Zadatak 341 (4B, TUPŠ)

Duljine odgovarajućih stranica sličnih trokuta su a = 20 i a_1 = 15. Odredi ploštine tih trokuta, ako je njihova razlika 56.

Rješenje 341

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

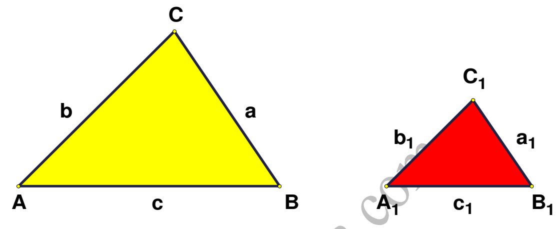
Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1.$$

$$\frac{a_1}{a} = k \quad , \quad \frac{b_1}{b} = k \quad , \quad \frac{c_1}{c} = k \quad , \quad \frac{P_1}{P} = k^2.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Iz podataka o duljinama odgovarajućih stranica sličnih trokuta lako izračunamo koeficijent sličnosti:

$$\frac{a_1}{a} = k \Rightarrow k = \frac{a_1}{a} \Rightarrow k = \frac{15}{20} \Rightarrow k = \frac{15}{20} \Rightarrow k = \frac{3}{4}.$$

Tada je

$$\frac{P_1}{P} = k^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{9}{16} \ / \cdot P \Rightarrow P_1 = \frac{9}{16} \cdot P.$$

Uz to vrijedi

$$P - P_1 = 56$$

pa rješavajući taj sustav imamo:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \frac{9}{16} \cdot P \\ P - P_1 = 56 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow P - \frac{9}{16} \cdot P = 56 \Rightarrow P - \frac{9}{16} \cdot P = 56 \ / \cdot 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot P - 9 \cdot P = 896 \Rightarrow 7 \cdot P = 896 \Rightarrow 7 \cdot P = 896 \ /: 7 \Rightarrow P = 128.$$

Računamo P_1.

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \frac{9}{16} \cdot P \\ P = 128 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 = \frac{9}{16} \cdot 128 \Rightarrow P_1 = \frac{9}{16} \cdot 128 \Rightarrow P_1 = 9 \cdot 8 \Rightarrow P_1 = 72.$$

Vježba 341

Duljine odgovarajućih stranica sličnih trokuta su a = 12 i a_1 = 9. Odredi ploštine tih trokuta, ako je njihova razlika 56.

Rezultat: 128, 72.

Zadatak 342 (Matej, gimnazija)

Dokaži, ako su u trokutu dvije visine jednake, onda je trokut jednakokračan.

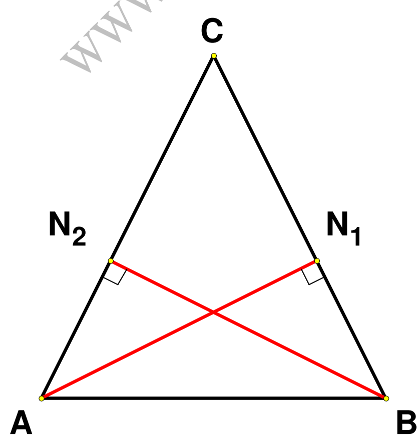
Rješenje 342

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračni trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.
Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.
Sukladnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \ , \ b = b_1 \ , \ c = c_1 .$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.
Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.
Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.



Neka su N_1 i N_2 nožišta visina spuštenih iz vrhova A i B na suprotne stranice trokuta ABC. Prema uvjetu zadatka duljine tih visina jednake su:

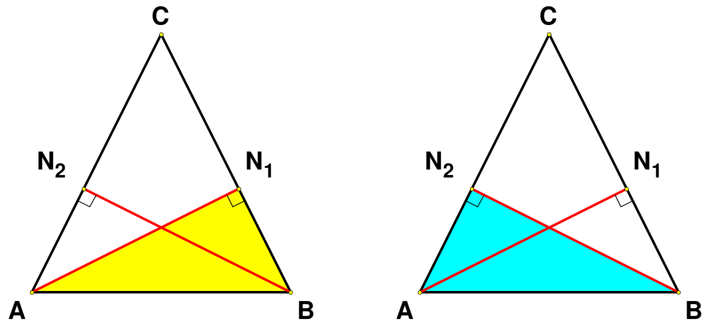
$$|AN_1| = |BN_2| .$$

Trokuti ΔABN_1 i ΔABN_2 podudaraju se u dvije stranice, $|AB| = |AB|$, $|AN_1| = |BN_2|$ i kutu nasuprot većoj stranici

$$\angle BN_1A = \angle AN_2B = 90^\circ .$$

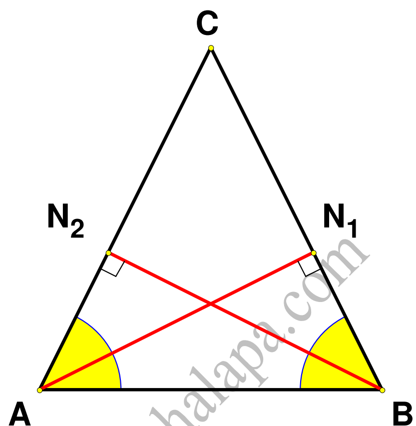
Dakle, trokuti ΔABN_1 i ΔABN_2 sukladni su,

$$\Delta ABN_1 \cong \Delta ABN_2.$$



Zato su jednaki i kutovi

$$\angle BAN_2 = \angle ABN_1.$$



Trokut ABC ima jednaka dva kuta pa su mu i dvije stranice jednake duljine, dakle, trokut ABC je jednakokračan.

Vježba 342

Dokaži da su visine spuštene na krakove jednakokračnog trokuta jednake.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 343 (Toba, srednja škola)

Elementima pravokutnog trokuta zovemo: duljine stranica a, b, c (c je duljina hipotenuze), duljinu visine v na hipotenuzu, duljine ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu p i q. Odredi c, v, p i q ako je zadano a = 8 i b = 6.

Rješenje 343

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

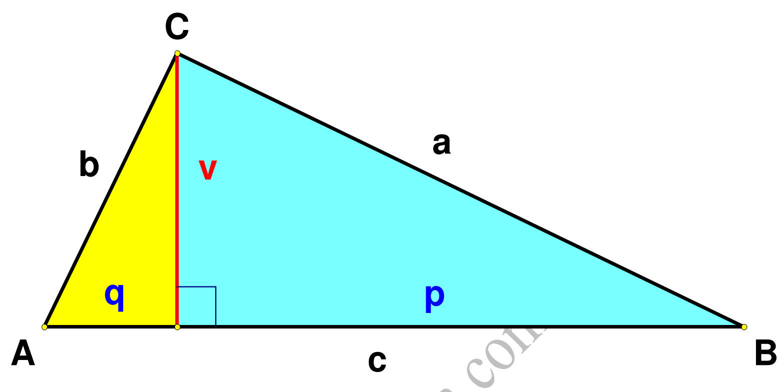
Neka je ABC pravokutan trokut s visinom v na hipotenuzu c. Tada je:

$$a = \sqrt{c \cdot p} \Rightarrow p = \frac{a^2}{c} \quad , \quad b = \sqrt{c \cdot q} \Rightarrow q = \frac{b^2}{c},$$

gdje su p i q duljine ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu c.
Ploština pravokutnog trokuta izračunava se po formulama

$$P = \frac{a \cdot b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v}{2},$$

gdje su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, v duljina visine na hipotenuzu c.



Redom računamo:

- $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \begin{bmatrix} a = 8 \\ b = 6 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \sqrt{8^2 + 6^2} \Rightarrow c = \sqrt{64 + 36} \Rightarrow c = \sqrt{100} \Rightarrow c = 10$

- duljinu visine v lako izračunamo uporabom formula za površinu pravokutnog trokuta

  $\left. \begin{aligned} P &= \frac{c \cdot v}{2} \\ P &= \frac{a \cdot b}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{c \cdot v}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{c \cdot v}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \; / \cdot \frac{2}{c} \Rightarrow v = \frac{a \cdot b}{c} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 8 \\ b = 6 \\ c = 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$

  $\Rightarrow v = \frac{8 \cdot 6}{10} \Rightarrow v = \frac{48}{10} \Rightarrow v = \frac{48}{10} \Rightarrow v = \frac{24}{5}$

- $p = \frac{a^2}{c} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 8 \\ c = 10 \end{bmatrix} \Rightarrow p = \frac{8^2}{10} \Rightarrow p = \frac{64}{10} \Rightarrow p = \frac{64}{10} \Rightarrow p = \frac{32}{5}$

- $q = \frac{b^2}{c} \Rightarrow \begin{bmatrix} b = 6 \\ c = 10 \end{bmatrix} \Rightarrow q = \frac{6^2}{10} \Rightarrow q = \frac{36}{10} \Rightarrow q = \frac{36}{10} \Rightarrow q = \frac{18}{5}.$

Vježba 343

Elementima pravokutnog trokuta zovemo: duljine stranica a, b, c (c je duljina hipotenuze), duljinu visine v na hipotenuzu, duljine ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu p i q. Odredi c, v, p i q ako je zadano a = 4 i b = 3.

Rezultat: $c = 5, \; v = \frac{12}{5}, \; p = \frac{16}{5}, \; q = \frac{9}{5}.$

Zadatak 344 (Lemy, Mijo, Ivica, tehnička škola)

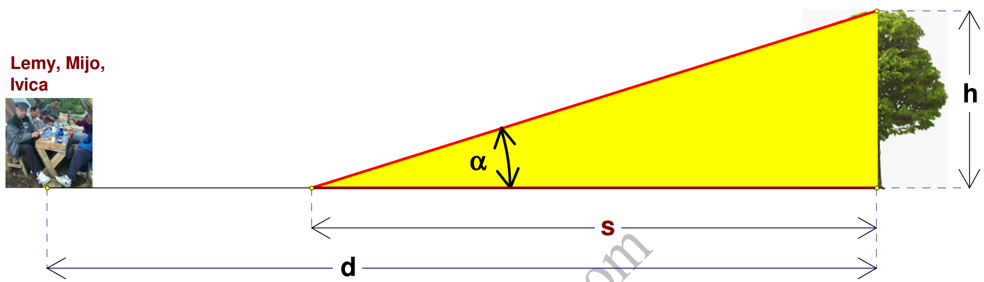
Izletnici sjede u polju udaljenom 20 m od stabla koje je visoko 10 m. Sunčeve zrake padaju na zemlju pod kutom 35º. Sjede li izletnici u sjeni?

Rješenje 344

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$



Sa slike vidi se:

h = 10 m , α = 35º , s – duljina sjene , d = 20 m – udaljenost izletnika od stabla

Uočimo pravokutan trokut čije su katete h i s te pomoću funkcije tangens izračunamo duljinu sjene s.

$$tg\,\alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{h}{s} \; / \cdot \frac{s}{tg\,\alpha} \Rightarrow s = \frac{h}{tg\,\alpha} \Rightarrow s = \frac{10}{tg\,35^{\circ}} \Rightarrow s = 14.28\ m.$$

Budući da je d > s, izletnici ne sjede u sjeni (ali imaju suncobrane ☺).

Vježba 344

Izletnici sjede u polju udaljenom 200 dm od stabla koje je visoko 100 dm. Sunčeve zrake padaju na zemlju pod kutom 35º. Sjede li izletnici u sjeni?

Rezultat: Ne.

Zadatak 345 (Lemy, Mijo, Ivica, tehnička škola)

S broda koji je okrenut prema sjeveru vidi se svjetionik pod kutom 20 º u smjeru zapada i otok pod kutom 30º u smjeru istoka. Brod je od svjetionika udaljen 2 km, a od otoka 3 km. Koliko je svjetionik udaljen od otoka?

Rješenje 345

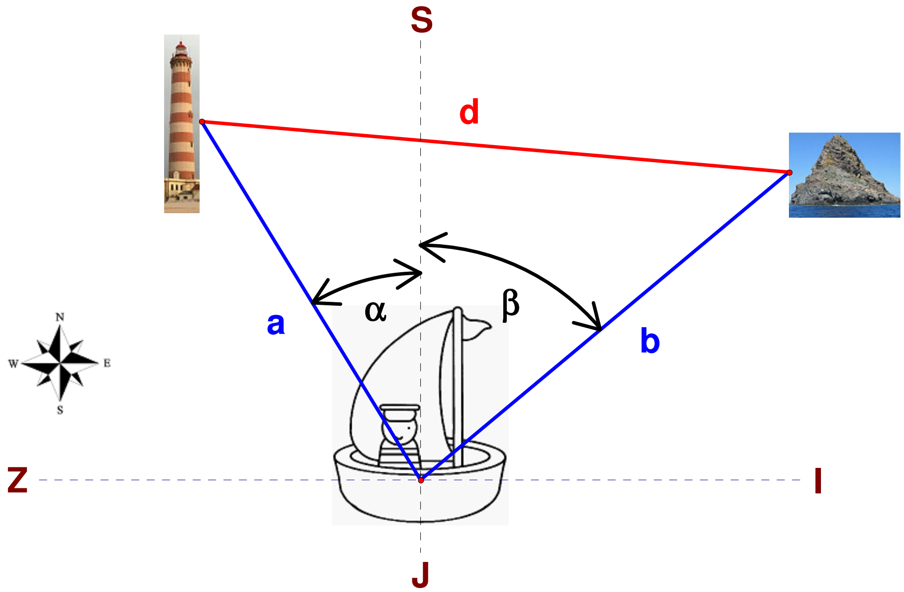
Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



Sa slike vidi se:

a = 2 km , b = 3 km , α = 20º , β = 30º , d – udaljenost između otoka i svjetionika

Uočimo trokut sa stranicama a, b, d te pomoću poučka o kosinusu izračunamo duljinu d.

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta) \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta) \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha + \beta)} \Rightarrow d = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(20^\circ + 30^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{4 + 9 - 12 \cdot \cos 50^\circ} \Rightarrow d = \sqrt{13 - 12 \cdot \cos 50^\circ} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{bmatrix} \Rightarrow d = 2.3 \; km.$$

Vježba 345

S broda koji je okrenut prema sjeveru vidi se svjetionik pod kutom 20 º u smjeru zapada i otok pod kutom 30º u smjeru istoka. Brod je od svjetionika udaljen 2 km, a od otoka 3 km. Koliko je svjetionik udaljen od otoka?

Rezultat: 2.3 km.

Zadatak 346 (Lemy, Mijo, Ivica, tehnička škola)

Lemy, Mijo i Ivica gledaju kroz prozor. (Dečki, učite matku, a ne gubite vrijeme na prozoru! ☺). Pod kutom depresije 20º vide stablo, a pod kutom elevacije 15º vide Karolinu u zgradi preko puta koja također gleda kroz prozor (izgleda da ni ona ne uči matku). Ako je stablo udaljeno od dječaka 250 m, a od Karoline 450 m, koliko su međusobno udaljeni ovi mladi ljudi?

Rješenje 346

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima.
U trokutu ABC vrijedi

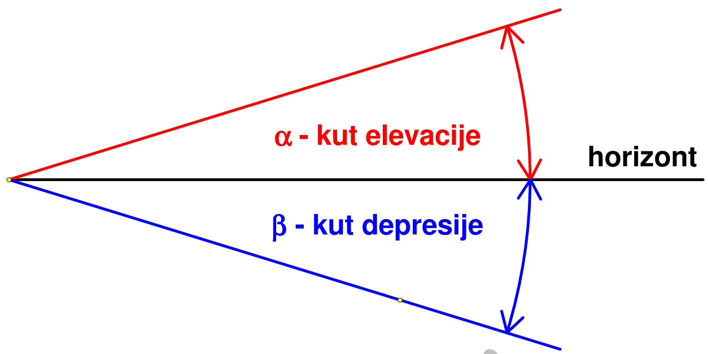
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

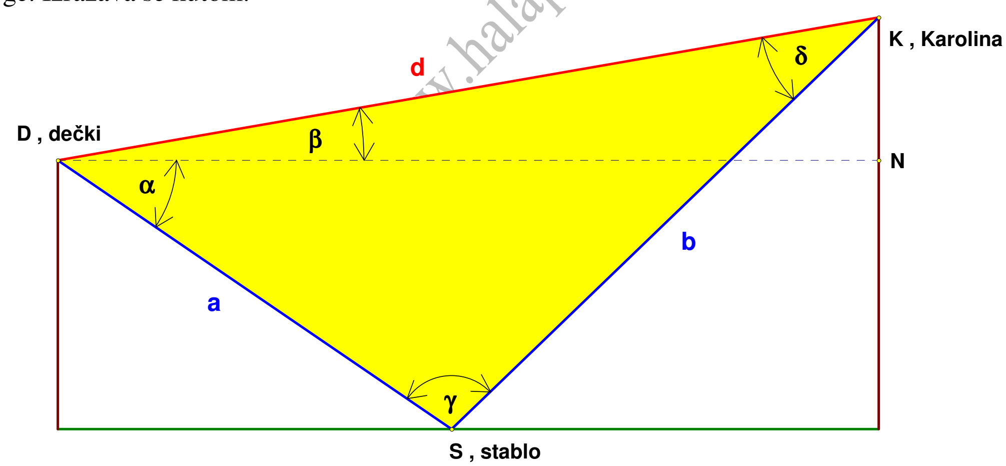
$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$



Depresija – u astronomiji, položaj nebeskog tijela ispod neke vodoravne ravnine, a posebno depresija horizonta. Izražava se kutom.
Elevacija – uzdignutost neke točke od horizontalne ravnine, površine Zemlje, razine mora ili druge podloge. Izražava se kutom.



Sa slike vidi se:

$$a=\left|SD\right|=250\ m\quad,\quad b=\left|SK\right|=450\ m\quad,\quad \angle KDN=\beta=15^\circ\quad,\quad \angle NDS=\alpha=20^\circ$$

$$\angle DSK=\gamma\quad,\quad \angle SKD=\delta\quad,\quad d=\left|DK\right|$$

U trokutu SKD pomoću poučka o sinusu izračunamo mjeru kuta δ.

$$\frac{b}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a}{\sin\delta}\ \Rightarrow\ \frac{b}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a}{\sin\delta}\ /\cdot\frac{\sin\delta\cdot\sin(\alpha+\beta)}{b}\ \Rightarrow\ \sin\delta=\frac{a\cdot\sin(\alpha+\beta)}{b}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \delta=\sin^{-1}\left(\frac{a\cdot\sin(\alpha+\beta)}{b}\right)\ \Rightarrow\ \delta=\sin^{-1}\left(\frac{250\cdot\sin\left(20^\circ+15^\circ\right)}{450}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = \sin^{-1}\left(\frac{250 \cdot \sin 35^\circ}{450}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{džepno} \\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow \delta = 18^\circ 35'.$$

Tada kut γ iznosi:

$$(\alpha + \beta) + \gamma + \delta = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) - \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - \left(20^\circ + 15^\circ\right) - 18^\circ 35' \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 35^\circ - 18^\circ 35' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{džepno} \\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow \gamma = 126^\circ 25'.$$

Ponovno promatramo trokut SKD i uporabom poučka o kosinusu izračunamo duljinu d.

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \; / \sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma} \Rightarrow d = \sqrt{250^2 + 450^2 - 2 \cdot 250 \cdot 450 \cdot \cos 126^\circ 25'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{džepno} \\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow d = 631.33 \; m.$$

Vježba 346

Karlo gleda kroz prozor. Pod kutom depresije 20º vidi stablo, a pod kutom elevacije 15º vidi Karolinu u zgradi preko puta koja također gleda kroz prozor. Ako je stablo udaljeno od Karla 0.25 km, a od Karoline 0.45 km, koliko su međusobno udaljeni Karolina i Karlo?

Rezultat: 631.33 m.

Zadatak 347 (Leo, tehnička škola)

Izračunajte nepoznate elemente i ploštinu trokuta ABC, ako je poznato: a = 6 cm, α : β : γ = 7 : 8 : 9.

Rješenje 347

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima.
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \;\; \text{ili} \;\; \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,

k – vrijednost (količnik) omjera.

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Zbroj kutova u trokutu je 180° pa iz produženog razmjera najprije izračunamo mjere svih triju kutova trokuta.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : \beta : \gamma = 7 : 8 : 9 \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{k} \\ \text{koeficijent} \\ \text{proporcionalnosti} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = 7 \cdot k \\ \beta = 8 \cdot k \\ \gamma = 9 \cdot k \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot k + 8 \cdot k + 9 \cdot k = 180^\circ \Rightarrow 24 \cdot k = 180^\circ \Rightarrow 24 \cdot k = 180^\circ \;/ : 24 \Rightarrow k = 7.5^\circ.$$

Mjere kutova su:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 7 \cdot k \\ \beta = 8 \cdot k \\ \gamma = 9 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k = 7.5^\circ \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = 7 \cdot 7.5^\circ \\ \beta = 8 \cdot 7.5^\circ \\ \gamma = 9 \cdot 7.5^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = 52.5^\circ \\ \beta = 60^\circ \\ \gamma = 67.5^\circ \end{array}\right\}.$$

Računamo, pomoću poučka o sinusu, duljinu stranice b.

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \;/ \cdot \sin\beta \Rightarrow b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 6\ cm \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 52.5^\circ} \Rightarrow b = 6.55\ cm.$$

Računamo, pomoću poučka o sinusu, duljinu stranice c.

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \;/ \cdot \sin\gamma \Rightarrow c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 6\ cm \cdot \frac{\sin 67.5^\circ}{\sin 52.5^\circ} \Rightarrow c = 6.99\ cm.$$

Ploština trokuta ABC iznosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 6\ cm \cdot 6.55\ cm \cdot \sin 67.5^\circ \Rightarrow P = 18.15\ cm^2.$$

Vježba 347

Izračunajte nepoznate elemente i ploštinu trokuta ABC, ako je poznato: a = 6 cm, $\alpha : \beta : \gamma = 14 : 16 : 18$.

Rezultat: b = 6.55 cm, c = 6.99 cm, P = 18.15 cm^2.

Zadatak 348 (Dado, gimnazija)

Dokaži da u trokutu ABC vrijedi formula $P=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha}$.

Rješenje 348

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima.
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}\\ P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}\ /\cdot\sin\beta\\ P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b=a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\\ P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{1}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{1}\Rightarrow P=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha}.$$

Vježba 348

Dokaži da u trokutu ABC vrijedi formula $P=\frac{c^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\cdot\sin\gamma}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 349 (Dado, gimnazija)

Dokaži da u trokutu ABC vrijedi relacija $\sin(\beta-\gamma)=\frac{b^2-c^2}{2\cdot a\cdot R}$.

Rješenje 349

Ponovimo!

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Podsjetimo se poučka o sinusima.
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R \;\Rightarrow\; \sin\alpha=\frac{a}{2\cdot R},$$

$$\frac{b}{\sin\beta}=2\cdot R \;\Rightarrow\; \sin\beta=\frac{b}{2\cdot R},$$

$$\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R \;\Rightarrow\; \sin\gamma=\frac{c}{2\cdot R},$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c},$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \;\Rightarrow\; \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c},$$

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \;\Rightarrow\; \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$

$$\sin(\beta-\gamma)=\sin\beta\cdot\cos\gamma-\cos\beta\cdot\sin\gamma \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ll}\sin\beta=\frac{b}{2\cdot R}\;, & \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\\ \sin\gamma=\frac{c}{2\cdot R}\;, & \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\end{array}\right] \;\Rightarrow$$

$$=\frac{b}{2\cdot R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}-\frac{c}{2\cdot R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}=\frac{b}{2\cdot R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}-\frac{c}{2\cdot R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a}-\frac{1}{2\cdot R}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\cdot a\cdot R}-\frac{a^2+c^2-b^2}{4\cdot a\cdot R}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2-\left(a^2+c^2-b^2\right)}{4\cdot a\cdot R}=\frac{a^2+b^2-c^2-a^2-c^2+b^2}{4\cdot a\cdot R}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2-a^2-c^2+b^2}{4\cdot a\cdot R}=\frac{b^2-c^2-c^2+b^2}{4\cdot a\cdot R}=\frac{2\cdot b^2-2\cdot c^2}{4\cdot a\cdot R}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(b^2-c^2\right)}{4\cdot a\cdot R}=\frac{2\cdot\left(b^2-c^2\right)}{4\cdot a\cdot R}=\frac{b^2-c^2}{2\cdot a\cdot R}.$$

Vježba 349

Dokaži da u trokutu ABC vrijedi relacija $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{a^2-b^2}{2\cdot c\cdot R}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 350 (Asterix, gimnazija)

Dvije promatračnice za otkrivanje šumskih požara smještene su na istoj geografskoj širini, a međusobno su udaljene 75 km. Iz promatračnice A vatra je uočena u točki C pod kutom 42º istočno, a iz promatračnice B pod kutom 15º također istočno. Kolike su udaljenosti promatračnica od mjesta požara?

Rješenje 350

Ponovimo!

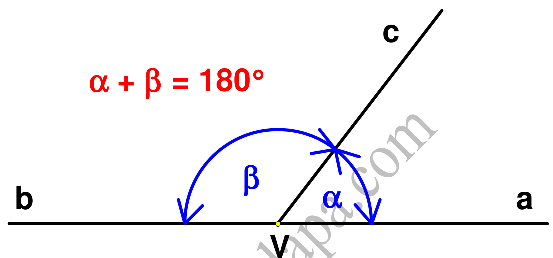
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

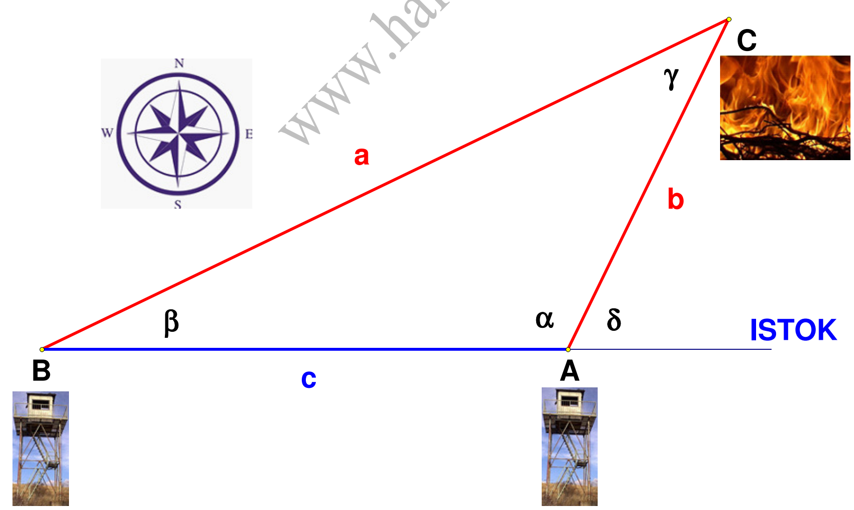
$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima.
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Kutovi koji imaju jedan krak zajednički (c), a unija drugih dvaju krakova (a i b) je pravac zovu se sukuti. Njihov zbroj je 180º.





Sa slike vidi se:

$$c=|BA|=75\ ,\ \delta=42^\circ\ ,\ \beta=15^\circ\ ,\ a=|BC|\ ,\ b=|AC|$$

Mjera kuta α je

$$\alpha+\delta=180^\circ\ \Rightarrow\ \alpha=180^\circ-\delta\ \Rightarrow\ \alpha=180^\circ-42^\circ\ \Rightarrow\ \alpha=138^\circ.$$

Tada mjera kuta γ u trokutu ABC iznosi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ\ \Rightarrow\ \gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)\ \Rightarrow\ \gamma=180^\circ-\left(138^\circ+15^\circ\right)\ \Rightarrow\ \gamma=27^\circ.$$

Pomoću poučka o sinusu koji uporabimo dva puta izračunamo udaljenosti a i b promatračnica od mjesta požara.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\\ \dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\ /\cdot\sin\alpha\\ \dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\ /\cdot\sin\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=c\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\\ b=c\cdot\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=75\ km\cdot\dfrac{\sin 138^\circ}{\sin 27^\circ}\\ b=75\ km\cdot\dfrac{\sin 15^\circ}{\sin 27^\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=110.54\ km\\ b=42.76\ km\end{array}\right\}.$$

Vježba 350

Dvije promatračnice za otkrivanje šumskih požara smještene su na istoj geografskoj širini, a međusobno su udaljene 150 km. Iz promatračnice A vatra je uočena u točki C pod kutom 42º istočno, a iz promatračnice B pod kutom 15º također istočno. Kolike su udaljenosti promatračnica od mjesta požara?

Rezultat: 221.08 km, 85.51 km.

Zadatak 351 (Asterix, gimnazija)

Zadan je raznostraničan trokut. Dvije stranice trokuta imaju duljine 6 cm i 7 cm. Duljina težišnice trokuta na kraću stranicu od tih dviju stranica jednaka je 5 cm. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

Rješenje 351

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Raznostraničan trokut – sve tri stranice su različite duljine.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

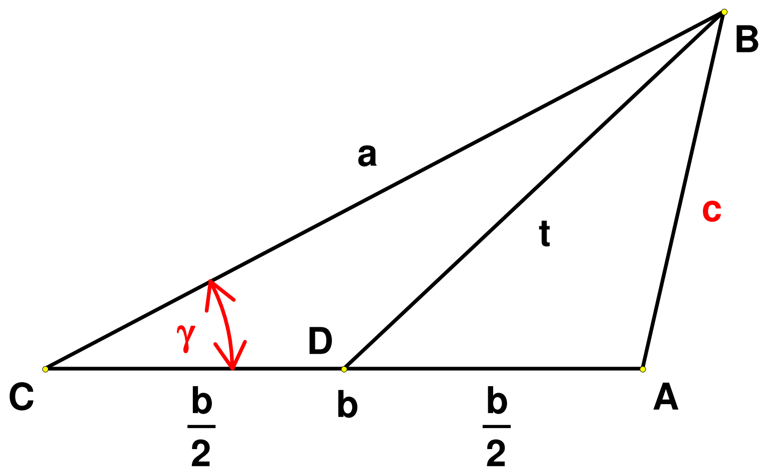
$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c},$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta\ \Rightarrow\ \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c},$$

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\ \Rightarrow\ \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$

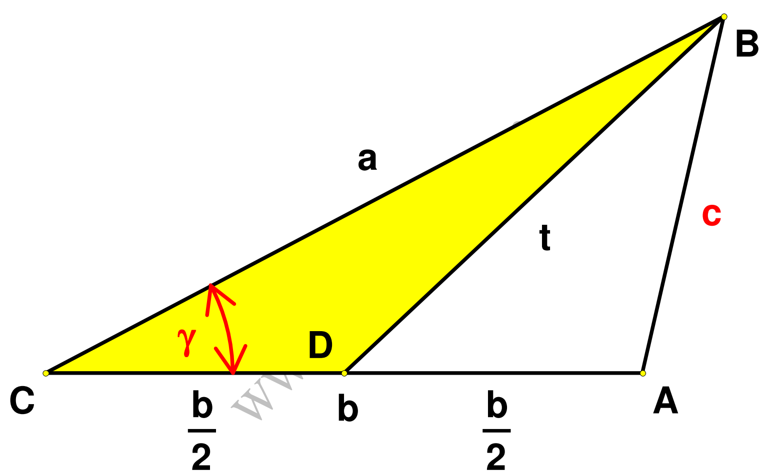
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$



Sa slike vidi se:

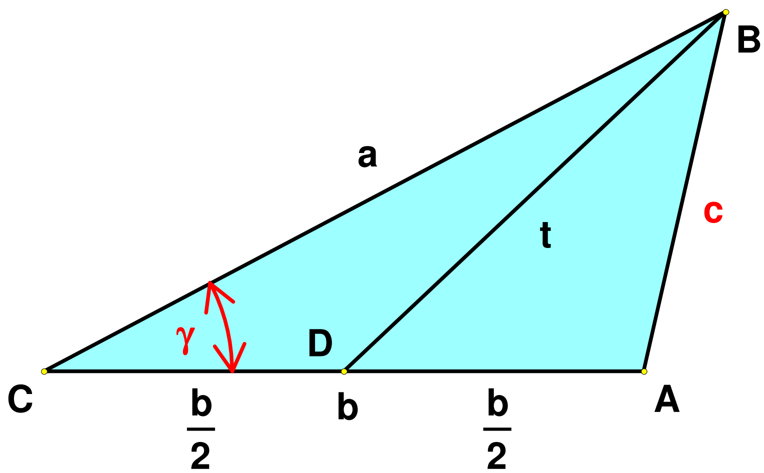
$$|BC| = a = 7 \;\;,\;\; |CA| = b = 6 \;\;,\;\; |CD| = |DA| = \frac{b}{2} = 3 \;\;,\;\; |BD| = t = 5 \;\;,\;\; |AB| = c$$



Uočimo trokut CDB i pomoću poučka o kosinusu izračunamo cos γ.

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - t^2}{2 \cdot a \cdot \frac{b}{2}} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - t^2}{2 \cdot a \cdot \frac{b}{2}} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - t^2}{a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{7 \cdot 6} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{49 + 9 - 25}{42} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{33}{42} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{33}{42} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{11}{14}.$$



Iz trokuta ABC uporabom poučka o kosinusu dobije se duljina stranice c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 7 \quad , \quad b = 6 \\ \cos\gamma = \frac{11}{14} \end{bmatrix} \Rightarrow c^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{11}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 49 + 36 - 14 \cdot 6 \cdot \frac{11}{14} \Rightarrow c^2 = 85 - 14 \cdot 6 \cdot \frac{11}{14} \Rightarrow c^2 = 85 - 6 \cdot 11 \Rightarrow c^2 = 85 - 66 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 19 \Rightarrow c^2 = 19 \; / \sqrt{} \Rightarrow c = \sqrt{19} \; cm.$$

Vježba 351

Zadan je raznostraničan trokut. Dvije stranice trokuta imaju duljine 6 dm i 7 dm. Duljina težišnice trokuta na kraću stranicu od tih dviju stranica jednaka je 5 dm. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

Rezultat: $\sqrt{19}\; dm.$

Zadatak 352 (Nina, gimnazija)

Opseg trokuta iznosi 24 cm, sinusi njegovih kutova su u omjeru 3 : 4 : 5. Odredi duljinu stranica i kutove trokuta.

Rješenje 352

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ako su a, b i c duljine stranica trokuta ABC, onda je formula za opseg

$$O = a + b + c.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima.
U trokutu ABC vrijedi

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \;\text{ ili }\; \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta. Za taj trokut vrijedi:

$$\gamma = 90^0 \quad , \quad \alpha + \beta = 90^0.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 3 : 4 : 5 \;\Rightarrow\; \left[\, a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \,\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a : b : c = 3 : 4 : 5 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \text{k} \\ \text{koeficijent} \\ \text{proporcionalnosti} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} \alpha = 3 \cdot k \\ \beta = 4 \cdot k \\ \gamma = 5 \cdot k \end{matrix}\right\}.$$

Iz opsega trokuta dobije se koeficijent proporcionalnosti k.

$$O = 24 \;\Rightarrow\; a + b + c = 24 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a = 3 \cdot k \\ b = 4 \cdot k \\ c = 5 \cdot k \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; 3 \cdot k + 4 \cdot k + 5 \cdot k = 24 \;\Rightarrow\; 12 \cdot k = 24 \;\Rightarrow$$

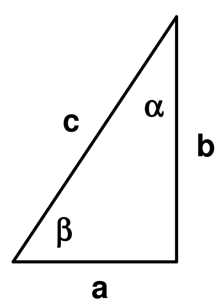
$$\Rightarrow\; 12 \cdot k = 24 \;/ : 12 \;\Rightarrow\; k = 2.$$

Stranice trokuta iznose:

$$\left.\begin{matrix} a = 3 \cdot k \\ b = 4 \cdot k \\ c = 5 \cdot k \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left[\, k = 2 \,\right] \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a = 3 \cdot 2 \\ b = 4 \cdot 2 \\ c = 5 \cdot 2 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a = 6 \; cm \\ b = 8 \; cm \\ c = 10 \; cm \end{matrix}\right\}.$$

Uočimo da je trokut pravokutan (vrijedi Pitagorin poučak).

$$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; 10^2 = 6^2 + 8^2 \;\Rightarrow\; 100 = 36 + 64 \;\Rightarrow\; 100 = 100.$$



Računamo kutove α i β.

- $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \;\Rightarrow\; \alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{a}{c}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{6}{10}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = 36^\circ 52'.$
- $\alpha + \beta = 90^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 90^\circ - \alpha \;\Rightarrow\; \beta = 90^\circ - 36^\circ 52' \;\Rightarrow\; \beta = 53^\circ 8'.$

Vježba 352

Opseg trokuta iznosi 24 cm, sinusi njegovih kutova su u omjeru 6 : 8 : 10. Odredi duljinu stranica i kutove trokuta.

Rezultat: 6 cm, 8 cm, 10 cm, 36° 52', 53° 8'.

Zadatak 353 (Mario, gimnazija)

Dva su vrha trokuta ABC točke A(– 2, 1) i B(3, 2), a treći vrh C leži na osi y. Odredi koordinate vrha C ako je površina trokuta jednaka 6.

Rješenje 353

Ponovimo!

Ako točka T leži na x osi ima koordinate T(x, 0).
Ako točka T leži na y osi ima koordinate T(0, y).
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine.
Ako su poznate koordinate vrhova trokuta $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ njegova ploština može se izračunati po jednoj od formula:

- $$P=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|$$
- $$P=\frac{1}{2}\cdot\left|y_1\cdot\left(x_2-x_3\right)+y_2\cdot\left(x_3-x_1\right)+y_3\cdot\left(x_1-x_2\right)\right|.$$

Apsolutna vrijednost osigurava da ploština bude pozitivna. Treba paziti na cikličku izmjenu indeksa u formulama: 1, 2, 3 → 2, 3, 1 → 3, 1, 2.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Označimo treći vrh C(0, y) i napišemo jednadžbu za površinu trokuta ABC.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right)=A(-2, 1) \\ B\left(x_2, y_2\right)=B(3, 2) \\ C\left(x_3, y_3\right)=C(0, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|-2\cdot(2-y)+3\cdot(y-1)+0\cdot(1-2)\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|-4+2\cdot y+3\cdot y-3+0\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|5\cdot y-7\right|.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{1}{2}\cdot\left|5\cdot y-7\right| \\ P=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|5\cdot y-7\right|=6 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|5\cdot y-7\right|=6 \;/\cdot 2 \Rightarrow \left|5\cdot y-7\right|=12.$$

Ova jednadžba ima dva rješenja.

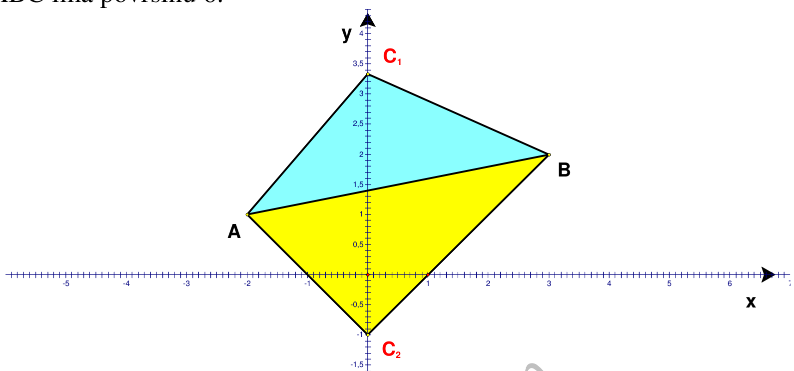
$$\left|5\cdot y-7\right|=12 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix}5\cdot y-7=12\\ 5\cdot y-7=12\end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix}5\cdot y=12+7\\ 5\cdot y=-12+7\end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix}5\cdot y=19\\ 5\cdot y=-5\end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\begin{matrix}5\cdot y=19 \;/:5\\ 5\cdot y=-5 \;/:5\end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix}y=\dfrac{19}{5}\\ y=-1\end{matrix}\right\}.$$

Na osi y postoje dvije točke:

$$C_1\left(0,\ \frac{19}{5}\right),\ C_2\left(0,\ -1\right)$$

za koje trokut ABC ima površinu 6.



Vježba 353

Dva su vrha trokuta ABC točke A(– 1, 2) i B(4, – 2), a treći vrh C leži na osi x. Odredi koordinate vrha C ako je površina trokuta jednaka 7.

Rezultat: $C_1(-2, 0)$, $C_2(5, 0)$.

Zadatak 354 (Lidija, gimnazija)

U trokutu je $a=\sqrt{3}+1,\ b=\sqrt{3}-1,$ a razlika suprotnih kutova iznosi $\frac{\pi}{3}$. Dokaži da je trokut pravokutan.

Rješenje 354

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad tg\frac{\pi}{4}=1.$$

$$tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Poučak o tangensima

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

gdje su a, b duljine stranica trokuta, α, β nasuprotni kutovi.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}} \Rightarrow \frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{a+b}{a-b} \Rightarrow \frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{a+b}{a-b} \ /\cdot tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a+b}{a-b}\cdot tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} a=\sqrt{3}+1 \\ b=\sqrt{3}-1 \\ \alpha-\beta=\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1-\left(\sqrt{3}-1\right)}\cdot tg\,\frac{\frac{\pi}{3}}{2} \Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}\cdot tg\,\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}\cdot tg\,\frac{\pi}{6} \Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} \Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{3} \Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=1 \Rightarrow tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=tg\,\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4} \ /\cdot 2 \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

Vježba 354

U trokutu je $a=\sqrt{3}-1$, $b=\sqrt{3}+1$, a razlika suprotnih kutova iznosi 60°. Dokaži da je trokut pravokutan.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 355 (Lidija, gimnazija)

Ako za kutove β i γ trokuta vrijedi relacija $\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$, trokut je pravokutan ili jednakokračan. Dokažite!

Rješenje 355

Ponovimo!

$$\sin(2\cdot x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x \quad , \quad \sin x-\sin y=2\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}.$$

$$\sin 0=0 \quad , \quad \cos 0=1 \quad , \quad \sin\frac{\pi}{2}=1 \quad , \quad \cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \ \Leftrightarrow \ a=0 \ \text{ili} \ b=0 \ \text{ili} \ a=b=0.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Trokute dijelimo:

- prema odnosu među duljinama stranica

$$\begin{cases}\text{raznostraničan trokut}\\ \text{jednakokračan trokut}\\ \text{jednakostraničan trokut}\end{cases}$$

- prema kutovima

$$\begin{cases}\text{šiljastokutan trokut}\\ \text{tupokutan trokut}\\ \text{pravokutan trokut.}\end{cases}$$

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\cos\gamma}{\cos\beta} \ /\cdot\sin\gamma\cdot\cos\beta \Rightarrow \sin\beta\cdot\cos\beta=\sin\gamma\cdot\cos\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\beta\cdot\cos\beta=\sin\gamma\cdot\cos\gamma \ /\cdot 2 \Rightarrow 2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta=2\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma \Rightarrow \sin(2\cdot\beta)=\sin(2\cdot\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(2\cdot\beta)-\sin(2\cdot\gamma)=0 \Rightarrow 2\cdot\sin\frac{2\cdot\beta-2\cdot\gamma}{2}\cdot\cos\frac{2\cdot\beta+2\cdot\gamma}{2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin\frac{2\cdot(\beta-\gamma)}{2}\cdot\cos\frac{2\cdot(\beta+\gamma)}{2}=0 \Rightarrow 2\cdot\sin\frac{2\cdot(\beta-\gamma)}{2}\cdot\cos\frac{2\cdot(\beta+\gamma)}{2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin(\beta-\gamma)\cdot\cos(\beta+\gamma)=0 \Rightarrow 2\cdot\sin(\beta-\gamma)\cdot\cos(\beta+\gamma)=0 \ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\beta-\gamma)\cdot\cos(\beta+\gamma)=0.$$

Raspravimo jednadžbu. Postoje tri mogućnosti.

- $$\left.\begin{matrix}\sin(\beta-\gamma)=0\\ \cos(\beta+\gamma)=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\beta-\gamma=0\\ \beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\beta=\gamma\\ \beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{trokut je jednakokračan pravokutan}$$

- $\left.\begin{array}{l}\sin(\beta-\gamma)=0\\ \cos(\beta+\gamma)\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \sin(\beta-\gamma)=0 \Rightarrow \beta-\gamma=0 \Rightarrow \beta=\gamma \Rightarrow$ trokut je jednakokračan
- $\left.\begin{array}{l}\sin(\beta-\gamma)\neq 0\\ \cos(\beta+\gamma)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\beta+\gamma)=0 \Rightarrow \beta+\gamma=\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ trokut je pravokutan.

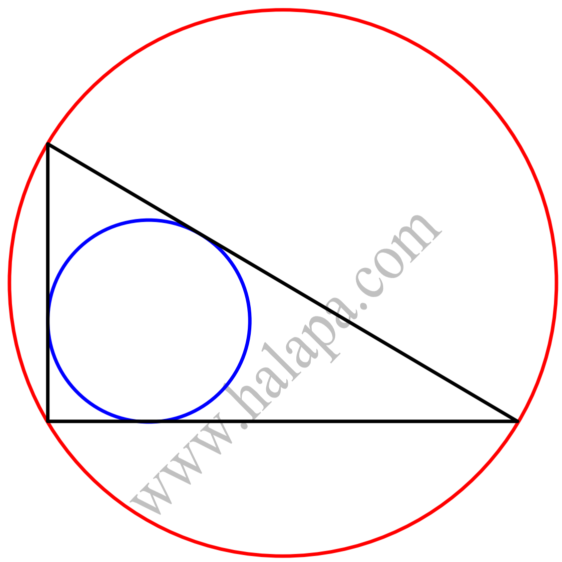
Vježba 355

Ako za kutove α i β trokuta vrijedi relacija $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, trokut je pravokutan ili jednakokračan. Dokažite!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 356 (Sonja, maturantica)

Katete su a i b. Promjer malog kruga je d, a velikog kruga D. Koliko je d + D?



$A.\ a+b$ $\quad B.\ 2\cdot(a+b)$ $\quad C.\ \frac{1}{2}\cdot(a+b)$ $\quad D.\ \sqrt{a\cdot b}$ $\quad E.\ \sqrt{a^2+b^2}$

Rješenje 356

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

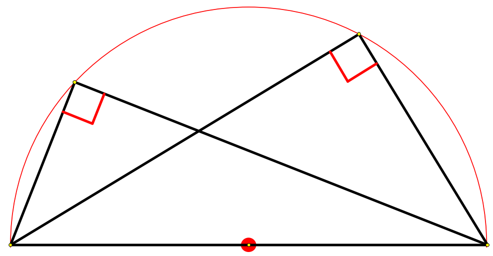
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Ako je zadan pravokutan trokut duljina kateta a i b i hipotenuze c, tada Pitagorin poučak glasi:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

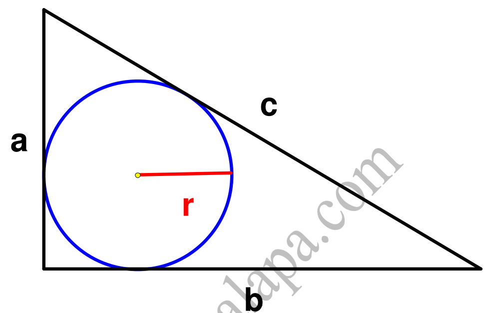
Talesov poučak

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.



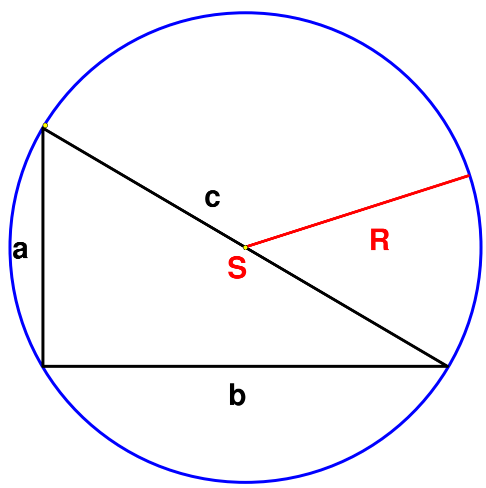
Ako je zadan pravokutan trokut duljina kateta a i b i hipotenuze c, tada je polumjer r upisane kružnice dan formulama

$$r = \frac{a \cdot b}{a+b+c} \quad , \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$



Kružnica opisana pravokutnom trokutu ima središte u polovištu hipotenuze, a polumjer je:

$$R = \frac{c}{2}.$$



Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Promjer kružnice:

$$d = 2 \cdot r.$$

1.inačica

$$d+D=2\cdot r+2\cdot R=2\cdot\left(r+R\right)=\left[\begin{array}{l} r=\dfrac{a\cdot b}{a+b+c} \\ R=\dfrac{c}{2} \end{array}\right]=2\cdot\left(\frac{a\cdot b}{a+b+c}+\frac{c}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{2\cdot a\cdot b+c\cdot\left(a+b+c\right)}{2\cdot\left(a+b+c\right)}=2\cdot\frac{2\cdot a\cdot b+c\cdot\left(a+b+c\right)}{2\cdot\left(a+b+c\right)}=\frac{2\cdot a\cdot b+c\cdot\left(a+b+c\right)}{a+b+c}=$$

$$=\frac{2\cdot a\cdot b+c\cdot a+c\cdot b+c^{2}}{a+b+c}=\left[c^{2}=a^{2}+b^{2}\right]=\frac{2\cdot a\cdot b+c\cdot a+c\cdot b+a^{2}+b^{2}}{a+b+c}=$$

$$=\frac{\left(a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}\right)+\left(c\cdot a+c\cdot b\right)}{a+b+c}=\frac{\left(a+b\right)^{2}+c\cdot\left(a+b\right)}{a+b+c}=\frac{\left(a+b\right)\cdot\left(a+b+c\right)}{a+b+c}=$$

$$=\frac{\left(a+b\right)\cdot\left(a+b+c\right)}{a+b+c}=a+b.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

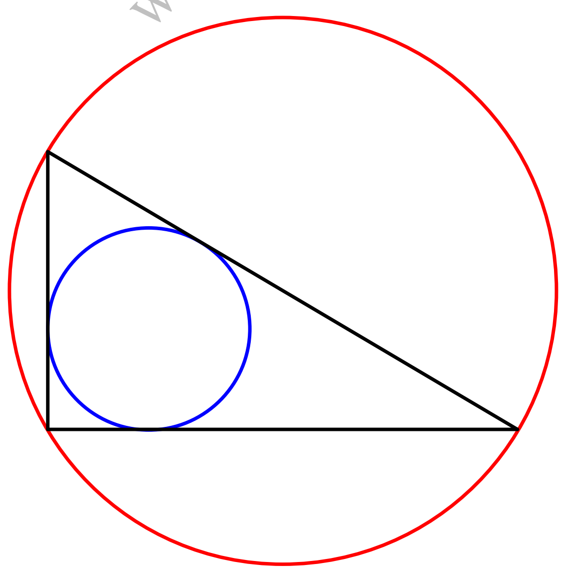
$$d+D=2\cdot r+2\cdot R=2\cdot\left(r+R\right)=\left[\begin{array}{l} r=\dfrac{a+b-c}{2} \\ R=\dfrac{c}{2} \end{array}\right]=2\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}+\frac{c}{2}\right)=2\cdot\frac{a+b-c+c}{2}=$$

$$=2\cdot\frac{a+b-c+c}{2}=a+b-c+c=a+b-c+c=a+b.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 356

Katete su 3 i 4. Promjer malog kruga je d, a velikog kruga D. Koliko je d + D?



$$A.\ 7 \qquad B.\ 14 \qquad C.\ \frac{7}{2} \qquad D.\ \sqrt{12} \qquad E.\ 5$$

Rezultat: A.

Zadatak 357 (Martin, tehnička škola)

U trokutu ABC čije su duljine stranica $|AB| = 12$ cm i $|BC| = 8$ cm težišnica iz vrha C okomita je na stranicu AC. Kolika je mjera kuta β u tome trokutu?

Rješenje 357

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

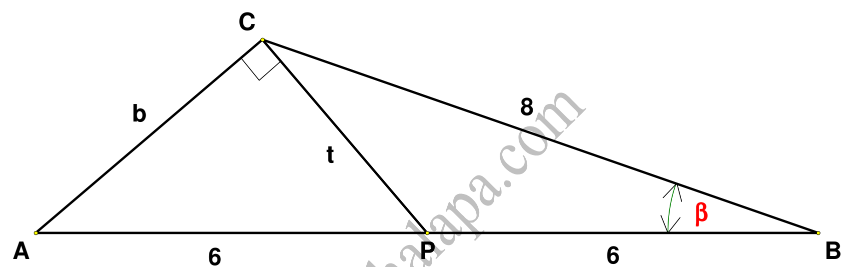
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$

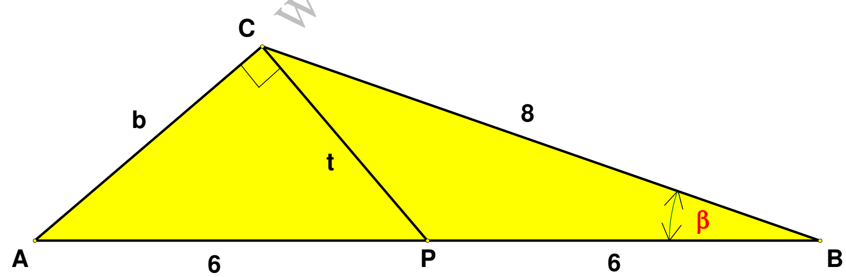
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$

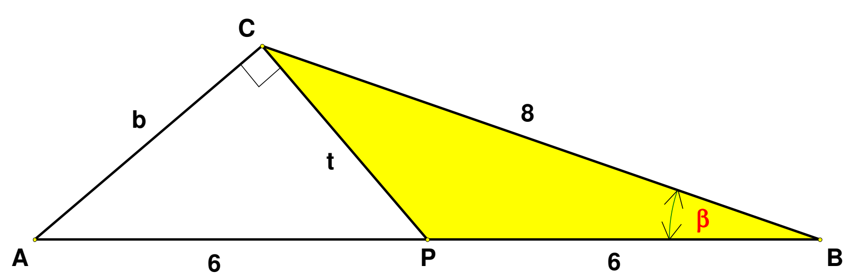
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 12 \;,\; |BC| = 8 \;,\; |AP| = |PB| = 6 \;,\; |CA| = b \;,\; |CP| = t \;,\; \angle ABC = \beta$$



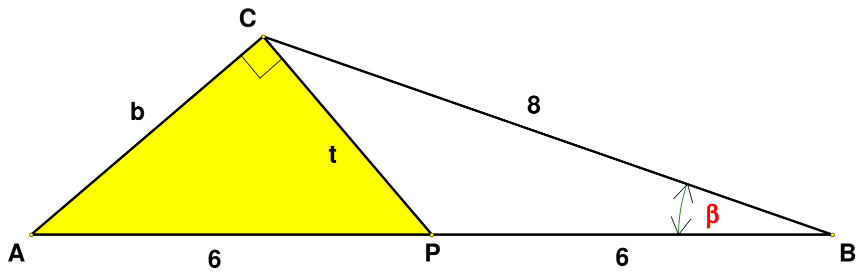


Uočimo trokute ΔBCA i ΔBCP i na njima uporabimo kosinusov poučak.

$$\left.\begin{array}{l} |CA|^2 = |CB|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |CB| \cdot |AB| \cdot \cos\beta \\ |CP|^2 = |CB|^2 + |PB|^2 - 2 \cdot |CB| \cdot |PB| \cdot \cos\beta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{rcases} b^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos\beta \\ t^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos\beta \end{rcases} \Rightarrow \begin{rcases} b^2 = 64 + 144 - 192 \cdot \cos\beta \\ t^2 = 64 + 36 - 96 \cdot \cos\beta \end{rcases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{rcases} b^2 = 208 - 192 \cdot \cos\beta \\ t^2 = 100 - 96 \cdot \cos\beta \end{rcases}.$$



Trokut PCA je pravokutan pa vrijedi Pitagorin poučak.

$$|AP|^2 = |PC|^2 + |CA|^2 \Rightarrow 6^2 = t^2 + b^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} t^2 = 100 - 96 \cdot \cos\beta \\ b^2 = 208 - 192 \cdot \cos\beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 = 100 - 96 \cdot \cos\beta + 208 - 192 \cdot \cos\beta \Rightarrow 96 \cdot \cos\beta + 192 \cdot \cos\beta = 100 + 208 - 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 288 \cdot \cos\beta = 272 \Rightarrow 288 \cdot \cos\beta = 272 \quad /:288 \Rightarrow \cos\beta = \frac{272}{288} \Rightarrow \cos\beta = \frac{272}{288} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{17}{18} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{17}{18}\right) \Rightarrow b = 19^\circ 11'17''.$$

Vježba 357

U trokutu ABC čije su duljine stranica | AB | = 24 cm i | BC | = 16 cm težišnica iz vrha C okomita je na stranicu AC. Kolika je mjera kuta β u tome trokutu?

Rezultat: 19º 11' 17''.

Zadatak 358 (Martin, srednja škola)

Ljestve dugačke 9.5 m, koso položene, dosežu do prozora kuće u visini 7.8 m. Prebačene s istog mjesta na suprotnu kuću dosežu do visine 5.2 m. Kolika je širina prolaza između kuća?

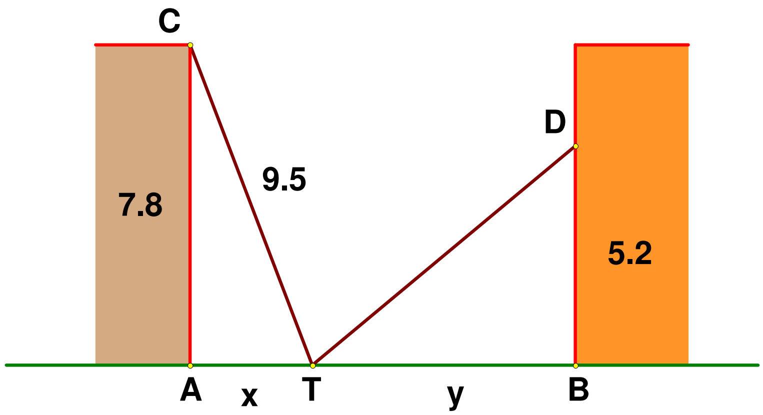
Rješenje 358

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|AC| = 7.8 \;\; , \;\; |TC| = |TD| = 9.5 \;\; , \;\; |AT| = x \;\; , \;\; |TB| = y \;\; , \;\; |BD| = 5.2$$

Budući da su trokuti ΔATC i ΔTBD pravokutni, uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} |AT|^2 = |TC|^2 - |AC|^2 \\ |TB|^2 = |TD|^2 - |BD|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |AT|^2 = |TC|^2 - |AC|^2 \;\; / \sqrt{\;} \\ |TB|^2 = |TD|^2 - |BD|^2 \;\; / \sqrt{\;} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} |AT| = \sqrt{|TC|^2 - |AC|^2} \\ |TB| = \sqrt{|TD|^2 - |BD|^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \sqrt{(9.5\ m)^2 - (7.8\ m)^2} \\ y = \sqrt{(9.5\ m)^2 - (5.2\ m)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5.42\ m \\ y = 7.95\ m \end{array}\right\}.$$

Širina prolaza između kuća je:

$$x + y = 5.42\ m + 7.95\ m \;\; \Rightarrow \;\; x + y = 13.37\ m.$$

Vježba 358

Ljestve dugačke 95 dm, koso položene, dosežu do prozora kuće u visini 78 dm. Prebačene s istog mjesta na suprotnu kuću dosežu do visine 52 dm. Kolika je širina prolaza između kuća?

Rezultat: 13.37 m.

Zadatak 359 (Asterix, gimnazija)

U pravokutnome je trokutu mjera jednoga kuta 67°. Koliki je omjer duljina hipotenuze i kraće katete toga trokuta?

Rješenje 359

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

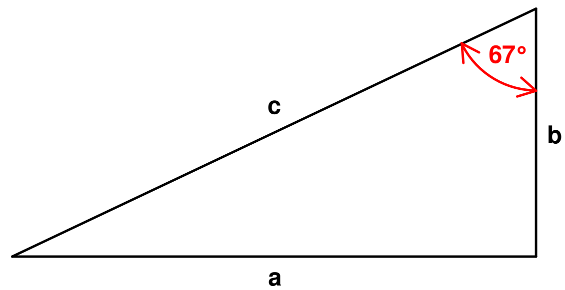
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

1.inačica



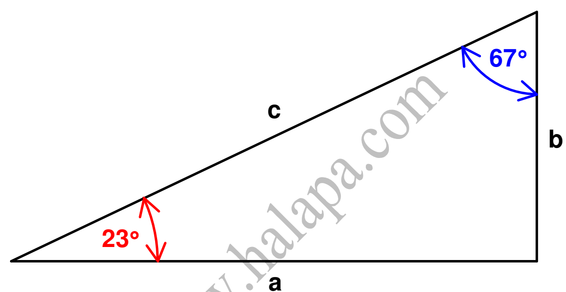
Kraća je b kateta pa slijedi:

$$\cos 67^{\circ} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \cos 67^{\circ} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\cos 67^{\circ}}{1} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos 67^{\circ}} \Rightarrow \frac{c}{b} = 2.56.$$

2.inačica

Drugi kut u pravokutnome trokutu iznosi:

$$90^{\circ} - 67^{\circ} = 23^{\circ}.$$



$$\sin 23^{\circ} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \sin 23^{\circ} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin 23^{\circ}}{1} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin 23^{\circ}} \Rightarrow \frac{c}{b} = 2.56.$$

Vježba 359

U pravokutnome je trokutu mjera jednoga kuta 23º. Koliki je omjer duljina hipotenuze i kraće katete toga trokuta?

Rezultat: 2.56.

Zadatak 360 (Asterix, gimnazija)

U trokutu ABC čije su duljine stranica $|AB| = 12$ cm i $|BC| = 8$ cm težišnica iz vrha C okomita je na stranicu AC. Kolika je mjera kuta β u tome trokutu?

Rješenje 360

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

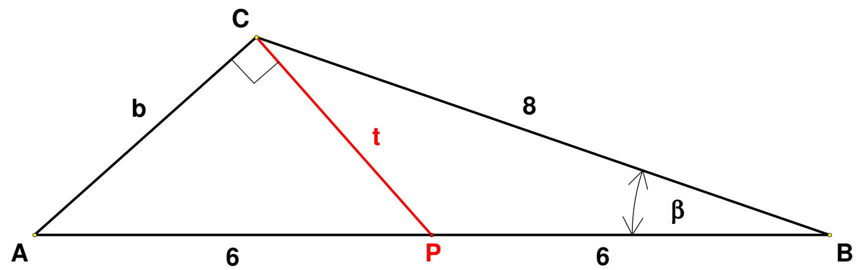
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

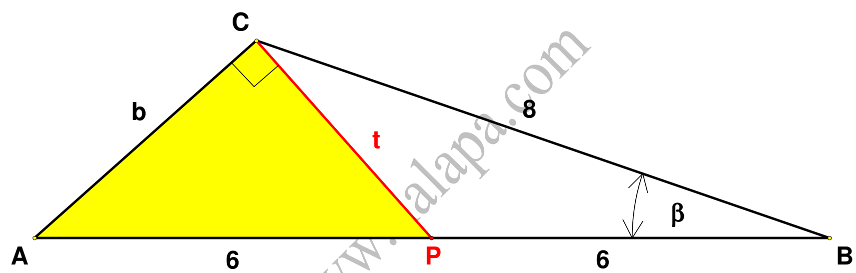
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



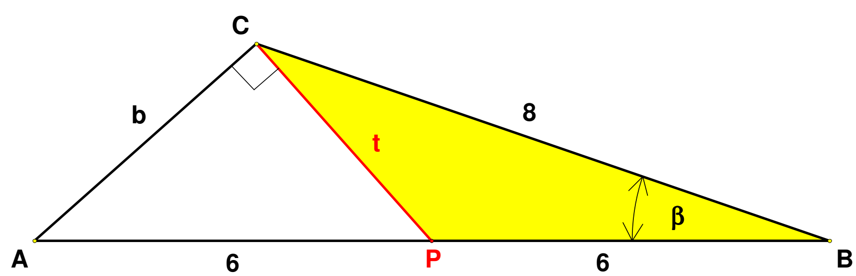
Sa slike vidi se:

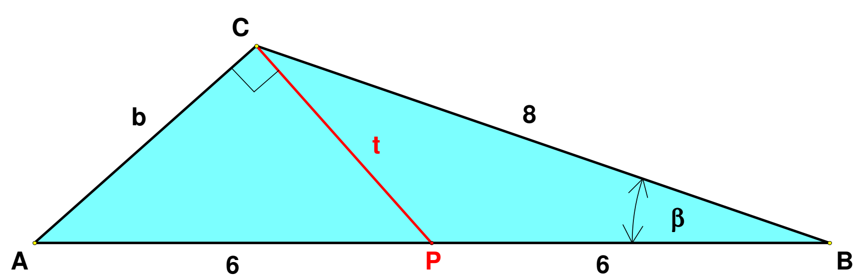
$$|AB| = 12 \ , \ |AP| = |PB| = 6 \ , \ |BC| = 8 \ , \ |CP| = t \ , \ |AC| = b$$



Budući da je trokut APC pravokutan (pravi kut je pri vrhu C), uporabit ćemo Pitagorin poučak:

$$|AP|^2 = |CP|^2 + |AC|^2 \ \Rightarrow \ 6^2 = t^2 + b^2 \ \Rightarrow \ t^2 + b^2 = 6^2 \ \Rightarrow \ t^2 + b^2 = 36.$$





Uočimo trokute ΔCPB i ΔABC i pomoću kosinusova poučka dobijemo:

- ΔCPB

$$|CP|^2 = |PB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|PB|\cdot|BC|\cdot\cos\beta \Rightarrow t^2 = 6^2 + 8^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = 36 + 64 - 96\cdot\cos\beta \Rightarrow t^2 = 100 - 96\cdot\cos\beta.$$

- ΔABC

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos\beta \Rightarrow b^2 = 12^2 + 8^2 - 2\cdot 12\cdot 8\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 144 + 64 - 192\cdot\cos\beta \Rightarrow b^2 = 208 - 192\cdot\cos\beta.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo cos β.

$$\left.\begin{array}{l} t^2 = 100 - 96\cdot\cos\beta \\ b^2 = 208 - 192\cdot\cos\beta \\ t^2 + b^2 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow 100 - 96\cdot\cos\beta + 208 - 192\cdot\cos\beta = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -96\cdot\cos\beta - 192\cdot\cos\beta = 36 - 100 - 208 \Rightarrow -288\cdot\cos\beta = -272 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -288\cdot\cos\beta = -272 \ /:(-288) \Rightarrow \cos\beta = \frac{272}{288} \Rightarrow \cos\beta = \frac{272}{288} \Rightarrow \cos\beta = \frac{17}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{17}{18}\right) \Rightarrow \beta = 19^\circ 11'17''.$$

Vježba 360

U trokutu ABC čije su duljine stranica | AB | = 24 cm i | BC | = 16 cm težišnica iz vrha C okomita je na stranicu AC. Kolika je mjera kuta β u tome trokutu?

Rezultat: 19º 11' 17".