Zadatak 321 (4A, 4B, TUPŠ)

Duljine stranica trokuta jesu 12.5 cm, 10 cm i 8.5 cm. Razlika duljina najdulje i najkraće stranice njemu sličnoga trokuta iznosi 4.8 cm. Kolika je duljina treće stranice (stranice srednje duljine) sličnoga trokuta?

$A.\ 8.3\ cm \qquad B.\ 9\ cm \qquad C.\ 10.8\ cm \qquad D.\ 12\ cm$

Rješenje 321

Ponovimo!

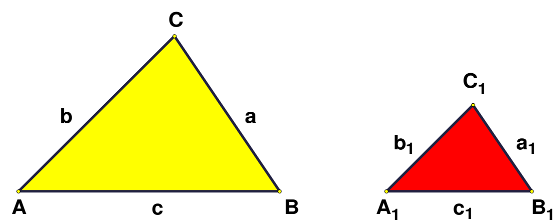
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1\ ,\ \beta=\beta_1\ ,\ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

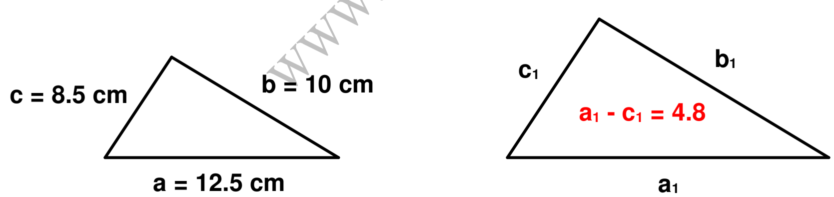
Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dekadske jedinice su brojevi koji se dobiju množenjem broja 10 samim sobom. Dekadske jedinice su brojevi: 10, 100, 1000, 10000, 100000 itd. Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom tako da decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadski broj ima nula.



1.inačica

Razlika duljina najdulje i najkraće stranice sličnog trokuta je 4.8 pa vrijedi jednadžba:

$$a_1-c_1=4.8 \Rightarrow a_1=4.8+c_1.$$

Iz sličnosti trokuta dobije se:

$$\frac{c_1}{c}=\frac{a_1}{a} \Rightarrow \begin{bmatrix} c=8.5 \\ a_1=4.8+c_1 \\ a=12.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{c_1}{8.5}=\frac{4.8+c_1}{12.5} \Rightarrow \frac{c_1}{8.5}=\frac{4.8+c_1}{12.5}\ /\cdot 8.5\cdot 12.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12.5\cdot c_1=8.5\cdot(4.8+c_1) \Rightarrow 12.5\cdot c_1=40.8+8.5\cdot c_1 \Rightarrow 12.5\cdot c_1-8.5\cdot c_1=40.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot c_1=40.8 \Rightarrow 4\cdot c_1=40.8\ /:4 \Rightarrow c_1=10.2\ cm.$$

Računamo duljinu stranice b_1 uporabom sličnosti trokuta.

$$\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c} \Rightarrow \frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c} \; / \cdot b \Rightarrow b_1=b\cdot\frac{c_1}{c} \Rightarrow \begin{bmatrix} b=10\ cm \\ c_1=10.2\ cm \\ c=8.5\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow b_1=10\cdot\frac{10.2}{8.5} \Rightarrow b_1=12\ cm.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Budući da su trokuti slični, vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} \frac{a_1}{a}=k \\ \frac{c_1}{c}=k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{a_1}{a}=k \; / \cdot a \\ \frac{c_1}{c}=k \; / \cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=k\cdot a \\ c_1=k\cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ a_1-c_1=4.8 \end{bmatrix} \Rightarrow k\cdot a-k\cdot c=4.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\cdot(a-c)=4.8 \Rightarrow \begin{bmatrix} a=12.5\ cm \\ c=8.5\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow k\cdot(12.5-8.5)=4.8 \Rightarrow 4\cdot k=4.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot k=4.8 \; / : 4 \Rightarrow k=1.2.$$

Računamo duljinu stranice b_1 uporabom sličnosti trokuta.

$$\frac{b_1}{b}=k \Rightarrow \frac{b_1}{b}=k \; / \cdot b \Rightarrow b_1=k\cdot b \Rightarrow \begin{bmatrix} k=1.2 \\ b=10\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow b_1=1.2\cdot 10 \Rightarrow b_1=12\ cm.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 321

Duljine stranica trokuta jesu 125 mm, 100 mm i 85 mm. Razlika duljina najdulje i najkraće stranice njemu sličnoga trokuta iznosi 48 mm. Kolika je duljina treće stranice (stranice srednje duljine) sličnoga trokuta?

$A.\ 8.3\ cm \qquad B.\ 9\ cm \qquad C.\ 10.8\ cm \qquad D.\ 12\ cm$

Rezultat: D.

Zadatak 322 (Azra, medicinska škola)

Ljestve duge 3 metra prislonjene su jednim krajem uza zid, tako da sa njim zatvaraju kut 29.5°. Naći visinu na kojoj ljestve dodiruju taj zid.

$A.\ 2.6\ m \qquad B.\ 2.2\ m \qquad C.\ 2.1\ m \qquad D.\ 1.8\ m \qquad E.\ 1.6\ m$

Rješenje 322

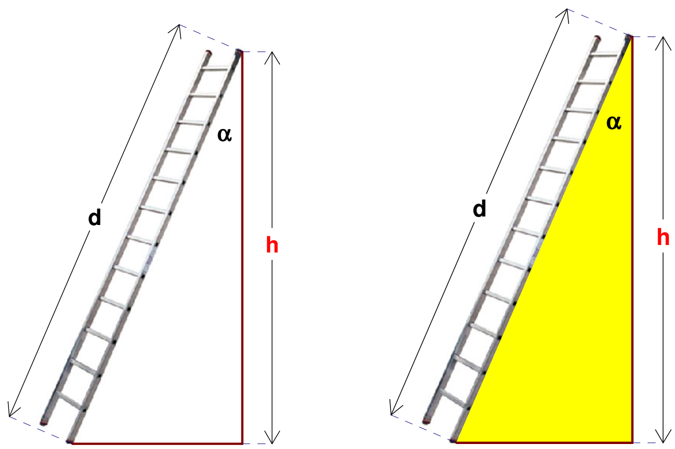
Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Uočimo pravokutan trokut čija je duljina hipotenuze duljina ljestava d, a duljina katete duljina visine zida h. Pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos\alpha=\frac{h}{d} \Rightarrow \frac{h}{d}=\cos\alpha \Rightarrow \frac{h}{d}=\cos\alpha \; / \cdot d \Rightarrow h=d\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} d=3\ m \\ \alpha=29.5^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow h=3\ m\cdot\cos 29.5^\circ \Rightarrow h=2.6\ m.$$

Odgovor je pod A.



Vježba 322

Ljestve duge 4 m prislonjene su jednim krajem uza zid, tako da sa njim zatvaraju kut 29.5°. Naći visinu na kojoj ljestve dodiruju taj zid.

$A.\ 2.9\ m$ $B.\ 3.24\ m$ $C.\ 3.48\ m$ $D.\ 4.8\ m$ $E.\ 4.96\ m$

Rezultat: C.

Zadatak 323 (4A, 4B, TUPŠ)

Izračunati ploštinu trokuta ABC ako su zadani njegovi vrhovi: A(– 1, 2), B(6, – 7), C(2, – 8).

Rješenje 323

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b},$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine.
Ako su poznate koordinate vrhova trokuta $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ njegova ploština može se izračunati po jednoj od formula:

- $$P=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|$$
- $$P=\frac{1}{2}\cdot\left|y_1\cdot\left(x_2-x_3\right)+y_2\cdot\left(x_3-x_1\right)+y_3\cdot\left(x_1-x_2\right)\right|.$$

Apsolutna vrijednost osigurava da ploština bude pozitivna. Treba paziti na cikličku izmjenu indeksa u formulama: 1, 2, 3 → 2, 3, 1 → 3, 1, 2.

1.inačica

$$\left.\begin{aligned} A\left(x_1, y_1\right)&=A(-1, 2) \\ B\left(x_2, y_2\right)&=B(6, -7) \\ C\left(x_3, y_3\right)&=C(2, -8) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[P=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|-1\cdot(-7-(-8))+6\cdot(-8-2)+2\cdot(2-(-7))\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|-1\cdot(-7+8)+6\cdot(-10)+2\cdot(2+7)\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|-1\cdot 1+6\cdot(-10)+2\cdot 9\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|-1-60+18\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|-43\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot 43 \Rightarrow P=\frac{43}{2}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1)=A(-1, 2) \\ B(x_2, y_2)=B(6, -7) \\ C(x_3, y_3)=C(2, -8) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P=\frac{1}{2}\cdot\left| y_1\cdot(x_2-x_3)+y_2\cdot(x_3-x_1)+y_3\cdot(x_1-x_2)\right| \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|2\cdot(6-2)-7\cdot(2-(-1))-8\cdot(-1-6)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|2\cdot 4-7\cdot(2+1)-8\cdot(-7)\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|8-7\cdot 3+56\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|8-21+56\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|43\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot 43 \Rightarrow P=\frac{43}{2}.$$

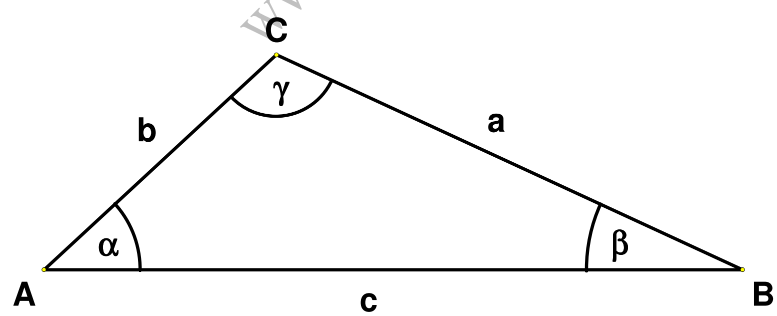
Vježba 323

Izračunati ploštinu trokuta ABC ako su zadani njegovi vrhovi: A(– 2, – 1), B(7, 6), C(8, 2).

Rezultat: $P=\frac{43}{2}.$

Zadatak 324 (4A, 4B, TUPŠ)

U trokutu ABC sa slike omjer kutova je α : β : γ = 3 : 2 : 13. Za duljine stranica vrijedi a – b = 3 cm.



Kolika je duljina najkraće stranice toga trokuta?

$A.\ 2.19\ cm \qquad B.\ 4.23\ cm \qquad C.\ 6.49\ cm \qquad D.\ 8.92\ cm$

Rješenje 324

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Podsjetimo se poučka o sinusima.
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1:b_1=k$$
$$a_2:b_2=k$$
$$a_3:b_3=k$$
$$\ldots$$
$$a_n:b_n=k,$$

produženi razmjer je

$$a_1:a_2:a_3:\ldots:a_n=b_1:b_2:b_3:\ldots:b_n.$$

Zbroj kutova u trokutu je 180° pa iz produženog razmjera najprije izračunamo mjere svih triju kutova trokuta.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha:\beta:\gamma=3:2:13\\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k\\ \text{koeficijent}\\ \text{proporcionalnosti}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=3\cdot k\\ \beta=2\cdot k\\ \gamma=13\cdot k\\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3\cdot k+2\cdot k+13\cdot k=180^\circ\ \Rightarrow\ 18\cdot k=180^\circ\ \Rightarrow\ 18\cdot k=180^\circ\ /:18\ \Rightarrow\ k=10^\circ.$$

Mjere kutova su:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=3\cdot k\\ \beta=2\cdot k\\ \gamma=13\cdot k\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\ k=10^\circ\ \right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=3\cdot10^\circ\\ \beta=2\cdot10^\circ\\ \gamma=13\cdot10^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=30^\circ\\ \beta=20^\circ\\ \gamma=130^\circ\end{array}\right\}.$$

Kut β je najmanji. Budući da se nasuprot najmanjeg kuta u svakom trokutu nalazi najkraća stranica, stranica b je najkraća stranica trokuta ABC. Uporabom sinusovog poučka i uvjeta iz zadatka dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}\\ a-b=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}\ /\cdot\sin\alpha\\ a-b=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=b\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\\ a-b=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-b=3\ \Rightarrow\ b\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-1\right)=3\ \Rightarrow\ b\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-\frac{1}{1}\right)=3\ \Rightarrow\ b\cdot\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\beta}=3\ \Rightarrow$$

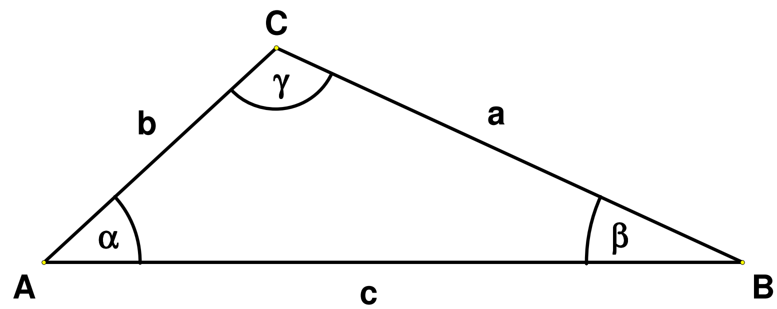
$$\Rightarrow \; b \cdot \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\beta} = 3 \;/\cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \;\Rightarrow\; b = 3 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; b = 3 \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ - \sin 20^\circ} \;\Rightarrow\; b = 6.49 \; cm.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 324

U trokutu ABC sa slike omjer kutova je α : β : γ = 6 : 4 : 26. Za duljine stranica vrijedi a – b = 3 cm.



Kolika je duljina najkraće stranice toga trokuta?

$A.\ 2.19\ cm \qquad B.\ 4.23\ cm \qquad C.\ 6.49\ cm \qquad D.\ 8.92\ cm$

Rezultat: C.

Zadatak 325 (Josip, gimnazija)

Zadan je trokut ABC ploštine 35 cm^2. Točka Q dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru 2 : 5. Kroz točku Q povučene su paralele s ostalim dvjema stranicama trokuta čime je trokut podijeljen na dva trokuta i paralelogram. Koliko iznosi ploština manjega od tako dobivenih trokuta.

Rješenje 325

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \;\text{ ili }\; \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

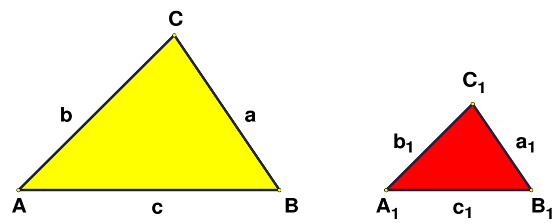
a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



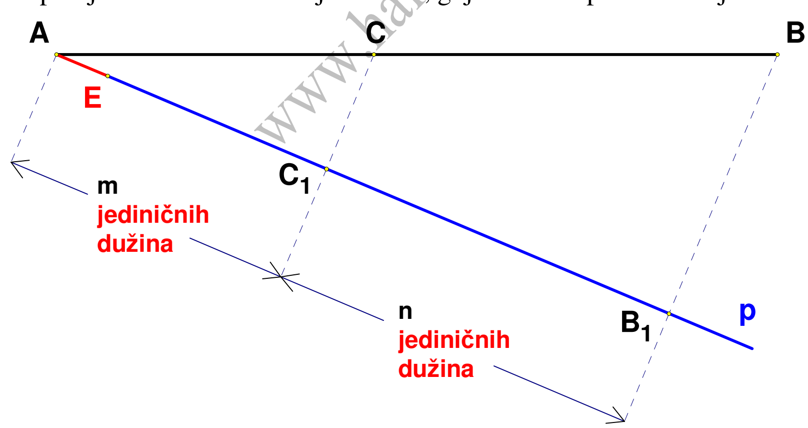
Neka su trokuti ABC i $A_1B_1C_1$ slični uz koeficijent sličnosti k:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

Svi elementi trokuta $A_1B_1C_1$ (težišnice, simetrale kutova, visine, polumjeri opisane i upisane kružnice) razmjerni (proporcionalni) su odgovarajućim elementima trokuta ABC uz isti faktor razmjernosti (proporcionalnosti) k. Dakle, odgovarajuće visine sličnih trokuta odnose se kao odgovarajuće stranice.

Dijeljenje dužine u zadanom omjeru

Kako dužinu $\overline{AB}$ podijeliti točkom C u omjeru m : n, gdje su m i n prirodni brojevi?



Povucimo točkom A polupravac p. Izaberemo jediničnu dužinu $\overline{AE}$ koju nanesemo m puta tako da je

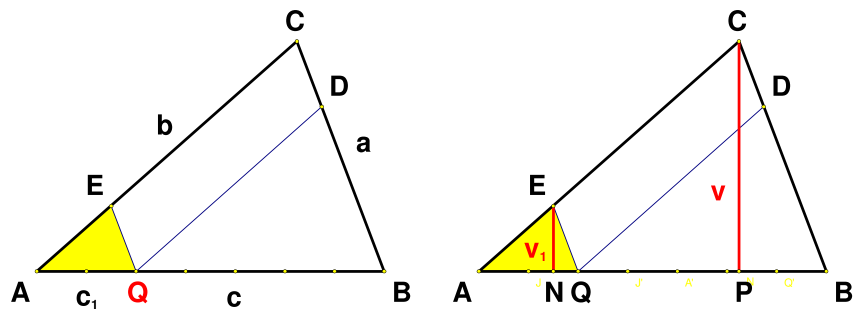
$$\left|AC_1\right| = m \cdot \left|AE\right|.$$

Nanesemo je sad još n puta tako da je

$$\left|C_1B_1\right| = n \cdot \left|AE\right|.$$

Povucimo pravac B_1B i paralelu točkom C_1 s tim pravcem. Neka ta paralela siječe $\overline{AB}$ u točki C, a to je tražena točka pa vrijedi:

$$\frac{\left|AC\right|}{\left|CB\right|} = \frac{m}{n}.$$



Sa slika vidi se:

$$\left|AB\right| = c \;,\; \left|BC\right| = a \;,\; \left|CA\right| = b \;,\; \left|AQ\right| = c_1 \;,\; \left|EN\right| = v_1 \;,\; \left|CP\right| = v$$

Budući da točka Q dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru 2 : 5, vrijedi:

$$\left|AQ\right| = \frac{2}{7}\cdot\left|AB\right| \Rightarrow c_1 = \frac{2}{7}\cdot c \quad , \quad \left|EN\right| = \frac{2}{7}\cdot\left|CP\right| \Rightarrow c_1 = \frac{2}{7}\cdot c.$$

Ploštine trokuta su:

- ploština trokuta AQE

$$P_1 = \frac{\left|AQ\right|\cdot\left|EN\right|}{2} \Rightarrow P_1 = \frac{c_1\cdot v_1}{2}$$

- ploština trokuta ABC

$$P = \frac{\left|AB\right|\cdot\left|CP\right|}{2} \Rightarrow P = \frac{c\cdot v}{2}.$$

Sada lako izračunamo ploštinu P_1.

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \dfrac{c_1\cdot v_1}{2} \\ P = \dfrac{c\cdot v}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{\dfrac{c_1\cdot v_1}{2}}{\dfrac{c\cdot v}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{\dfrac{c_1\cdot v_1}{2}}{\dfrac{c\cdot v}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{c_1\cdot v_1}{c\cdot v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} c_1 = \dfrac{2}{7}\cdot c \\ v_1 = \dfrac{2}{7}\cdot v \end{array}\right] \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{\dfrac{2}{7}\cdot c\cdot\dfrac{2}{7}\cdot v}{c\cdot v} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{\dfrac{2}{7}\cdot c\cdot\dfrac{2}{7}\cdot v}{c\cdot v} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{4}{49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{4}{49} \;/\cdot P \Rightarrow P_1 = \frac{4}{49}\cdot P \Rightarrow \left[P = 35\ cm^2\right] \Rightarrow P_1 = \frac{4}{49}\cdot 35\ cm^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{4}{49}\cdot 35\ cm^2 \Rightarrow P_1 = \frac{4}{7}\cdot 5\ cm^2 \Rightarrow P_1 = \frac{20}{7}\ cm^2.$$

Vježba 325

Zadan je trokut ABC ploštine 21 cm^2. Točka Q dijeli stranicu $\overline{AB}$ u omjeru 2 : 5. Kroz točku Q povučene su paralele s ostalim dvjema stranicama trokuta čime je trokut podijeljen na dva trokuta i paralelogram. Koliko iznosi ploština manjega od tako dobivenih trokuta.

Rezultat: $\frac{12}{7}\ cm^2.$

Zadatak 326 (Ante, srednja škola)

Duljine stranica trokuta jednake su $n^2 + n + 1$, $2 \cdot n + 1$ i $n^2 - 1$, gdje je n realan broj veći od 1. Koliki je kut nasuprot stranici duljine $n^2 + n + 1$?

Rješenje 326

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Neka je:

$$a = n^2 + n + 1 \quad , \quad b = 2 \cdot n + 1 \quad , \quad c = n^2 - 1.$$

Uočimo da je stranica a najveća stranica u trokutu. Najveći kut trokuta nalazi se nasuprot najvećoj stranici, a to je duljina $a = n^2 + n + 1$. I sad računamo:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{(2 \cdot n + 1)^2 + \left(n^2 - 1\right)^2 - \left(n^2 + n + 1\right)^2}{2 \cdot (2 \cdot n + 1) \cdot \left(n^2 - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 + n^4 - 2 \cdot n^2 + 1 - \left(n^4 + n^2 + 1 + 2 \cdot n^3 + 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n\right)^2}{2 \cdot \left(2 \cdot n^3 - 2 \cdot n + n^2 - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 + n^4 - 2 \cdot n^2 + 1 - n^4 - n^2 - 1 - 2 \cdot n^3 - 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n}{2 \cdot \left(2 \cdot n^3 + n^2 - 2 \cdot n - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 + n^4 - 2 \cdot n^2 + 1 - n^4 - n^2 - 1 - 2 \cdot n^3 - 2 \cdot n^2 - 2 \cdot n}{2 \cdot \left(2 \cdot n^3 + n^2 - 2 \cdot n - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4 \cdot n + 1 - n^2 - 2 \cdot n^3 - 2 \cdot n}{2 \cdot \left(2 \cdot n^3 + n^2 - 2 \cdot n - 1\right)} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-2 \cdot n^3 - n^2 + 2 \cdot n + 1}{2 \cdot \left(2 \cdot n^3 + n^2 - 2 \cdot n - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-\left(2 \cdot n^3 + n^2 - 2 \cdot n - 1\right)}{2 \cdot \left(2 \cdot n^3 + n^2 - 2 \cdot n - 1\right)} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-\left(2 \cdot n^3 + n^2 - 2 \cdot n - 1\right)}{2 \cdot \left(2 \cdot n^3 + n^2 - 2 \cdot n - 1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 120^\circ.$$

Vježba 326

Duljine stranica trokuta jednake su $n \cdot (n + 1) + 1$, $2 \cdot n + 1$ i $n^2 - 1$, gdje je n realan broj veći od 1. Koliki je kut nasuprot stranici duljine $n^2 + n + 1$?

Rezultat: 120°.

Zadatak 327 (Dario, tehnička škola)

Brod napušta luku i plovi prema jugoistoku pod kutom 65° u odnosu na istok. Nakon prijeđenih 1.8 km kapetan zaustavlja brod. Poslije kratkog zastoja brod nastavlja plovidbu i prijeđe 1.1 km ploveći prema sjeveroistoku pod kutom 15 ° u odnosu na istok. Koristeći se razlaganjem vektora na komponente nađite ukupni pomak broda.

Rješenje 327

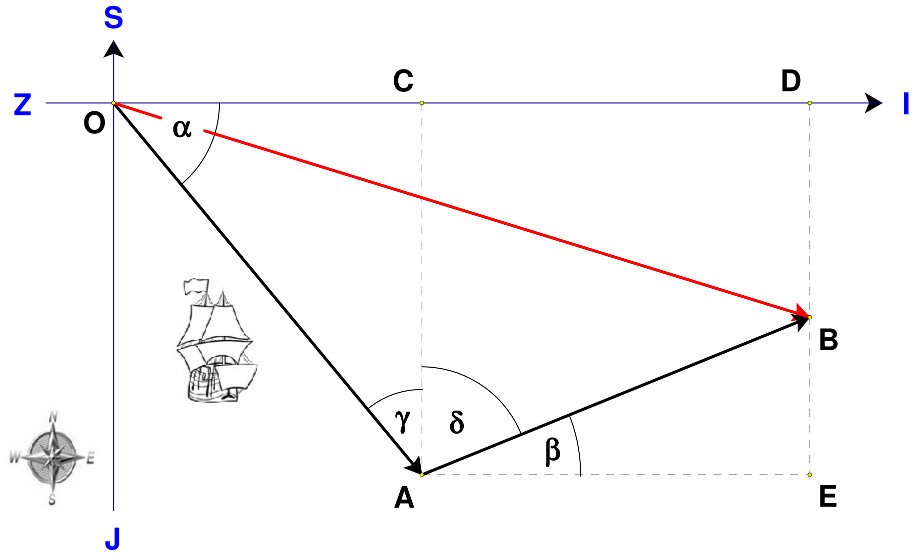
Ponovimo!

Pomak je najkraća udaljenost između dvije točke staze tijela. To je vektorska veličina.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta. Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^0.$$

Dva su kuta komplementna ako im je zbroj jednak 90°.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



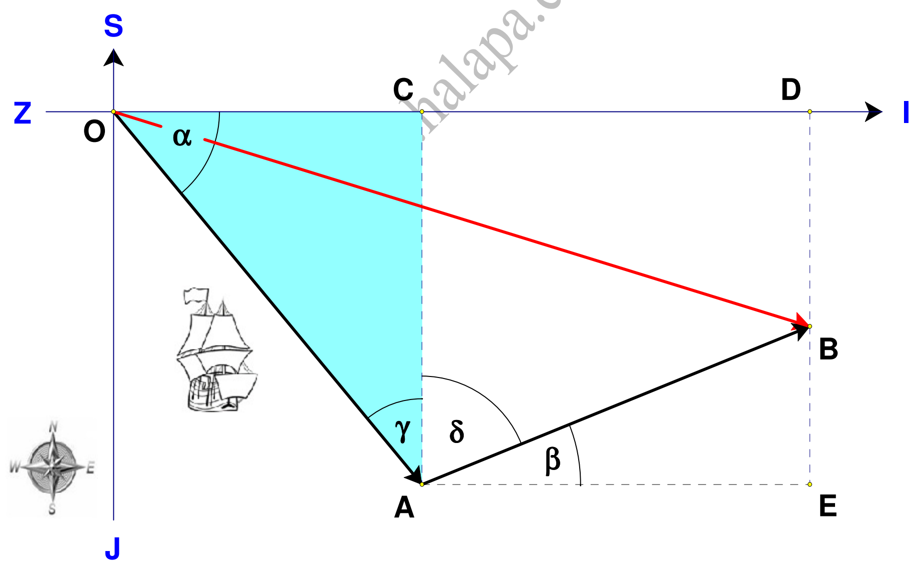
Sa slike vidi se:

$$\angle COA = \alpha = 65^\circ \ , \ \left|OA\right| = 1.8 \ km \ , \ \left|AB\right| = 1.1 \ km \ , \ \angle BAE = \beta = 15^\circ$$

$$\left|CA\right| = \left|DE\right| \ , \ \left|CD\right| = \left|AE\right|$$

$$\angle OAC = \gamma = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ \ , \ \angle CAB = \delta = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

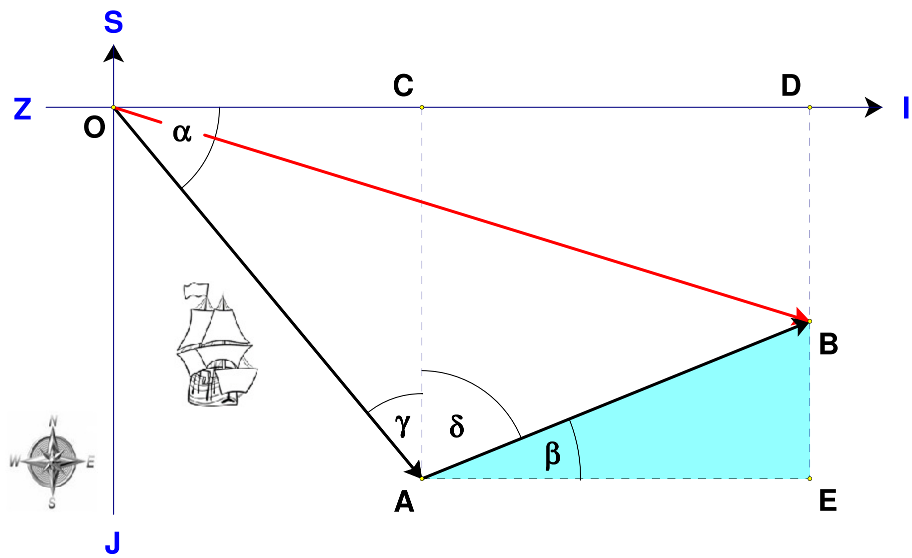
1.inačica



Uočimo pravokutan trokut OAC i odredimo duljine komponenata |OC| i |CA| vektora $\overrightarrow{OA}$.

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\left|OC\right|}{\left|OA\right|} \\ \sin\alpha = \dfrac{\left|CA\right|}{\left|OA\right|} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\left|OC\right|}{\left|OA\right|} \ / \cdot \left|OA\right| \\ \sin\alpha = \dfrac{\left|CA\right|}{\left|OA\right|} \ / \cdot \left|OA\right| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|OC\right| = \left|OA\right| \cdot \cos\alpha \\ \left|CA\right| = \left|OA\right| \cdot \sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|OC\right| = 1.8 \ km \cdot \cos 65^\circ \\ \left|CA\right| = 1.8 \ km \cdot \sin 65^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|OC\right| = 0.76 \ km \\ \left|CA\right| = 1.63 \ km \end{array}\right\}.$$



Uočimo pravokutan trokut AEB i odredimo duljine komponenata $|AE|$ i $|BE|$ vektora $\vec{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\beta=\dfrac{|AE|}{|AB|}\\[2ex] \sin\beta=\dfrac{|BE|}{|AB|}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\cos\beta=\dfrac{|AE|}{|AB|}\ /\cdot|AB|\\[2ex] \sin\beta=\dfrac{|BE|}{|AB|}\ /\cdot|AB|\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AE|=|AB|\cdot\cos\beta\\ |BE|=|AB|\cdot\sin\beta\end{array}\right\}\Rightarrow$$

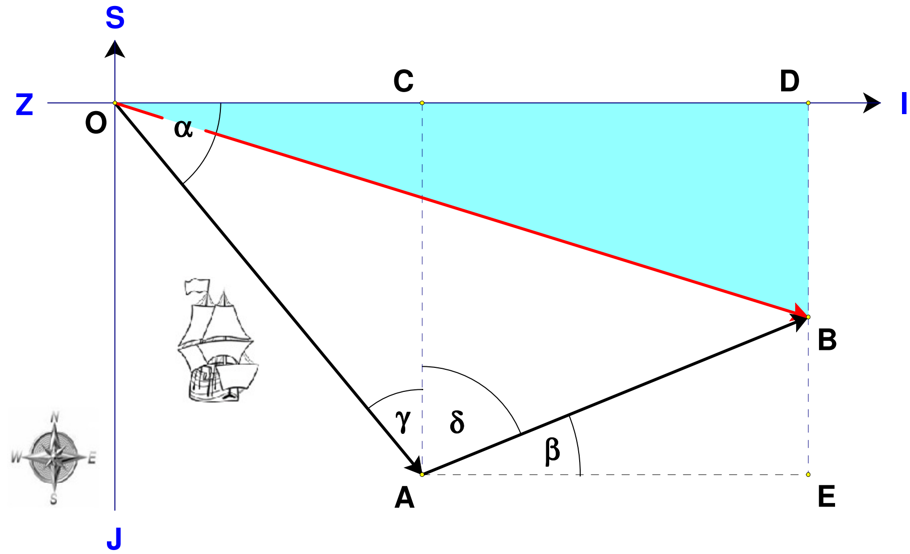
$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AE|=1.1\ km\cdot\cos 15^\circ\\ |BE|=1.1\ km\cdot\sin 15^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|AE|=1.06\ km\\ |BE|=0.28\ km\end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l}|OD|=|OC|+|CD|\\ |DB|=|DE|-|BE|\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|CD|=|AE|\\ |DE|=|CA|\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|OD|=|OC|+|AE|\\ |DB|=|CA|-|BE|\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|OD|=0.76\ km+1.06\ km\\ |DB|=1.63\ km-0.28\ km\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|OD|=1.82\ km\\ |DB|=1.35\ km\end{array}\right\}.$$

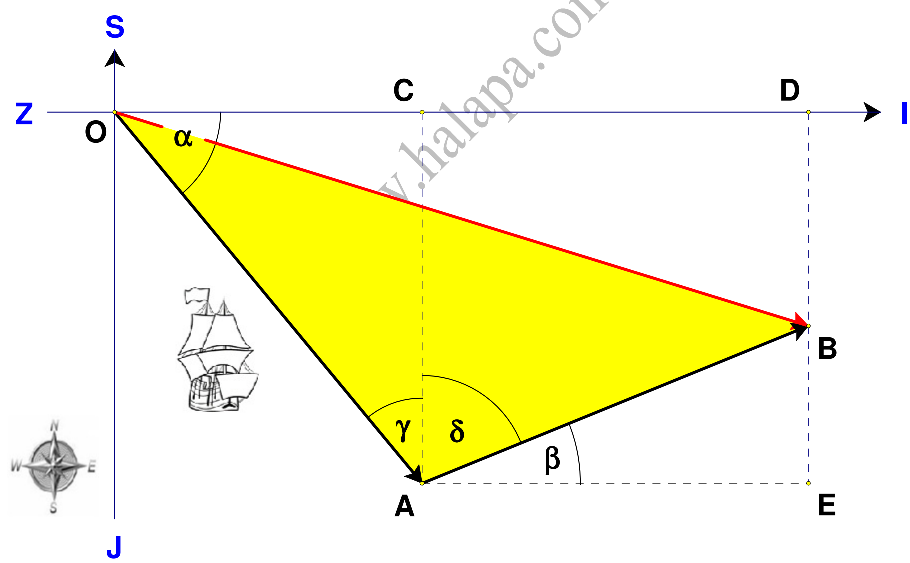
Uočimo pravokutan trokut OBD i pomoću Pitagorina poučka izračunamo pomak broda $|OB|$.



$$|OB|^2 = |OD|^2 + |DB|^2 \Rightarrow |OB|^2 = |OD|^2 + |DB|^2 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OB| = \sqrt{|OD|^2 + |DB|^2} \Rightarrow |OB| = \sqrt{(1.82\ km)^2 + (1.35\ km)^2} \Rightarrow |OB| = 2.27\ km.$$

2.inačica



U trokutu OAB duljina stranice $|OB|$ je pomak broda. Iz poučka o kosinusu imamo

$$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |AB| \cdot \cos(\gamma + \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |AB| \cdot \cos(\gamma + \delta) \; / \sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OB| = \sqrt{|OA|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |OA| \cdot |AB| \cdot \cos(\gamma + \delta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OB| = \sqrt{(1.8\ km)^2 + (1.1\ km)^2 - 2 \cdot 1.8\ km \cdot 1.1\ km \cdot \cos(25^\circ + 75^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OB| = \sqrt{(1.8\ km)^2 + (1.1\ km)^2 - 2 \cdot 1.8\ km \cdot 1.1\ km \cdot \cos 100^\circ} \Rightarrow |OB| = 2.27\ km.$$

Vježba 327

Brod napušta luku i plovi prema sjeveroistoku pod kutom 65° u odnosu na istok. Nakon prijeđenih 1.8 km kapetan zaustavlja brod. Poslije kratkog zastoja brod nastavlja plovidbu i prijeđe 1.1 km ploveći prema jugoistoku pod kutom 15 ° u odnosu na istok. Koristeći se razlaganjem vektora na komponente nađite ukupni pomak broda.

Rezultat: 2.27 km.

Zadatak 328 (Ivana, gimnazija)

Dan je trokut sa stranicama 13 cm, 14 cm i 15 cm. Kružnica ima središte na stranici duljine 14 cm i dira ostale dvije stranice. Koliki je polumjer te kružnice?

Rješenje 328

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \; , \; a \ge 0 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\sqrt[n]{a^{n \cdot m}} = a^m.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O = a + b + c.$$

Poluopseg trokuta je:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \frac{O}{2}.$$

Ploština trokuta ΔABC kojemu su zadane duljine stranica a, b, c računa se pomoću Heronove formule

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \; , \; s = \frac{a+b+c}{2} - \text{poluopseg trokuta}.$$

Broj b je višekratnik prirodnog broja a ako postoji takav prirodan broj k da vrijedi

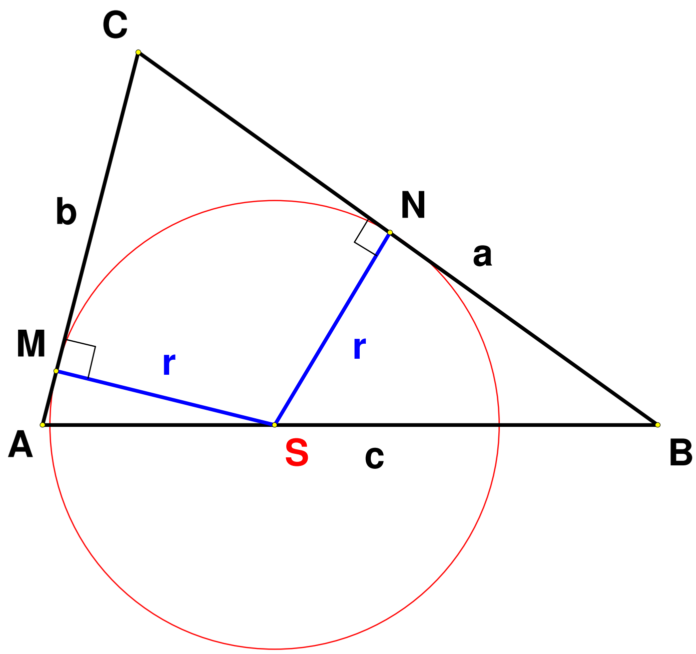
$$b = k \cdot a.$$

Za prirodni broj b kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem a ako je

$$b = k \cdot a \; , \; k \in N,$$

tj. ako je broj b višekratnik broja a.
Prirodni brojevi koji su djeljivi samo sa 1 i sa samim sobom zovu se prosti ili prim brojevi.
Brojevi koji imaju više od dva djelitelja su složeni brojevi.
Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \ne 0 \; , \; n \ne 1.$$

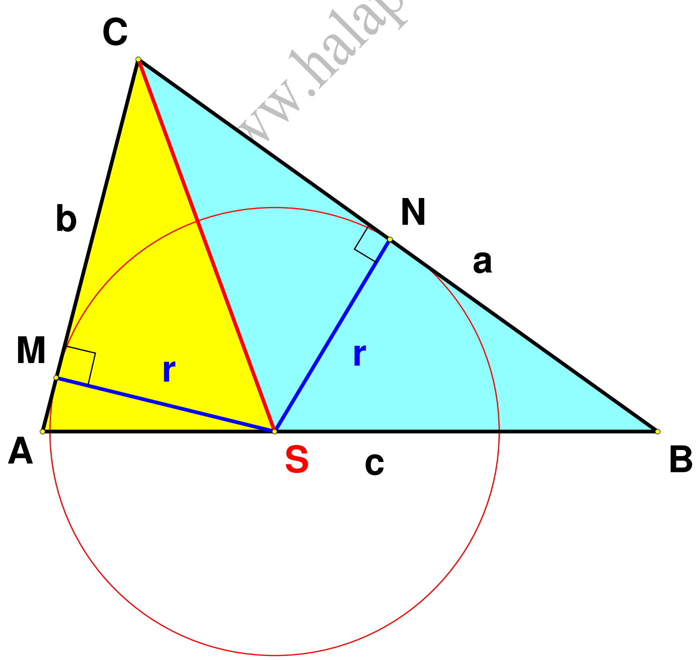


Sa slike vidi se:

$$|AB| = c = 14\ cm\ \ ,\ \ |BC| = a = 15\ cm\ \ ,\ \ |CA| = b = 13\ cm\ \ ,\ \ |SN| = |SM| = r$$

Uočimo da je ploština trokuta ABC jednaka zbroju ploština trokuta ΔASC i ΔSBC.

$$P_{ABC} = P_{ASC} + P_{SBC}.$$



Ploštinu trokuta ABC izračunamo pomoću Heronove formule.

$$\left.\begin{array}{l} a = 15\ \ ,\ \ b = 13\ \ ,\ \ c = 14 \\ s = \dfrac{a+b+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 15\ \ ,\ \ b = 13\ \ ,\ \ c = 14 \\ s = \dfrac{15+13+14}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 15\ \ ,\ \ b = 13\ \ ,\ \ c = 14 \\ s = \dfrac{42}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=15 \ , \ b=13 \ , \ c=14 \\ s=\frac{42}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=15 \ , \ b=13 \ , \ c=14 \\ s=21 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[P_{ABC}=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \right] \Rightarrow P_{ABC}=\sqrt{21\cdot(21-15)\cdot(21-13)\cdot(21-14)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC}=\sqrt{21\cdot 6\cdot 8\cdot 7} \Rightarrow P_{ABC}=\sqrt{3\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3\cdot 7} \Rightarrow P_{ABC}=\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 2^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC}=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{2^4} \Rightarrow P_{ABC}=3\cdot 7\cdot 2^2 \Rightarrow P_{ABC}=21\cdot 4 \Rightarrow P_{ABC}=84\ cm^2.$$

Ploštine trokuta ΔASC i ΔSBC iznose:

- $P_{ASC}=\frac{|AC|\cdot|SM|}{2} \Rightarrow P_{ASC}=\frac{b\cdot r}{2} \Rightarrow P_{ASC}=\frac{13\cdot r}{2}$
- $P_{SBC}=\frac{|BC|\cdot|SN|}{2} \Rightarrow P_{SBC}=\frac{a\cdot r}{2} \Rightarrow P_{SBC}=\frac{15\cdot r}{2}.$

Sada je:

$$P_{ASC}+P_{SBC}=P_{ABC} \Rightarrow \frac{13\cdot r}{2}+\frac{15\cdot r}{2}=84 \Rightarrow \frac{13\cdot r}{2}+\frac{15\cdot r}{2}=84 \ /\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13\cdot r+15\cdot r=168 \Rightarrow 28\cdot r=168 \Rightarrow 28\cdot r=168 \ /:28 \Rightarrow r=6\ cm.$$

Vježba 328

Dan je trokut sa stranicama 26 cm, 28 cm i 30 cm. Kružnica ima središte na stranici duljine 28 cm i dira ostale dvije stranice. Koliki je polumjer te kružnice?

Rezultat: 12 cm.

Zadatak 329 (Domagoj, gimnazija)

Kolika je duljina stranice a trokuta ako je b = 7, c = 4, a t_a je geometrijska sredina b i c?

Rješenje 329

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\ge 0.$$

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice trokuta.
Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, a t_a, t_b i t_c duljine težišnica trokuta, tada vrijedi:

$$t_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \quad , \quad t_b=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot c^2+2\cdot a^2-b^2} \quad , \quad t_c=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2}.$$

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je geometrijska sredina G brojeva a i b definirana izrazom

$$G=\sqrt{a\cdot b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Budući da je t_a geometrijska sredina b i c, slijedi:

$$\left.\begin{aligned} t_a &= \sqrt{b\cdot c} \\ t_a &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{b\cdot c} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \Rightarrow \sqrt{b\cdot c} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sqrt{b\cdot c} = \sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \Rightarrow 2\cdot\sqrt{b\cdot c} = \sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2\cdot\sqrt{b\cdot c}\right)^2 = \left(\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2}\right)^2 \Rightarrow 2^2\cdot\left(\sqrt{b\cdot c}\right)^2 = 2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot b\cdot c = 2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2 \Rightarrow a^2 = 2\cdot b^2+2\cdot c^2-4\cdot b\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 2\cdot 7^2+2\cdot 4^2-4\cdot 7\cdot 4 \Rightarrow a^2 = 2\cdot 49+2\cdot 16-112 \Rightarrow a^2 = 98+32-112 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 18 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{18} \Rightarrow a = \sqrt{9\cdot 2} \Rightarrow a = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\cdot\sqrt{2}.$$

2.inačica

Budući da je t_a geometrijska sredina b i c, slijedi:

$$\left.\begin{aligned} t_a &= \sqrt{b\cdot c} \\ t_a &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{b\cdot c} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \Rightarrow \sqrt{b\cdot c} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sqrt{b\cdot c} = \sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \Rightarrow 2\cdot\sqrt{b\cdot c} = \sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2\cdot\sqrt{b\cdot c}\right)^2 = \left(\sqrt{2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2}\right)^2 \Rightarrow 2^2\cdot\left(\sqrt{b\cdot c}\right)^2 = 2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot b\cdot c = 2\cdot b^2+2\cdot c^2-a^2 \Rightarrow a^2 = 2\cdot b^2+2\cdot c^2-4\cdot b\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 2\cdot\left(b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\right) \Rightarrow a^2 = 2\cdot\left(b^2-2\cdot b\cdot c+c^2\right) \Rightarrow a^2 = 2\cdot(b-c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 2\cdot(b-c)^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{2\cdot(b-c)^2} \Rightarrow a = \sqrt{2}\cdot\sqrt{(b-c)^2} \Rightarrow \left[\, b>c \Rightarrow b-c>0 \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2}\cdot(b-c) \Rightarrow a = \sqrt{2}\cdot(7-4) \Rightarrow a = \sqrt{2}\cdot 3 \Rightarrow a = 3\cdot\sqrt{2}.$$

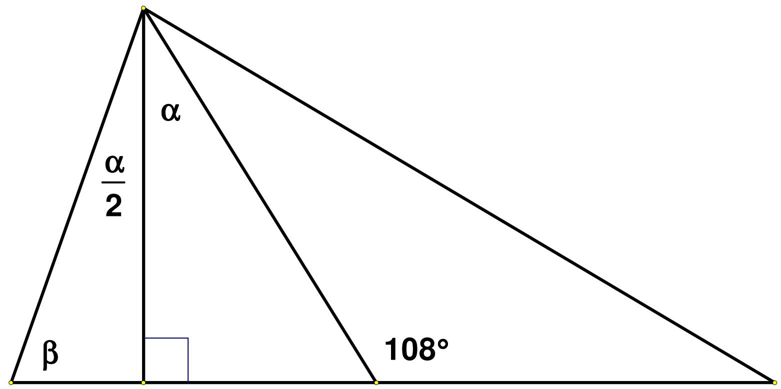
Vježba 329

Kolika je duljina stranice a trokuta ako je b = 14, c = 8, a t_a je geometrijska sredina b i c?

Rezultat: $6\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 330 (Nikola, gimnazija)

Kolika je mjera kuta β prikazanoga na skici?

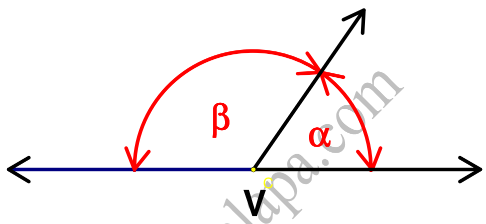


$A.\ \beta = 54^{\circ}$ $\quad B.\ \beta = 63^{\circ}$ $\quad C.\ \beta = 75^{\circ}$ $\quad D.\ \beta = 81^{\circ}$

Rješenje 330

Ponovimo!

Kutovi koji imaju jedan krak zajednički, a unija drugih dvaju krakova je pravac zovu se sukuti.

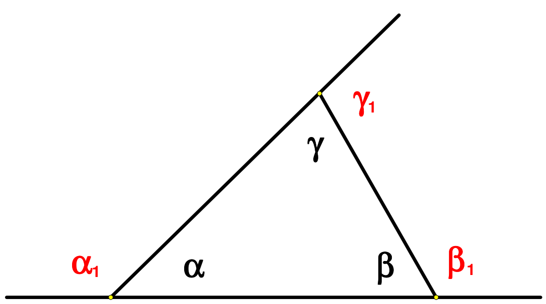


$$\alpha + \beta = 180^{\circ}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta. Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^{0}.$$

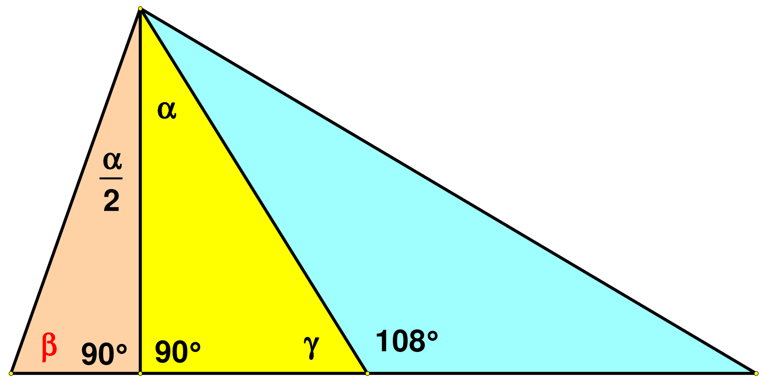
Poučak o vanjskom kutu u trokutu



$$\alpha_1 = \beta + \gamma \quad , \quad \beta_1 = \alpha + \gamma \quad , \quad \gamma_1 = \alpha + \beta.$$

Vanjski kut u trokutu jednak je zbroju unutarnjih kutova uz preostala dva vrha trokuta.

1.inačica



Prvi korak:

$$\gamma + 108^\circ = 180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 180^\circ - 108^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 72^\circ.$$

Drugi korak:

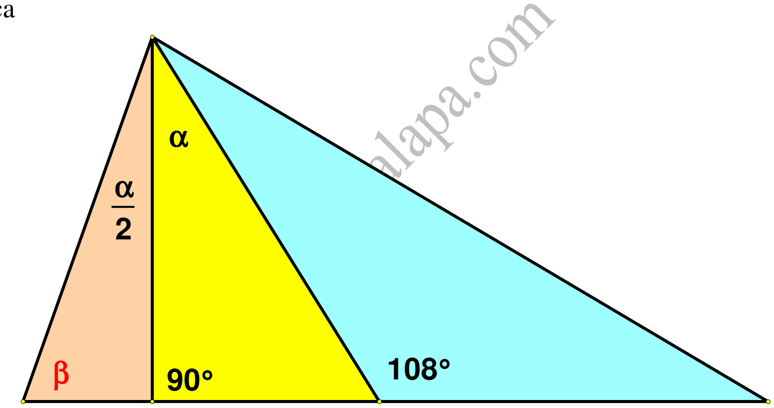
$$\alpha + \gamma = 90^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 90^\circ - \gamma \;\Rightarrow\; \alpha = 90^\circ - 72^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 18^\circ.$$

Treći korak:

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; \beta = 90^\circ - \frac{18^\circ}{2} \;\Rightarrow\; \beta = 90^\circ - 9^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 81^\circ.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica



Uporabit ćemo poučak o vanjskom kutu u trokutu.

Prvi korak:

$$\alpha + 90^\circ = 108^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 180^\circ - 90^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 18^\circ.$$

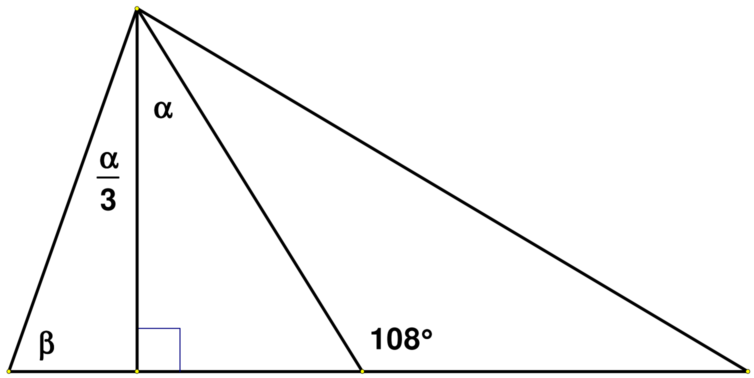
Drugi korak:

$$\beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; \beta = 90^\circ - \frac{18^\circ}{2} \;\Rightarrow\; \beta = 90^\circ - 9^\circ \;\Rightarrow\; \beta = 81^\circ.$$

Odgovor je pod D

Vježba 330

Kolika je mjera kuta β prikazanoga na skici?



$$A.\ \beta = 68^\circ \qquad B.\ \beta = 82^\circ \qquad C.\ \beta = 84^\circ \qquad D.\ \beta = 88^\circ$$

Rezultat: C.

Zadatak 331 (Marija, gimnazija)

U trokutu ABC zadan je kut $\gamma = 120°$, a za duljine stranica a i b vrijedi jednakost $a \cdot b = a + b$. Kolika je duljina simetrale kuta γ?

Rješenje 331

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Simetrala kuta je pravac koji raspolavlja kut.
Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

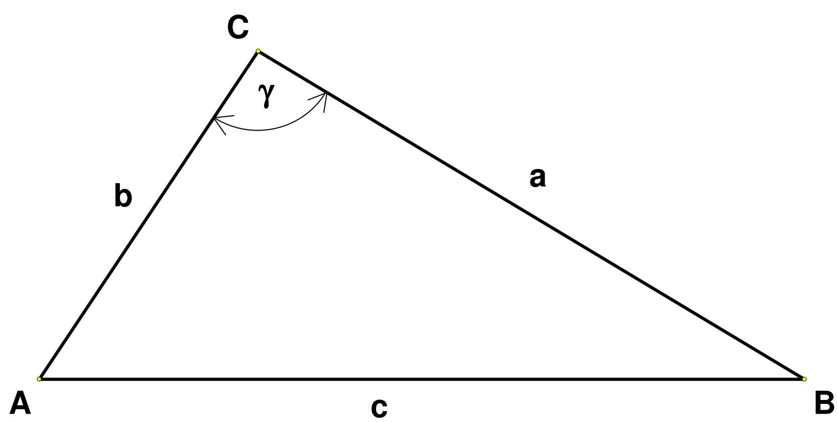
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

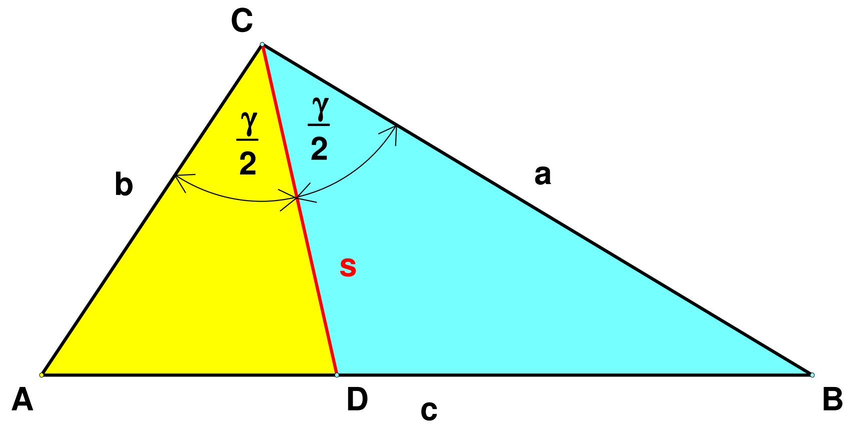
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad , \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$





Budući da simetrala s kuta γ dijeli trokut ABC na dva trokuta ΔADC i ΔDBC, ploština trokuta ABC jednaka je zbroju ploština trokuta ΔADC i ΔDBC.

$$P_{ABC} = P_{ADC} + P_{DBC} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot b\cdot s\cdot \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\cdot s\cdot a\cdot \sin\frac{\gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot b\cdot s\cdot \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}\cdot s\cdot a\cdot \sin\frac{\gamma}{2} \; /\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b\cdot \sin\gamma = b\cdot s\cdot \sin\frac{\gamma}{2} + s\cdot a\cdot \sin\frac{\gamma}{2} \Rightarrow b\cdot s\cdot \sin\frac{\gamma}{2} + s\cdot a\cdot \sin\frac{\gamma}{2} = a\cdot b\cdot \sin\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s\cdot \sin\frac{\gamma}{2}\cdot(b+a) = a\cdot b\cdot \sin\gamma \Rightarrow s\cdot \sin\frac{\gamma}{2}\cdot(a+b) = a\cdot b\cdot \sin\gamma \; /\cdot \frac{1}{a+b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{a\cdot b\cdot \sin\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(a+b)} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a\cdot b = a+b\end{array}\right] \Rightarrow s = \frac{(a+b)\cdot \sin\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(a+b)} \Rightarrow s = \frac{(a+b)\cdot \sin\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot(a+b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow s = \frac{2\cdot \sin\frac{\gamma}{2}\cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow s = \frac{2\cdot \sin\frac{\gamma}{2}\cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow s = 2\cdot \cos\frac{\gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = 2\cdot \cos\frac{120^\circ}{2} \Rightarrow s = 2\cdot \cos 60^\circ \Rightarrow s = 2\cdot \frac{1}{2} \Rightarrow s = 2\cdot \frac{1}{2} \Rightarrow s = 1.$$

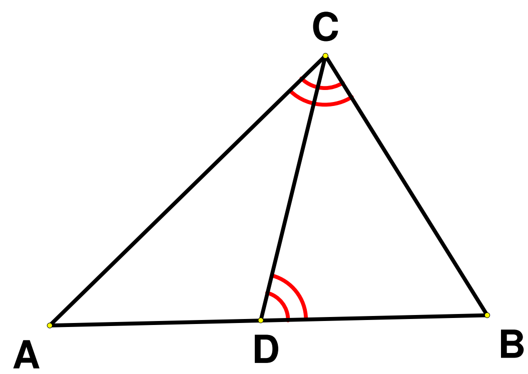
Vježba 331

U trokutu ABC zadan je kut γ = 90°, a za duljine stranica a i b vrijedi jednakost a · b = a + b. Kolika je duljina simetrale kuta γ?

Rezultat: $s = \sqrt{2}.$

Zadatak 332 (4A, 4B, TUPŠ)

Ako je na slici |AB| = 15 cm i |CB| = 9 cm, tada je |DB| jednako:



$$A.\ \frac{15}{9}\ cm \qquad B.\ \frac{27}{5}\ cm \qquad C.\ 6\ cm \qquad D.\ 9\ cm$$

Rješenje 332

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \Rightarrow\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

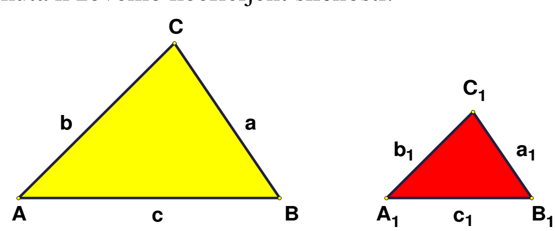
$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

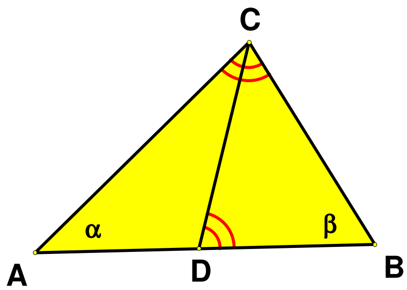
$$\alpha=\alpha_1\ ,\ \beta=\beta_1\ ,\ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

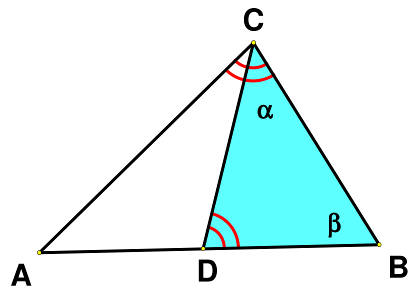
Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$





Sa slika vidi se:

$$|AB| = 15\ cm\ ,\ |CB| = 9\ cm\ ,\ \angle BCA = \angle CDB\ ,\ \angle ABC = \angle DBC = \beta$$

$$\angle CAB = \angle BCD = \alpha$$

Prema uvjetu zadatka trokuti ΔABC i ΔDBC imaju jednake kutove

$$\angle BCA = \angle CDB.$$

Kut β (kut u vrhu B) zajednički je za oba trokuta ΔABC i ΔDBC

$$\angle ABC = \angle DBC = \beta.$$

Iz navedenog slijedi da su im i kutovi uz treći vrh također jednaki.

$$\angle CAB = \angle BCD = \alpha.$$

Budući da trokuti ΔABC i ΔDBC imaju jednake kutove, trokuti su slični pa vrijedi razmjer:

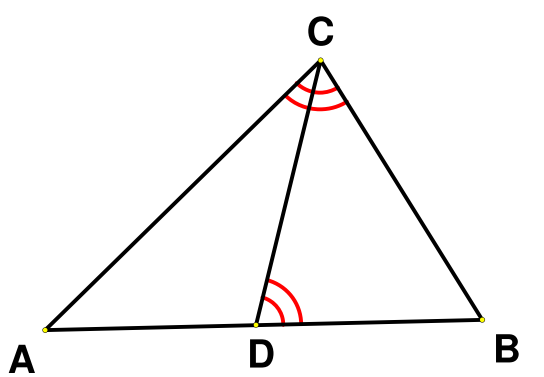
$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|DB|} \Rightarrow \frac{|CB|}{|DB|} = \frac{|AB|}{|CB|} \Rightarrow \frac{|DB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|AB|} \Rightarrow \frac{|DB|}{9} = \frac{9}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|DB|}{9} = \frac{9}{15}\ /\cdot 9 \Rightarrow |DB| = \frac{81}{15} \Rightarrow |DB| = \frac{81}{15} \Rightarrow |DB| = \frac{27}{5}\ cm.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 332

Ako je na slici │AB│= 15 cm i │CB│= 9 cm, tada je │DB│ jednako:

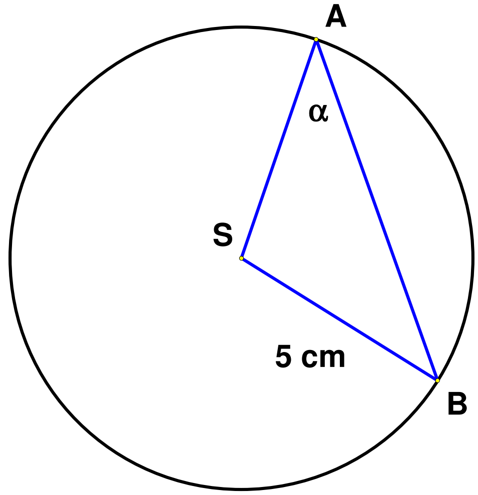


$$A.\ \frac{5}{3}\ cm \qquad B.\ \frac{9}{5}\ cm \qquad C.\ 3\ cm \qquad D.\ 5\ cm$$

Rezultat: B.

Zadatak 333 (4A, 4B, TUPŠ)

Ako je cos α = 0.6, tada je duljina $|AB|$ na slici jednaka:

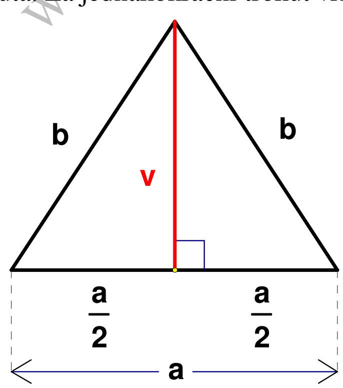


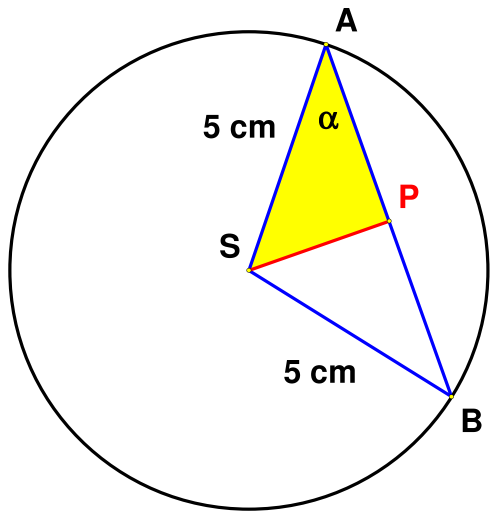
A. 3 *cm* *B.* 4 *cm* *C.* 6 *cm* *D.* 8 *cm*

Rješenje 333

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračni trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta. Za jednakokračni trokut vrijedi





Sa slike vidi se:

$$|SA| = |SB| = 5 \ cm \ , \ |AP| = |PB| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

Uočimo pravokutan trokut ASP i pomoću funkcije kosinus izračunamo $|AB|$.

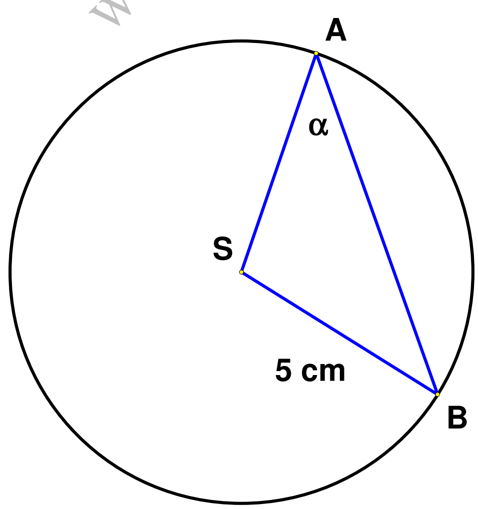
$$\cos\alpha = \frac{|AP|}{|SA|} \Rightarrow 0.6 = \frac{|AP|}{5} \Rightarrow \frac{|AP|}{5} = 0.6 \Rightarrow \frac{|AP|}{5} = 0.6 \ / \cdot 5 \Rightarrow |AP| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |AB| = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |AB| = 3 \ / \cdot 2 \Rightarrow |AB| = 6 \ cm.$$

Odgovor je pod C

Vježba 333

Ako je cos α = 0.8, tada je duljina $|AB|$ na slici jednaka:



$A. \ 3 \ cm \qquad B. \ 4 \ cm \qquad C. \ 6 \ cm \qquad D. \ 8 \ cm$

Rezultat: D.

Zadatak 334 (Lana, gimnazija)

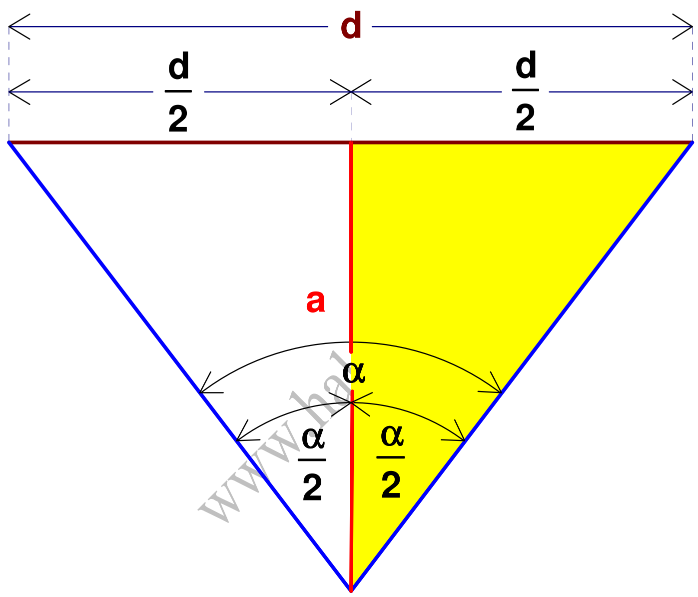
Širina gola u nogometu iznosi 7.32 m, a u rukometu 3 m. Koji igrač ima "na raspolaganju" veći kut za pogodak: nogometaš koji izvodi jedanaesterac ili rukometaš koji izvodi sedmerac?

Rješenje 334

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.



Sa slike vidi se:
d – širina gola
a – udaljenost s koje se izvodi kazneni udarac
α – kut pod kojim izvođač kaznenog udarca vidi gol.

Uočimo pravokutan trokut čija je jedna kateta polovica širine gola $\frac{d}{2}$, a druga udaljenost s koje se izvodi kazneni udarac a. Pomoću funkcije tangens može se izračunati kut α.

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{a} \Rightarrow tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{\frac{a}{1}} \Rightarrow tg\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2 \cdot a} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = tg^{-1}\left(\frac{d}{2 \cdot a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = tg^{-1}\left(\frac{d}{2 \cdot a}\right) \;/\cdot 2 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot tg^{-1}\left(\frac{d}{2 \cdot a}\right).$$

Računamo kut α za:

 nogometaša

$$\left.\begin{array}{l} d = 7.32\ m \\ a = 11\ m \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\alpha = 2 \cdot tg^{-1}\left(\frac{d}{2 \cdot a}\right)\right] \Rightarrow \alpha = 2 \cdot tg^{-1}\left(\frac{7.32}{2 \cdot 11}\right) \Rightarrow \alpha = 36^\circ 48'.$$

 rukometaša

$$\left.\begin{array}{l} d = 3\ m \\ a = 7\ m \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\alpha = 2 \cdot tg^{-1}\left(\frac{d}{2 \cdot a}\right)\right] \Rightarrow \alpha = 2 \cdot tg^{-1}\left(\frac{3}{2 \cdot 7}\right) \Rightarrow \alpha = 24^\circ 11'.$$

Nogometaš vidi gol pod većim kutom.

Vježba 334

Širina gola u nogometu iznosi 73.2 dm, a u rukometu 30 dm. Koji igrač ima "na raspolaganju" veći kut za pogodak: nogometaš koji izvodi jedanaesterac ili rukometaš koji izvodi sedmerac?

Rezultat: Nogometaš.

Zadatak 335 (Tomislav, gimnazija)

U 14:00 sati vrhovi velike i male kazaljke na satu udaljeni su 13 cm, a u 9:00 sati udaljeni su 17 cm. Kolika je duljina velike, a kolika male kazaljke?

Rješenje 335

Ponovimo!

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 90^\circ = 0 \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Bikvadratna jednadžba
Opći oblik bikvadratne jednadžbe je

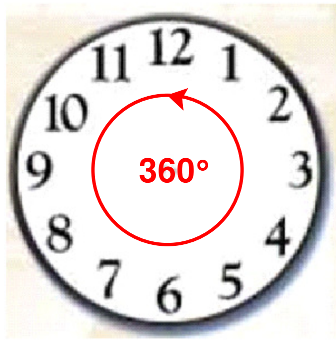
$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0.$$

Ta se jednadžba rješava uvođenjem pomoćne nepoznanice $x^2 = t$. Tako se dolazi do jednadžbe

$$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0,$$

Koju zovemo rezolventa bikvadratne jednadžbe. Bikvadratna jednadžba ima četiri rješenja od kojih su dva i dva suprotna.
Kada mala (satna) kazaljka jednom opiše puni kut (360°) prošlo je 12 sati što znači da jednom satu odgovara kut od 30°.

$$360^\circ : 12 = 30^\circ.$$

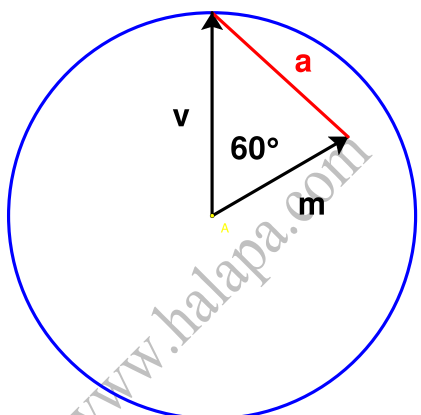


Neka je:

- v – duljina velike (minutne) kazaljke
- m – duljina male (satne) kazaljke.

U 14:00 sati vrhovi velike i male kazaljke na satu udaljeni su a = 13 cm i međusobno zatvaraju kut od

$$2 \cdot 30^\circ = 60^\circ.$$



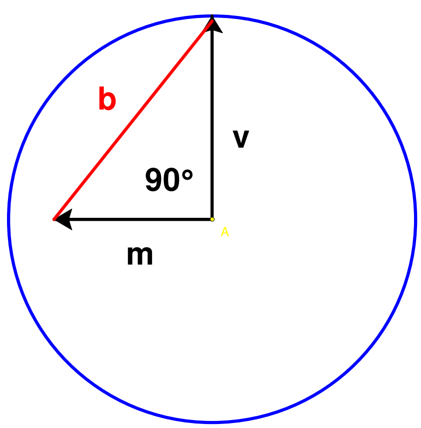
Vrijedi kosinusov poučak.

$$a^2 = v^2 + m^2 - 2 \cdot v \cdot m \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow 13^2 = v^2 + m^2 - 2 \cdot v \cdot m \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169 = v^2 + m^2 - 2 \cdot v \cdot m \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 169 = v^2 + m^2 - v \cdot m \Rightarrow v^2 + m^2 - v \cdot m = 169.$$

U 9:00 sati vrhovi velike i male kazaljke na satu udaljeni su b = 17 cm i međusobno zatvaraju kut od

$$3 \cdot 30^\circ = 90^\circ.$$



Vrijedi kosinusov poučak.

$$b^2 = v^2 + m^2 - 2 \cdot v \cdot m \cdot \cos 90^\circ \Rightarrow 17^2 = v^2 + m^2 - 2 \cdot v \cdot m \cdot 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 289 = v^2 + m^2 - 0 \Rightarrow 289 = v^2 + m^2 \Rightarrow v^2 + m^2 = 289.$$

Iz sustava jednadžba izračunamo tražene veličine.

$$\left.\begin{array}{l} v^2 + m^2 - v \cdot m = 169 \\ v^2 + m^2 = 289 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow 289 - v \cdot m = 169 \Rightarrow -v \cdot m = 169 - 289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -v \cdot m = -120 \Rightarrow -v \cdot m = -120 \; / \cdot (-1) \Rightarrow v \cdot m = 120.$$

Dalje promatramo sustav jednadžba iz kojeg dobijemo bikvadratnu jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l} v \cdot m = 120 \\ v^2 + m^2 = 289 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v \cdot m = 120 \; / : m \\ v^2 + m^2 = 289 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = \frac{120}{m} \\ v^2 + m^2 = 289 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{120}{m}\right)^2 + m^2 = 289 \Rightarrow \frac{14\,400}{m^2} + m^2 = 289 \Rightarrow \frac{14\,400}{m^2} + m^2 = 289 \; / \cdot m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\,400 + m^4 = 289 \cdot m^2 \Rightarrow 14\,400 + m^4 - 289 \cdot m^2 = 0 \Rightarrow m^4 - 289 \cdot m^2 + 14\,400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(m^2\right)^2 - 289 \cdot m^2 + 14\,400 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ m^2 = t \end{array}\right] \Rightarrow t^2 - 289 \cdot t + 14\,400 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2 - 289 \cdot t + 14\,400 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -289 \;,\; c = 14\,400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -289 \;,\; c = 14\,400 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-289) \pm \sqrt{(-289)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14\,400}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{289 \pm \sqrt{83\,521 - 57\,600}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{289 \pm \sqrt{25\,921}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{289 \pm 161}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{289 + 161}{2} \\ t_2 = \frac{289 - 161}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{450}{2} \\ t_2 = \frac{128}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{450}{2} \\ t_2 = \frac{128}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = 225 \\ t_2 = 64 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo sa na zamjenu.

$$\left.\begin{array}{l} m^2 = t \\ t = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow m^2 = 64 \Rightarrow m^2 = 64 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow m_{1,2} = \pm\sqrt{64} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1 = 8 \\ m_2 = -8 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 8 \; cm \text{ duljina male kazaljke}.$$

Računamo duljinu v velike kazaljke.

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{120}{m} \\ m = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow v = \frac{120}{8} \Rightarrow v = \frac{120}{8} \Rightarrow v = 15\ cm.$$

Vježba 335

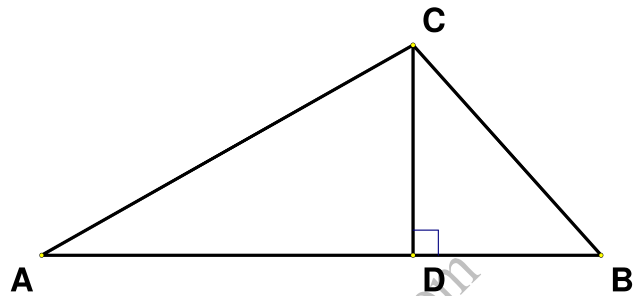
U 14:00 sati vrhovi velike i male kazaljke na satu udaljeni su 1.3 dm, a u 9:00 sati udaljeni su 1.7 dm. Kolika je duljina velike, a kolika male kazaljke?

Rezultat: 15 cm, 8 cm.

Zadatak 336 (4B – dm, TUPŠ)

Kolika je površina trokuta ABC prikazanoga na skici ako je │AD│= 10 cm, │CD│=3 cm i │BC│= 5 cm?

$A.\ 21\ cm^2 \qquad B.\ 26\ cm^2 \qquad C.\ 30\ cm^2 \qquad D.\ 75\ cm^2$



Rješenje 336

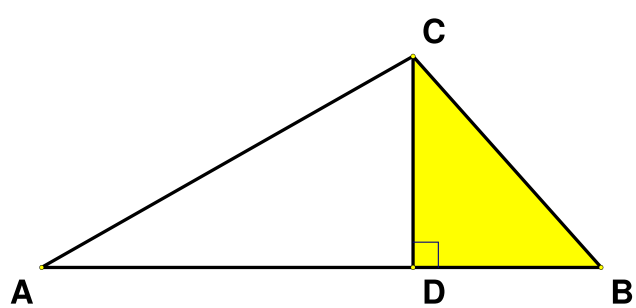
Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



Uočimo pravokutan trokut DBC i pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu │DB│.

$$|DB|^2 = |BC|^2 - |CD|^2 \Rightarrow |DB|^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow |DB|^2 = 25 - 9 \Rightarrow |DB|^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DB|^2 = 16 \; /\sqrt{\;} \Rightarrow |DB| = \sqrt{16} \Rightarrow |DB| = 4 \; cm.$$

Sada je:

$$|AB| = |AD| + |DB| \Rightarrow |AB| = 10 \; cm + 4 \; cm \Rightarrow |AB| = 14 \; cm.$$

Površina trokuta ABC iznosi:

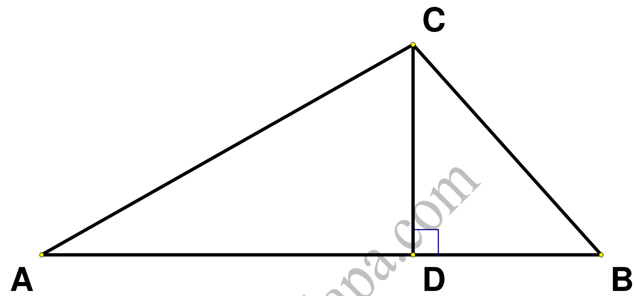
$$P = \frac{|AB| \cdot |CD|}{2} \Rightarrow P = \frac{14 \; cm \cdot 3 \; cm}{2} \Rightarrow P = \frac{14 \; cm \cdot 3 \; cm}{2} \Rightarrow P = 7 \cdot 3 \; cm^2 \Rightarrow P = 21 \; cm^2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 336

Kolika je površina trokuta ABC prikazanoga na skici ako je |AD| = 1 dm, |CD| =3 cm i |BC| = 5 cm?

$A.\ 21 \; cm^2 \qquad B.\ 26 \; cm^2 \qquad C.\ 30 \; cm^2 \qquad D.\ 75 \; cm^2$



Rezultat: A.

Zadatak 337 (Goran, srednja škola)

Postoji li trokut kojem su zbrojevi svakih dvaju kutova manji od 120°?

Rješenje 337

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c < b + d \quad , \quad a < b \; , \; c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Ako takav trokut postoji onda moraju vrijediti ove tri nejednakosti:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta < 120^\circ \\ \beta + \gamma < 120^\circ \\ \gamma + \alpha < 120^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha + \beta + \beta + \gamma + \gamma + \alpha < 120^\circ + 120^\circ + 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma < 360^\circ \Rightarrow 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) < 360^\circ \Rightarrow 2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) < 360^\circ \; /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < 180^\circ.$$

Takav trokut ne postoji jer mora biti

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{0}.$$

Vježba 337

Postoji li trokut kojem su zbrojevi svakih dvaju kutova manji od 118°?

Rezultat: Ne, dokaz analogan.

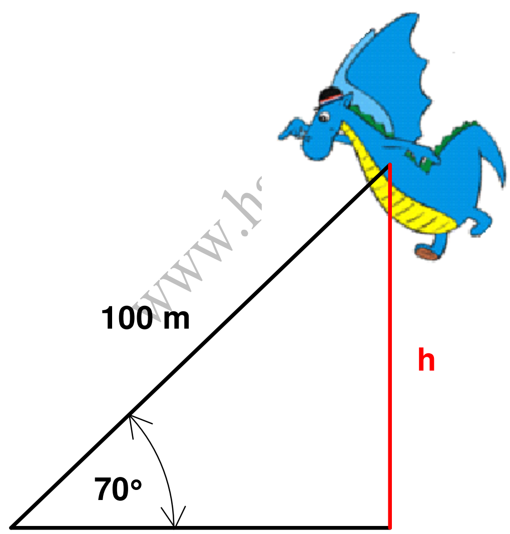
Zadatak 338 (2B, TUPŠ)

Koliko visoko leti zmaj koji je vezan uzicom od 100 m koja s tlom zatvara kut od 70°?

Rješenje 338

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.



$$\sin 70^{\circ} = \frac{h}{100} \Rightarrow \frac{h}{100} = \sin 70^{\circ} \Rightarrow \frac{h}{100} = \sin 70^{\circ} \quad / \cdot 100 \Rightarrow h = 100 \cdot \sin 70^{\circ} \Rightarrow h = 93.97 \ m.$$

Vježba 338

Koliko visoko leti zmaj koji je vezan uzicom od 0.1 km koja s tlom zatvara kut od 70°?

Rezultat: 93.97 m.

Zadatak 339 (2B, TUPŠ)

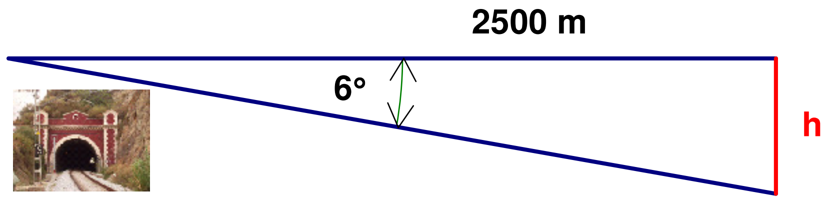
Tunel duljine 2500 m spušta se pod kutom od 6°. Za koliko je metara izlaz tunela niži od ulaza?

Rješenje 339

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.



$$tg\,6^\circ=\frac{h}{2500}\Rightarrow\frac{h}{2500}=tg\,6^\circ\Rightarrow\frac{h}{2500}=tg\,6^\circ\ /\cdot 2500\Rightarrow h=2500\cdot tg\,6^\circ\Rightarrow h=262.76\ m.$$

Vježba 339

Tunel duljine 2.5 km spušta se pod kutom od 6°. Za koliko je metara izlaz tunela niži od ulaza?

Rezultat: 262.76 m.

Zadatak 340 (2B, TUPŠ)

Toranj visok 30 m vidi se pod kutom od 25° iz točke koja leži u ravnini podnožja tornja. Pod kojim bi se kutom iz iste točke vidio dvostruko viši toranj?

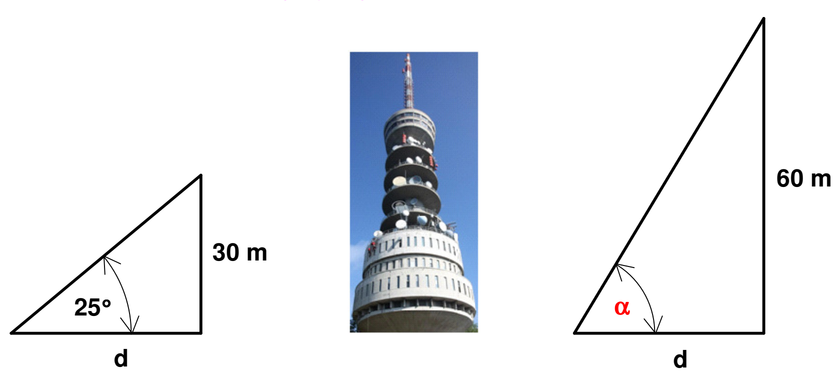
Rješenje 340

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l}a=b\\c=d\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{d}{b},\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$



1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} tg\,25^\circ = \dfrac{30}{d} \\ tg\,\alpha = \dfrac{60}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{tg\,\alpha}{tg\,25^\circ} = \frac{\frac{60}{d}}{\frac{30}{d}} \Rightarrow \frac{tg\,\alpha}{tg\,25^\circ} = \frac{\frac{60}{d}}{\frac{30}{d}} \Rightarrow \frac{tg\,\alpha}{tg\,25^\circ} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{tg\,\alpha}{tg\,25^\circ} = 2 \Rightarrow \frac{tg\,\alpha}{tg\,25^\circ} = 2 \;/\cdot\, tg\,25^\circ \Rightarrow tg\,\alpha = 2 \cdot tg\,25^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(2 \cdot tg\,25^\circ\right) \Rightarrow \alpha = 43^\circ\,0'\,11''.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} tg\,25^\circ = \dfrac{30}{d} \\ tg\,\alpha = \dfrac{60}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\,25^\circ = \dfrac{30}{d} \;/\cdot\, \dfrac{d}{tg\,25^\circ} \\ tg\,\alpha = \dfrac{60}{d} \;/\cdot\, \dfrac{d}{tg\,\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d = \dfrac{30}{tg\,25^\circ} \\ d = \dfrac{60}{tg\,\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{30}{tg\,25^\circ} = \frac{60}{tg\,\alpha} \Rightarrow \frac{30}{tg\,25^\circ} = \frac{60}{tg\,\alpha} \;/\cdot\, \frac{tg\,\alpha \cdot tg\,25^\circ}{30} \Rightarrow tg\,\alpha = 2 \cdot tg\,25^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(2 \cdot tg\,25^\circ\right) \Rightarrow \alpha = 43^\circ\,0'\,11''.$$

Vježba 340

Toranj visok 300 dm vidi se pod kutom od 25° iz točke koja leži u ravnini podnožja tornja. Pod kojim bi se kutom iz iste točke vidio dvostruko viši toranj?

Rezultat: $\alpha = 43^\circ\,0'\,11''.$