac{5}{4}\ cm^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE}=\frac{20-5}{4}\ cm^2 \Rightarrow P_{ABDE}=\frac{15}{4}\ cm^2.$$

3.inačica

Površina trapeza ABDE je:

$$P_{ABDE}=\frac{|AB|+|ED|}{2}\cdot|PN| \Rightarrow P_{ABDE}=\frac{2\cdot|ED|+|ED|}{2}\cdot|PN| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE}=\frac{3\cdot|ED|}{2}\cdot|PN| \Rightarrow P_{ABDE}=\frac{3}{2}\cdot|ED|\cdot|PN| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |ED|=\frac{1}{2}\cdot|AB| \\ |PN|=\frac{1}{2}\cdot|CN| \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot\frac{1}{2}\cdot|CN| \Rightarrow P_{ABDE}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CN| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABDE}=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CN|\right)\Rightarrow\left[P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CN|\right]\Rightarrow P_{ABDE}=\frac{3}{4}\cdot P_{ABC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[P_{ABC}=5\ cm^2\right]\Rightarrow P_{ABDE}=\frac{3}{4}\cdot 5\ cm^2\Rightarrow P_{ABDE}=\frac{15}{4}\ cm^2.$$

Vježba 374

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 375 (Katarina, maturantica)

Brod je isplovio iz luke. Najprije je 2 sata plovio prema istoku brzinom 12 km / h, a onda se okrenuo prema sjeveru i 5 sati plovio brzinom 14 km / h. Koliko je nakon tih sati plovidbe bio udaljen od luke?

$A.\ 69\ km \qquad B.\ 74\ km \qquad C.\ 79\ km \qquad D.\ 84\ km$

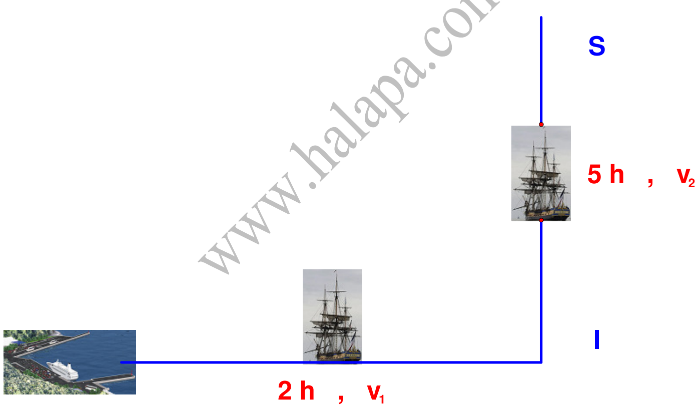
Rješenje 375

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

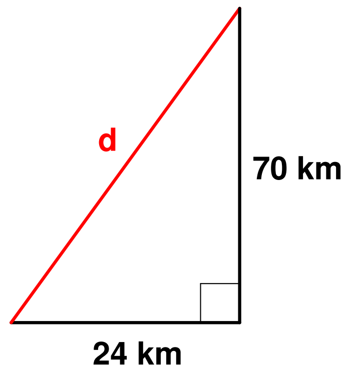


Ploveći prema istoku 2 sata brzinom v_1 = 12 km / h brod je prešao put od 24 km.

$$12\ \frac{km}{h}\cdot 2\ h=24\ km.$$

Ploveći prema sjeveru 5 sati brzinom v_2 = 14 km / h prešao je put od 70 km.

$$14\ \frac{km}{h}\cdot 5\ h=70\ km.$$



Iz pravokutnog trokuta pomoću Pitagorina poučka izračunamo hipotenuzu d (udaljenost broda od luke).

$$d^2 = (24\ km)^2 + (70\ km)^2 \Rightarrow d^2 = (24\ km)^2 + (70\ km)^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(24\ km)^2 + (70\ km)^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array}\right] \Rightarrow d = 74\ km.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 375

Brod je isplovio iz luke. Najprije je 120 minuta plovio prema istoku brzinom 12 km / h, a onda se okrenuo prema sjeveru i 300 minuta plovio brzinom 14 km / h. Koliko je nakon tih sati plovidbe bio udaljen od luke?

$$A.\ 69\ km \qquad B.\ 74\ km \qquad C.\ 79\ km \qquad D.\ 84\ km$$

Rezultat: B.