Zadatak 281 (Lucija, gimnazija)

Zadan je trokut s težišnicama duljina 12, 14 i 16. Koliki je opseg tog trokuta? Rezultat zaokružite na tri decimale (poslije decimalne točke).

Rješenje 281

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O = a + b + c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.
Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, a t_a, t_b i t_c duljine težišnica trokuta, tada vrijedi:

$$4 \cdot t_a^2 = 2 \cdot \left(b^2 + c^2\right) - a^2 \quad , \quad 4 \cdot t_b^2 = 2 \cdot \left(c^2 + a^2\right) - b^2 \quad , \quad 4 \cdot t_c^2 = 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) - c^2.$$

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a + b}{n}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot \left(b^2 + c^2\right) - a^2 = 4 \cdot t_a^2 \\ 2 \cdot \left(c^2 + a^2\right) - b^2 = 4 \cdot t_b^2 \\ 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) - c^2 = 4 \cdot t_c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_a = 12 \\ t_b = 14 \\ t_c = 16 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot \left(b^2 + c^2\right) - a^2 = 4 \cdot 12^2 \\ 2 \cdot \left(c^2 + a^2\right) - b^2 = 4 \cdot 14^2 \\ 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) - c^2 = 4 \cdot 16^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot \left(b^2 + c^2\right) - a^2 = 576 \\ 2 \cdot \left(c^2 + a^2\right) - b^2 = 784 \\ 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) - c^2 = 1024 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2 = 576 \\ 2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 - b^2 = 784 \\ 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 - c^2 = 1024 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2 + 2 \cdot c^2 + 2 \cdot a^2 - b^2 + 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 - c^2 = 576 + 784 + 1024 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a^2 + 3 \cdot b^2 + 3 \cdot c^2 = 2384.$$

Računamo a iz sljedećeg sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot a^2 + 3 \cdot b^2 + 3 \cdot c^2 = 2384 \\ 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2 = 576 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot b^2 + 3 \cdot c^2 + 3 \cdot a^2 = 2384 \\ 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2 = 576 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot b^2 + 3 \cdot c^2 + 3 \cdot a^2 = 2384 \;/ \cdot 2 \\ 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2 = 576 \;/ \cdot (-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot b^2 + 6 \cdot c^2 + 6 \cdot a^2 = 4768 \\ -6 \cdot b^2 - 6 \cdot c^2 + 3 \cdot a^2 = -1728 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot a^2 = 3040 \Rightarrow 9 \cdot a^2 = 3040 \;/ : 9 \Rightarrow a^2 = \frac{3040}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{3040}{9} \;/ \sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{\frac{3040}{9}} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{3040}}{\sqrt{9}} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{3040}}{3} \Rightarrow a=18.378732.$$

Računamo b iz sljedećeg sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot a^2+3\cdot b^2+3\cdot c^2=2384 \\ 2\cdot c^2+2\cdot a^2-b^2=784 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot c^2+3\cdot a^2+3\cdot b^2=2384 \\ 2\cdot c^2+2\cdot a^2-b^2=784 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot c^2+3\cdot a^2+3\cdot b^2=2384 \ /\cdot 2 \\ 2\cdot c^2+2\cdot a^2-b^2=784 \ /\cdot(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6\cdot c^2+6\cdot a^2+6\cdot b^2=4768 \\ -6\cdot c^2-6\cdot a^2+3\cdot b^2=-2352 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot b^2=2416 \Rightarrow 9\cdot b^2=2416 \ /:9 \Rightarrow b^2=\frac{2416}{9} \Rightarrow b^2=\frac{2416}{9} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{\frac{2416}{9}} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{2416}}{\sqrt{9}} \Rightarrow b=\frac{\sqrt{2416}}{3} \Rightarrow b=16.384274.$$

Računamo c iz jednadžbe $2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2=1024.$

$$2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2=1024 \Rightarrow -c^2=1024-2\cdot a^2-2\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -c^2=1024-2\cdot a^2-2\cdot b^2 \ /\cdot(-1) \Rightarrow c^2=-1024+2\cdot a^2+2\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=2\cdot a^2+2\cdot b^2-1024 \Rightarrow c^2=2\cdot\left(a^2+b^2\right)-1024 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=\frac{3040}{9} \\ b^2=\frac{2416}{9} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=2\cdot\left(\frac{3040}{9}+\frac{2416}{9}\right)-1024 \Rightarrow c^2=2\cdot\frac{3040+2416}{9}-1024 \Rightarrow c^2=2\cdot\frac{5456}{9}-1024 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=\frac{10912}{9}-1024 \Rightarrow c^2=\frac{10912}{9}-\frac{1024}{1} \Rightarrow c^2=\frac{10912-9216}{9} \Rightarrow c^2=\frac{1696}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=\frac{1696}{9} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow c=\sqrt{\frac{1696}{9}} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{1696}}{\sqrt{9}} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{1696}}{3} \Rightarrow c=13.727507.$$

Opseg trokuta iznosi:

$$O=a+b+c=\left[\begin{array}{l} a=18.378732 \\ b=16.384274 \\ c=13.727507 \end{array}\right]=18.378732+16.384274+13.727507=48.490513\approx 48.491.$$

Vježba 281

Zadan je trokut s težišnicama duljina 12, 14 i 16. Koliki je opseg tog trokuta? Rezultat zaokružite na dvije decimale (poslije decimalne točke).

Rezultat: 48.49.

Zadatak 282 (Darko, srednja škola)

Dokazati da je trokut pravokutan ako je jedan kut jednak razlici druga dva kuta.

Rješenje 282

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Napišemo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\beta-\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma=180^0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{zamjene}\end{bmatrix} \Rightarrow \beta-\gamma+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \beta-\gamma+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta+\beta=180^0 \Rightarrow 2\cdot\beta=180^0 \Rightarrow 2\cdot\beta=180^0 \;/:2 \Rightarrow \beta=90^0.$$

Dobili smo pravi kut, znači da je trokut pravokutan.

Vježba 282

Dokazati da je trokut pravokutan ako je jedan kut jednak zbroju druga dva kuta.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 283 (Darko, srednja škola)

Dokazati da je trokut pravokutan ako se kutovi odnose kao 1 : 2 : 3.

Rješenje 283

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)$$
$$a:b=(a:n):(b:n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad \text{i} \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1:b_1=k$$
$$a_2:b_2=k$$
$$a_3:b_3=k$$
$$\dots$$
$$a_n:b_n=k,$$

produženi razmjer je

$$a_1:a_2:a_3:\dots:a_n=b_1:b_2:b_3:\dots:b_n.$$

Za kutove vrijedi:

$$\alpha:\beta:\gamma=1:2:3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=1\cdot k\\ \beta=2\cdot k\\ \gamma=3\cdot k\end{array}\right\}.$$

Budući da je zbroj kutova u trokutu 180°, slijedi jednadžba:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha=1\cdot k \\ \beta=2\cdot k \\ \gamma=3\cdot k \end{bmatrix} \Rightarrow 1\cdot k+2\cdot k+3\cdot k=180^0 \Rightarrow 6\cdot k=180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot k=180^0 \ /:6 \Rightarrow k=30^0.$$

Kutovi iznose:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=1\cdot k \\ \beta=2\cdot k \\ \gamma=3\cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k=30^0\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=1\cdot 30^0 \\ \beta=2\cdot 30^0 \\ \gamma=3\cdot 30^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha=30^0 \\ \beta=60^0 \\ \gamma=90^0 \ \text{pravi kut} \end{array}\right\}.$$

Trokut je pravokutan.

Vježba 283

Dokazati da je trokut pravokutan ako se kutovi odnose kao 2 : 4 : 6.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 284 (Darko, srednja škola)

Ako je jedan kut u trokutu aritmetička sredina druga dva, onda on iznosi 60 °. Dokazati.

Rješenje 284

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c=b+d.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n}{n}.$$

Neka su zadani pozitivni brojevi a i b. Tada je aritmetička sredina A_2 brojeva a i b definirana izrazom

$$A_2=\frac{a+b}{2}.$$

Pomoću sustava jednadžbi dobije se tražena tvrdnja.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=180^0 \\ \alpha=\dfrac{\beta+\gamma}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=180^0 \\ \alpha=\dfrac{\beta+\gamma}{2} \ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=180^0 \\ 2\cdot\alpha=\beta+\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=180^0 \\ 2\cdot\alpha-\beta-\gamma=0^0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+2\cdot\alpha-\beta-\gamma=180^0+0^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+2\cdot\alpha-\beta-\gamma=180^0+0^0 \Rightarrow \alpha+2\cdot\alpha=180^0 \Rightarrow 3\cdot\alpha=180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\alpha=180^0 \ /:3 \Rightarrow \alpha=60^0.$$

Dokaz gotov.

Vježba 284

Ako je zbroj dva kuta u trokutu jedan dvostrukoj vrijednosti trećeg kuta, onda on ima 60 °. Dokazati.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 285 (Mario, srednja škola)

Duljina polumjera trokutu opisane kružnice jednaka je 15 cm, duljina stranice a je 20 cm, a kut β = 55°. Kolika je površina ovog trokuta?

Rješenje 285

Ponovimo!

$$1^0 = 60'.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R \quad , \quad \frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R \quad , \quad \frac{b}{\sin\beta}=2\cdot R \quad , \quad \frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Ploština trokuta računa se po formulama:

$$P=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha} \quad , \quad P=\frac{b^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\beta} \quad , \quad P=\frac{c^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\cdot\sin\gamma}.$$

$$P=2\cdot R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma,$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, α, β, γ mjere kutova trokuta, R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Primjenom poučka o sinusu izračunamo mjeru kuta α.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R \;/\cdot\sin\alpha \Rightarrow a=2\cdot R\cdot\sin\alpha \Rightarrow 2\cdot R\cdot\sin\alpha=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot R\cdot\sin\alpha=a \;/\cdot\frac{1}{2\cdot R} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{a}{2\cdot R} \Rightarrow \alpha=\sin^{-1}\left(\frac{a}{2\cdot R}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=20\ cm \\ R=15\ cm \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\sin^{-1}\left(\frac{20\ cm}{2\cdot15\ cm}\right) \Rightarrow \alpha=41^0\,48'.$$

Treći kut u trokutu iznosi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \gamma=180^0-\alpha-\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=41^0\,48' \\ \beta=55^0 \end{array}\right] \Rightarrow \gamma=180^0-41^0\,48'-55^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma=179^0\,60'-96^0\,48' \Rightarrow \gamma=83^0\,12'.$$

Sada računamo površinu trokuta.

1.inačica

$$P=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha}\Rightarrow\begin{bmatrix}a=20\ cm\\ \alpha=41^0 48'\\ \beta=55^0\\ \gamma=83^0 12'\end{bmatrix}\Rightarrow P=\frac{(20\ cm)^2\cdot\sin 55^0\cdot\sin 83^0 12'}{2\cdot\sin 41^0 48'}\Rightarrow P=244\ cm^2.$$

2.inačica

$$P=2\cdot R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\Rightarrow\begin{bmatrix}R=15\ cm\\ \alpha=41^0 48'\\ \beta=55^0\\ \gamma=83^0 12'\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=2\cdot(15\ cm)^2\cdot\sin 41^0 48'\cdot\sin 55^0\cdot\sin 83^0 12'\Rightarrow P=244\ cm^2.$$

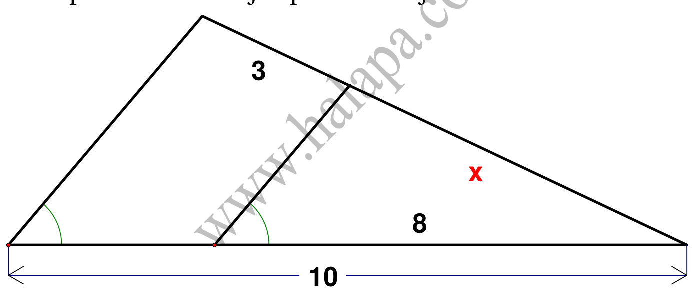
Vježba 285

Duljina polumjera trokutu opisane kružnice jednaka je 1.5 dm, duljina stranice a je 2 dm, a kut β = 55°. Kolika je površina ovog trokuta?

Rezultat: 244 cm^2.

Zadatak 286 (Ankica, srednja škola)

Koristeći Talesov poučak izračunaj nepoznatu duljinu x.



Rješenje 286

Ponovimo!

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

Omjer dužina je omjer njihovih duljina izraženih u istoj mjernoj jedinici. Kažemo da su dužine proporcionalne ili razmjerne, ako su razmjerne njihove duljine.

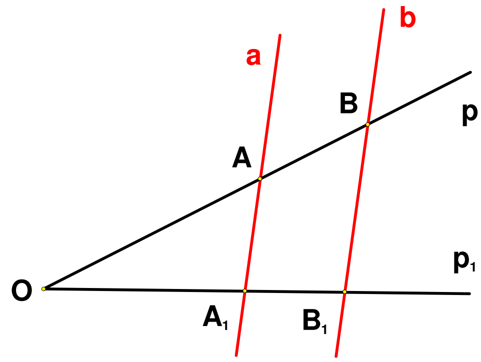
Talesov poučak o proporcionalnosti

Paralelni pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine.

Ako pravac a siječe krakove p i p_1 kuta $\angle pOp_1$ u točkama A i A_1, a njemu paralelan pravac b siječe p i p_1 u točkama B i B_1 tada je:

$$|OA|:|OA_1|=|AB|:|A_1B_1|\quad,\quad |OA|:|OB|=|AA_1|:|BB_1|$$

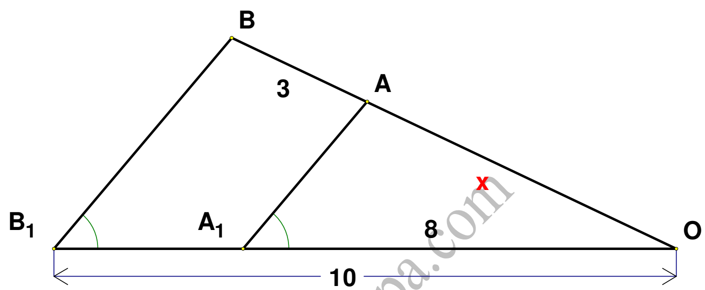
$$|OA| : |OB| = |OA_1| : |OB_1| \quad , \quad |OA| : |OA_1| = |OB| : |OB_1|$$



Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Računamo duljinu x.



Sa slike vidi se:

$$|OA| = x \quad , \quad |OB| = x + 3 \quad , \quad |OA_1| = 8 \quad , \quad |OB_1| = 10$$

1.inačica

Iz sljedećeg razmjera dobije se:

$$|OA| : |OB| = |OA_1| : |OB_1| \Rightarrow x : (x + 3) = 8 : 10 \Rightarrow 10 \cdot x = 8 \cdot (x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot x = 8 \cdot x + 24 \Rightarrow 10 \cdot x - 8 \cdot x = 24 \Rightarrow 2 \cdot x = 24 \Rightarrow 2 \cdot x = 24 \ /: 2 \Rightarrow x = 12.$$

2.inačica

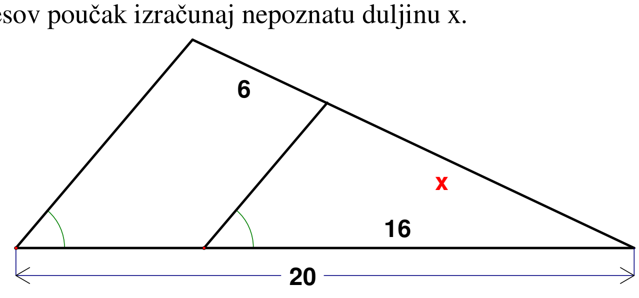
Iz sljedećeg razmjera dobije se:

$$|OA| : |OA_1| = |OB| : |OB_1| \Rightarrow x : 8 = (x + 3) : 10 \Rightarrow 10 \cdot x = 8 \cdot (x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot x = 8 \cdot x + 24 \Rightarrow 10 \cdot x - 8 \cdot x = 24 \Rightarrow 2 \cdot x = 24 \Rightarrow 2 \cdot x = 24 \ /: 2 \Rightarrow x = 12.$$

Vježba 286

Koristeći Talesov poučak izračunaj nepoznatu duljinu x.



Rezultat: 24.

Zadatak 287 (Ivica, srednja škola)

Duljine stranica trokuta su uzastopni prirodni brojevi. Ako je najveći kut trokuta dva puta veći od najmanjeg kuta tog trokuta izračunaj duljine stranica trokuta.

Rješenje 287

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad \sin 2x = 2\cdot \sin x\cdot \cos x \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Poučak o sinusu

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\cdot R \quad , \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2\cdot R \quad , \quad \frac{b}{\sin\beta} = 2\cdot R \quad , \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.

Stranice trokuta označimo na sljedeći način:

$$\left.\begin{array}{l} a = a \\ b = a+1 \\ c = a+2 \end{array}\right\}.$$

Nasuprotni kutovi su α, β i γ. Budući da je najveći kut trokuta γ dva puta veći od najmanjeg kuta tog trokuta α, iz poučka o sinusu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} c = a+2 \ , \ \gamma = 2\cdot\alpha \\ \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a+2}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a+2}{\sin 2\alpha} \ /\cdot\frac{\sin 2\alpha}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a+2}{a} \Rightarrow \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a+2}{a} \Rightarrow \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a+2}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\cos\alpha = \frac{a+2}{a} \Rightarrow 2\cdot\cos\alpha = \frac{a+2}{a} \ /\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a+2}{2\cdot a}.$$

Uporabom poučka o kosinusu dobije se kvadratna jednadžba.

$$\left.\begin{array}{l} a=a \;\;,\;\; b=a+1 \;\;,\;\; c=a+2 \\ \cos\alpha=\dfrac{a+2}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a^{2}=b^{2}+c^{2}-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{2}=(a+1)^{2}+(a+2)^{2}-2\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\frac{a+2}{2\cdot a}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{2}=(a+1)^{2}+(a+2)^{2}-2\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot\frac{a+2}{2\cdot a}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{2}=(a+1)^{2}+(a+2)^{2}-\frac{(a+1)\cdot(a+2)^{2}}{a}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{2}=(a+1)^{2}+(a+2)^{2}-\frac{(a+1)\cdot(a+2)^{2}}{a}\;/\cdot a\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{3}=a\cdot(a+1)^{2}+a\cdot(a+2)^{2}-(a+1)\cdot(a+2)^{2}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{3}=a\cdot\left(a^{2}+2\cdot a+1\right)+a\cdot\left(a^{2}+4\cdot a+4\right)-(a+1)\cdot\left(a^{2}+4\cdot a+4\right)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{3}=a^{3}+2\cdot a^{2}+a+a^{3}+4\cdot a^{2}+4\cdot a-\left(a^{3}+4\cdot a^{2}+4\cdot a+a^{2}+4\cdot a+4\right)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{3}=a^{3}+2\cdot a^{2}+a+a^{3}+4\cdot a^{2}+4\cdot a-a^{3}-4\cdot a^{2}-4\cdot a-a^{2}-4\cdot a-4\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^{3}=a^{3}+2\cdot a^{2}+a+a^{3}+4\cdot a^{2}+4\cdot a-a^{3}-4\cdot a^{2}-4\cdot a-a^{2}-4\cdot a-4\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0=2\cdot a^{2}+a+a^{3}+4\cdot a^{2}+4\cdot a-a^{3}-4\cdot a^{2}-4\cdot a-a^{2}-4\cdot a-4\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0=2\cdot a^{2}+a+a^{3}+4\cdot a^{2}+4\cdot a-a^{3}-4\cdot a^{2}-4\cdot a-a^{2}-4\cdot a-4\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0=2\cdot a^{2}+a+4\cdot a^{2}+4\cdot a-4\cdot a^{2}-4\cdot a-a^{2}-4\cdot a-4\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0=2\cdot a^{2}+a+4\cdot a^{2}+4\cdot a-4\cdot a^{2}-4\cdot a-a^{2}-4\cdot a-4\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0=2\cdot a^{2}+a+4\cdot a-4\cdot a-a^{2}-4\cdot a-4\;\Rightarrow\; 0=2\cdot a^{2}+a+4\cdot a-4\cdot a-a^{2}-4\cdot a-4\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 0=2\cdot a^{2}+a-4\cdot a-a^{2}-4\;\Rightarrow\; 0=a^{2}-3\cdot a-4\;\Rightarrow\; a^{2}-3\cdot a-4=0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^{2}-3\cdot a-4=0 \\ a=1 \;\;,\;\; b=-3 \;\;,\;\; c=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;\;,\;\; b=-3 \;\;,\;\; c=-4 \\ a_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^{2}-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}\;\Rightarrow\; a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}\;\Rightarrow\; a_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2}\;\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{1}=\dfrac{3+5}{2} \\ a_{2}=\dfrac{3-5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{1}=\dfrac{8}{2} \\ a_{2}=-\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{1}=\dfrac{8}{2} \\ a_{2}=-\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_{1}=4 \\ a_{2}=-1 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow\; a=4.$$

Duljine stranica trokuta iznose:

$$\left.\begin{array}{l} a=a \\ b=a+1 \\ c=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow [a=4] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=4 \\ b=4+1 \\ c=4+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=4 \\ b=5 \\ c=6 \end{array}\right\}.$$

Vježba 287

Duljine stranica trokuta su uzastopni prirodni brojevi. Ako je najmanji kut dva puta manji od najvećeg kuta tog trokuta izračunaj duljine stranica trokuta.

Rezultat: 4, 5, 6.

Zadatak 288 (Ana i Maria ☺, TUPŠ)

Izračunaj nepoznate stranice i kutove trokuta ako je zadano b = 14, c = 7.1, α = 28° 50' 12".

Rješenje 288

Ponovimo!

$$1^0 = 60'.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

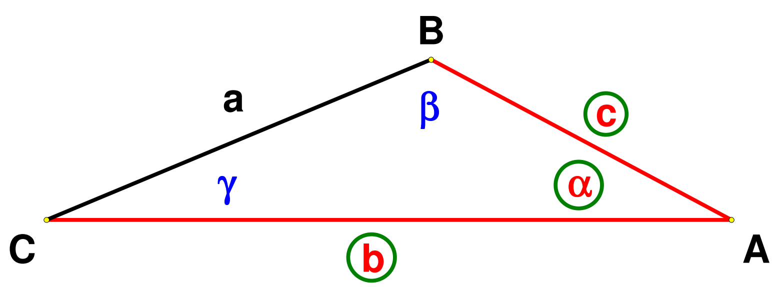
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad , \quad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \quad , \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$



Uporabom poučka o kosinusu izračunamo duljinu stranice a.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha} \Rightarrow a = \sqrt{14^2 + 7.1^2 - 2\cdot 14\cdot 7.1\cdot\cos 28^0 50'12"} \Rightarrow a = 8.5.$$

Kut, na primjer β, možemo izračunati pomoću poučka o kosinusu jer sada su poznate duljine sve tri stranice trokuta.

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\right) \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{8.5^2+7.1^2-14^2}{2\cdot 8.5\cdot 7.1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \beta = 127^0 25'4''.$$

Tada kut γ iznosi:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \ \Rightarrow \ \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) \ \Rightarrow \ \gamma = 180^0 - \left(28^0 50'12'' + 127^0 25'4''\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \gamma = 180^0 - 155^0 75'16'' \ \Rightarrow \ \gamma = 179^0 59'60'' - 156^0 15'16'' \ \Rightarrow \ \gamma = 23^0 44'44''.$$

Vježba 288

Izračunaj nepoznate stranice i kutove trokuta ako je zadano α = 75°, β = 45°, a = 18.

Rezultat: b = 13.1769, γ = 60°, c = 16.1383.

Zadatak 289 (Anchy, gimnazija)

Duljine stranica trokuta odnose se kao 17 : 25 : 28, a njegova ploština je 1680 cm^2. Izračunajte opseg trokuta.

Rješenje 289

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0 \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

$$\sqrt{a^{2 \cdot n}} = a^n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O = a + b + c.$$

Poluopseg trokuta je:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \frac{O}{2}.$$

Ploština trokuta ΔABC kojemu su zadane duljine stranica a, b, c računa se pomoću Heronove formule

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \ , \ s = \frac{a+b+c}{2} - \text{poluopseg trokuta}.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$

$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Iz razmjera duljina stranica trokuta slijedi:

$$a : b : c = 17 : 25 : 28 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 17 \cdot k \\ b = 25 \cdot k \\ c = 28 \cdot k \end{array} \right\}, \ k \ \text{je koeficijent proporcionalnosti}.$$

Računamo poluopseg s.

$$\left. \begin{array}{l} a = 17 \cdot k \\ b = 25 \cdot k \\ c = 28 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow \left[s = \frac{a+b+c}{2} \right] \Rightarrow s = \frac{17 \cdot k + 25 \cdot k + 28 \cdot k}{2} \Rightarrow s = \frac{70 \cdot k}{2} \Rightarrow s = \frac{70 \cdot k}{2} \Rightarrow s = 35 \cdot k.$$

Iz Heronove formule za ploštinu trokuta dobije se k.

$$\left. \begin{array}{l} P = 1680 \\ s = 35 \cdot k \\ a = 17 \cdot k \\ b = 25 \cdot k \\ c = 28 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow \left[P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} P = 1680 \\ s = 35 \cdot k \\ a = 17 \cdot k \\ b = 25 \cdot k \\ c = 28 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow 1680 = \sqrt{35 \cdot k \cdot (35 \cdot k - 17 \cdot k) \cdot (35 \cdot k - 25 \cdot k) \cdot (35 \cdot k - 28 \cdot k)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1680 = \sqrt{35 \cdot k \cdot 18 \cdot k \cdot 10 \cdot k \cdot 7 \cdot k} \Rightarrow 1680 = \sqrt{5 \cdot 7 \cdot k \cdot 2 \cdot 9 \cdot k \cdot 2 \cdot 5 \cdot k \cdot 7 \cdot k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1680 = \sqrt{5^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot k^4} \Rightarrow 1680 = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{k^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1680 = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k^2 \Rightarrow 1680 = 210 \cdot k^2 \Rightarrow 210 \cdot k^2 = 1680 \Rightarrow 210 \cdot k^2 = 1680 \ /: 210 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = 8 \Rightarrow k^2 = 8 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow k = \sqrt{8} \Rightarrow k = \sqrt{4 \cdot 2} \Rightarrow k = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow k = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Opseg trokuta iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} s = 35 \cdot k \\ k = 2 \cdot \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow [O = 2 \cdot s] \Rightarrow O = 2 \cdot 35 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow O = 140 \cdot \sqrt{2} \ cm.$$

Vježba 289

Duljine stranica trokuta odnose se kao 34 : 50 : 56, a njegova ploština je 1680 cm^2. Izračunajte opseg trokuta.

Rezultat: $140 \cdot \sqrt{2} \ cm.$

Zadatak 290 (Kristina, gimnazija)

Zbroj duljina dviju stranica trokuta jednak je 10 cm, a nasuprot tim stranicama nalaze se kutovi od 78° i 33°. Odredi duljinu stranice koja je nasuprot trećeg kuta.

Rješenje 290

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

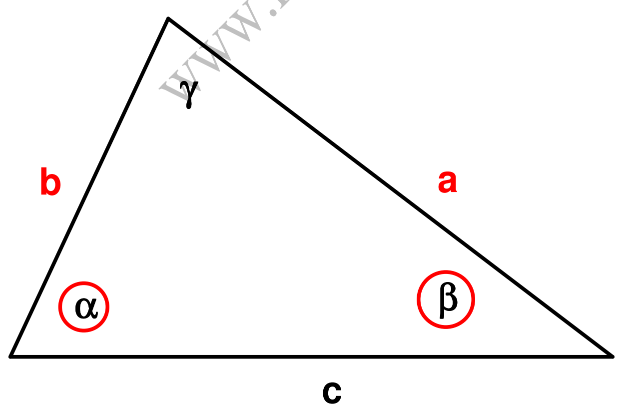
$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$



Neka su a i b stranice čiji je zbroj 10 cm. Nasuprot njima nalaze se kutovi

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=78^0\\ \beta=33^0\end{array}\right\}.$$

Kut γ iznosi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \gamma=180^0-(\alpha+\beta) \Rightarrow \gamma=180^0-\left(78^0+33^0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma=180^0-111^0 \Rightarrow \gamma=69^0.$$

Sada možemo postaviti sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=10 \\ \dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=10 \\ \dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta} \quad / \cdot \sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=10 \\ a=b\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+b=10 \Rightarrow b\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1\right)=10 \Rightarrow b\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{1}{1}\right)=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}=10 \Rightarrow b\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}=10 \;/\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} \Rightarrow b=10\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=10\cdot\frac{\sin 33^0}{\sin 78^0+\sin 33^0} \Rightarrow b=3.58.$$

Računamo duljinu stranice a.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=10 \\ b=3.58 \end{array}\right\} \Rightarrow a+3.58=10 \Rightarrow a=10-3,58 \Rightarrow a=6.42.$$

Duljina stranice c iznosi:

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \Rightarrow c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \;/\sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=6.42 \\ b=3.58 \\ \gamma=69^0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{6.42^2+3.58^2-2\cdot 6.42\cdot 3.58\cdot\cos 69^0} \Rightarrow c=6.13\ cm.$$

Vježba 290

Zbroj duljina dviju stranica trokuta jednak je 1 dm, a nasuprot tim stranicama nalaze se kutovi od 78° i 33°. Odredi duljinu stranice koja je nasuprot trećeg kuta.

Rezultat: 6.13 cm.

Zadatak 291 (Kristina, gimnazija)

Veličine kutova trokuta su u omjeru 2 : 3 : 4. U kojem su omjeru duljine stranica trokuta?

Rješenje 291

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R \quad , \quad a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)$$
$$a:b=(a:n):(b:n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{aligned} a_1 : b_1 &= k \\ a_2 : b_2 &= k \\ a_3 : b_3 &= k \\ &\dots \\ a_n : b_n &= k, \end{aligned}$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n.$$

Produženi razmjer ima svojstvo:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = (b_1 \cdot n) : (b_2 \cdot n) : (b_3 \cdot n) : \dots : (b_n \cdot n) \ , \ n \neq 0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Iz razmjera veličina kutova trokuta slijedi:

$$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4 \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot k \\ \beta &= 3 \cdot k \\ \gamma &= 4 \cdot k \end{aligned}\right\}, \ k \text{ je koeficijent proporcionalnosti.}$$

Budući da je zbroj kutova u trokutu jednak 180°, slijedi:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha = 2 \cdot k \\ \beta = 3 \cdot k \\ \gamma = 4 \cdot k \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot k + 3 \cdot k + 4 \cdot k = 180^0 \Rightarrow 9 \cdot k = 180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot k = 180^0 \ /:9 \Rightarrow k = 20^0.$$

Kutovi trokuta iznose:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot k \\ \beta &= 3 \cdot k \\ \gamma &= 4 \cdot k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[k = 20^0\right] \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot 20^0 \\ \beta &= 3 \cdot 20^0 \\ \gamma &= 4 \cdot 20^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha &= 40^0 \\ \beta &= 60^0 \\ \gamma &= 80^0 \end{aligned}\right\}.$$

Uporabom sinusovog poučka dobije se traženi omjer stranica.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \Rightarrow a : b : c = \sin 40^0 : \sin 60^0 : \sin 80^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a : b : c = 0.64 : 0.87 : 0.98 \Rightarrow a : b : c = 64 : 87 : 98.$$

Vježba 291

Veličine kutova trokuta su u omjeru 4 : 6 : 8. U kojem su omjeru duljine stranica trokuta?

Rezultat: $a : b : c = 64 : 87 : 98.$

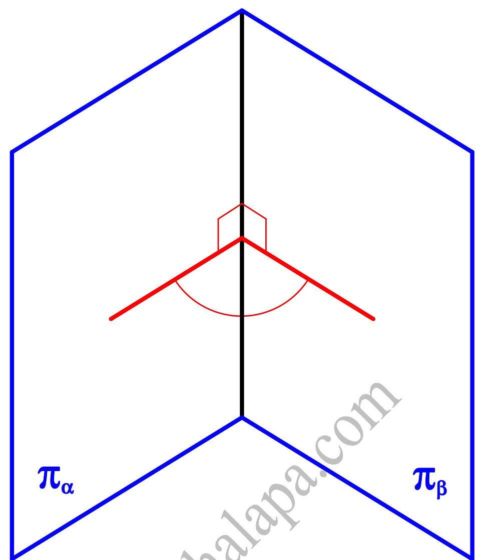
Zadatak 292 (Neznanka, gimnazija)

Zadan je diedar svojim poluravninama π_α i π_β. Točka A pripada poluravnini π_α, a točka B je presjek okomice iz točke A i poluravnine π_β. Duljina tog odsječka je $12 \cdot \sqrt{3}$, a udaljenost točke B do brida diedra je 24. Koliki je kut diedra?

Rješenje 292

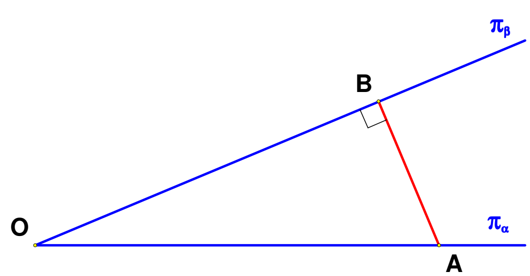
Ponovimo!

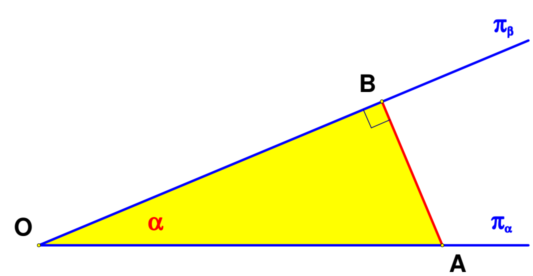
Diedar je dio prostora što ga zatvaraju dvije poluravnine (strane diedra), a njihov zajednički pravac naziva se brid diedra. Ako se u bilo kojoj točki brida podignu okomice u objema stranama diedra, one zatvaraju ravni kut, koji je mjera diedra.



Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$





Sa slika vidi se:

$$|AB| = 12 \cdot \sqrt{3} \quad , \quad |OB| = 24 \quad , \quad \angle ABO = 90^0$$

Uočimo pravokutan trokut OAB i pomoću funkcije tangens odredimo kut α.

$$tg\,\alpha = \frac{|AB|}{|OB|} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{24} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{24} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 40^0 53'36''.$$

Vježba 292

Zadan je diedar svojim poluravninama π_α i π_β. Točka A pripada poluravnini π_α, a točka B je presjek okomice iz točke A i poluravnine π_β. Duljina tog odsječka je $6 \cdot \sqrt{3}$, a udaljenost točke B do brida diedra je 12. Koliki je kut diedra?

Rezultat: $40^0 53'36''.$

Zadatak 293 (Bubalna2015, gimnazija)

Zadana su tri trokuta za čije opsege vrijedi $O_1 : O_2 : O_3 = 2 : 3 : 4$, a zbroj njihovih ploština je $P_1 + P_2 + P_3 = 232 \text{ cm}^2$. Odredite ploštinu svakog trokuta.

Rješenje 293

Ponovimo!

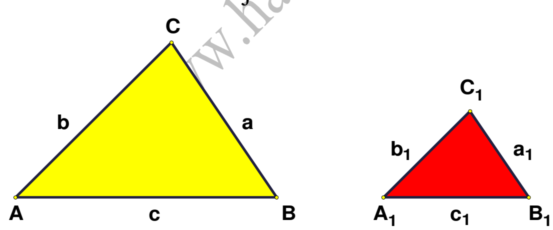
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta jednak je zbroju duljina njegovih stranica.
Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \;,\; \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

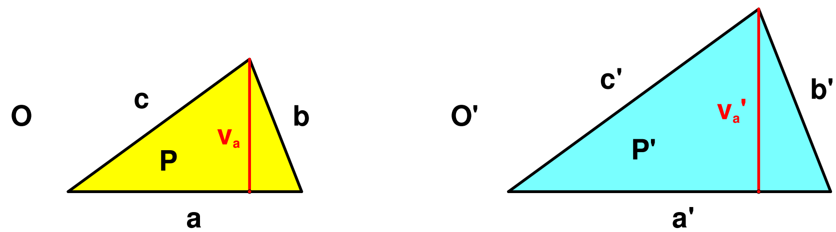
$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : ... : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : ... : b_n.$$



Za slične trokute vrijede sljedeći omjeri:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k \quad , \quad \frac{O'}{O} = k \quad , \quad \frac{P'}{P} = k^2.$$

Iz produženog razmjera za opsege trokuta dobije se:

$$O_1 : O_2 : O_3 = 2 : 3 : 4 \Rightarrow P_1 : P_2 : P_3 = 2^2 : 3^2 : 4^2 \Rightarrow P_1 : P_2 : P_3 = 4 : 9 : 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} P_1 = 4 \cdot k \\ P_2 = 9 \cdot k \\ P_3 = 16 \cdot k \end{matrix}\right\} - \text{k je koeficijent sličnosti.}$$

Dalje slijedi:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 232 \Rightarrow \begin{bmatrix} P_1 = 4 \cdot k \\ P_2 = 9 \cdot k \\ P_3 = 16 \cdot k \end{bmatrix} \Rightarrow 4 \cdot k + 9 \cdot k + 16 \cdot k = 232 \Rightarrow 29 \cdot k = 232 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 29 \cdot k = 232 \; / : 29 \Rightarrow k = 8.$$

Ploštine trokuta redom iznose:

$$\left.\begin{matrix} P_1 = 4 \cdot k \\ P_2 = 9 \cdot k \\ P_3 = 16 \cdot k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[k = 8 \right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} P_1 = 4 \cdot 8 \\ P_2 = 9 \cdot 8 \\ P_3 = 16 \cdot 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P_1 = 32 \; cm^2 \\ P_2 = 72 \; cm^2 \\ P_3 = 128 \; cm^2 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 293

Zadana su tri trokuta za čije opsege vrijedi $O_1 : O_2 : O_3 = 2 : 3 : 4$, a zbroj njihovih ploština je $P_1 + P_2 + P_3 = 464 \text{ cm}^2$. Odredite ploštinu svakog trokuta.

Rezultat: $P_1 = 64 \text{ cm}^2$, $P_2 = 144 \text{ cm}^2$, $P_3 = 256 \text{ cm}^2$.

Zadatak 294 (Borna, tehnička škola)

Jedna kateta pravokutnog trokuta je kraća od hipotenuze za 3 cm, a druga za 5 cm. Koliki su kutovi tog trokuta?

Rješenje 294

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad ,$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta. Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

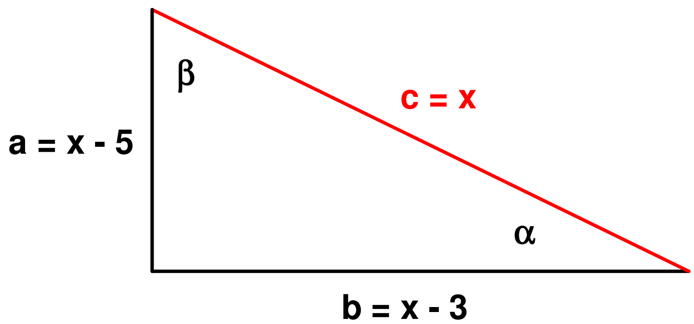
$$\alpha + \beta = 90^0.$$

Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a = b - n \quad , \quad a + n = b \quad , \quad b - a = n.$$

Označimo duljine stranica trokuta na sljedeći način:

$$a = x - 5 \quad , \quad b = x - 3 \quad , \quad c = x.$$



Uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (x-5)^2 + (x-3)^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - 10 \cdot x + 25 + x^2 - 6 \cdot x + 9 = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 10 \cdot x + 25 + x^2 - 6 \cdot x + 9 = x^2 \Rightarrow x^2 - 16 \cdot x + 34 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 16 \cdot x + 34 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -16 \ , \ c = 34 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = -16 \ , \ c = 34 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 136}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{120}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm 10.95}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{16 + 10.95}{2} \\ x_2 = \dfrac{16 - 10.95}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{26.95}{2} \\ x_2 = \dfrac{5.05}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 13.48 \\ x_2 = 2.53 \ \text{nema smisla zbog } a < 0, \ b < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 13.48 \ cm.$$

Računamo duljine kateta.

$$\left.\begin{matrix} a = x - 5 \\ b = x - 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\, x = 13.48 \,] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 13.48 - 5 \\ b = 13.48 - 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 8.48 \ cm \\ b = 10.48 \ cm \end{matrix}\right\}.$$

Mjera kuta α iznosi:

$$tg \, \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{8.48}{10.48}\right) \Rightarrow \alpha = 38^0 \, 58'42''.$$

Računamo mjeru kuta β.

$$\alpha + \beta = 90^0 \Rightarrow \beta = 90^0 - \alpha \Rightarrow \beta = 89^0 \, 59'60'' - 38^0 \, 58'42'' \Rightarrow \beta = 51^0 \, 1'18''.$$

Vježba 294

Jedna kateta pravokutnog trokuta je kraća od hipotenuze za 0.5 dm, a druga za 30 mm. Koliki su kutovi tog trokuta?

Rezultat: $\alpha = 38° \, 58' \, 42''$, $\beta = 51° \, 1' \, 18''$.

Zadatak 295 (Iris, gimnazija)

Površina trokuta ABC jednaka je 22.5 cm^2, a duljine stranica sličnog trokuta iznose 2.4 cm, 3.4 cm i 5 cm. Kolike su duljine stranica trokuta ABC?

Rješenje 295

Ponovimo!

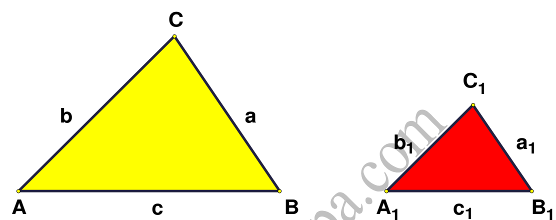
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \qquad , \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina pripadnih stranica, tj. ako je

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k,$$

tada je

$$\frac{P}{P_1} = k^2.$$

Heronova formula

Površina trokuta čije su stranice a, b i c računa se po formuli

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \qquad , \qquad s = \frac{a+b+c}{2},$$

gdje je s poluopseg trokuta.

Najprije odredimo ploštinu P_1 sličnog trokuta $A_1B_1C_1$ pomoću Heronove formule:

- računamo poluopseg s_1.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2.4 \\ b_1 = 3.4 \\ c_1 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} \right] \Rightarrow s_1 = \frac{2.4 + 3.4 + 5}{2} \Rightarrow s_1 = \frac{10.8}{2} \Rightarrow s_1 = 5.4\ cm.$$

- ploština P_1 iznosi:

$$P_1 = \sqrt{s_1 \cdot (s_1 - a_1) \cdot (s_1 - b_1) \cdot (s_1 - c_1)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} s_1 = 5.4 \\ a_1 = 2.4 \\ b_1 = 3.4 \\ c_1 = 5 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{5.4 \cdot (5.4 - 2.4) \cdot (5.4 - 3.4) \cdot (5.4 - 5)} \Rightarrow P_1 = \sqrt{5.4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0.4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{12.96} \Rightarrow P_1 = 3.6\ cm^2.$$

Budući da se ploštine sličnih trokuta odnose kao kvadrati duljina pripadnih stranica, odredimo koeficijent sličnosti k.

$$\frac{P}{P_1} = k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{P}{P_1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P = 22.5\ cm^2 \\ P_1 = 3.6\ cm^2 \end{array} \right] \Rightarrow k^2 = \frac{22.5\ cm^2}{3.6\ cm^2} \Rightarrow k^2 = 6.25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = 6.25\ /\sqrt{\ } \Rightarrow k = \sqrt{6.25} \Rightarrow k = 2.5.$$

Duljine stranica trokuta ABC iznose:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{a_1} = k \\ \frac{b}{b_1} = k \\ \frac{c}{c_1} = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a}{a_1} = k\ / \cdot a_1 \\ \frac{b}{b_1} = k\ / \cdot b_1 \\ \frac{c}{c_1} = k\ / \cdot c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = k \cdot a_1 \\ b = k \cdot b_1 \\ c = k \cdot c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2.5 \\ a_1 = 2.4 \\ b_1 = 3.4 \\ c_1 = 5 \end{array} \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2.5 \cdot 2.4 \\ b = 2.5 \cdot 3.4 \\ c = 2.5 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 6\ cm \\ b = 8.5\ cm \\ c = 12.5\ cm \end{array}\right\}.$$

Vježba 295

Površina trokuta ABC jednaka je 22.5 cm^2, a duljine stranica sličnog trokuta iznose 24 mm, 34 mm i 0.5 dm. Kolike su duljine stranica trokuta ABC?

Rezultat: 6 cm, 8.5 cm, 12.5 cm.

Zadatak 296 (Ivana, srednja škola)

Jedna je kateta pravokutnog trokuta tri puta kraća od hipotenuze. Koliki su kutovi tog trokuta?

Rješenje 296

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta. Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta

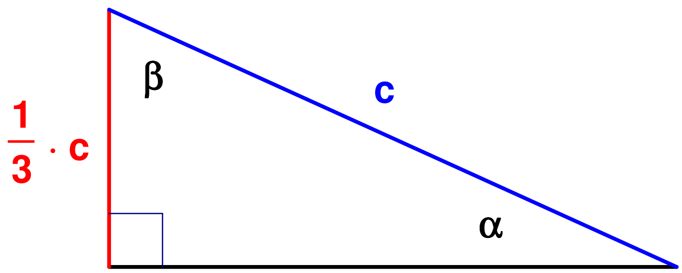
vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^{0}.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kako zapisati da je broj a n puta manji od broja b?

$$n \cdot a = b \quad , \quad a = \frac{b}{n} \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

1.inačica



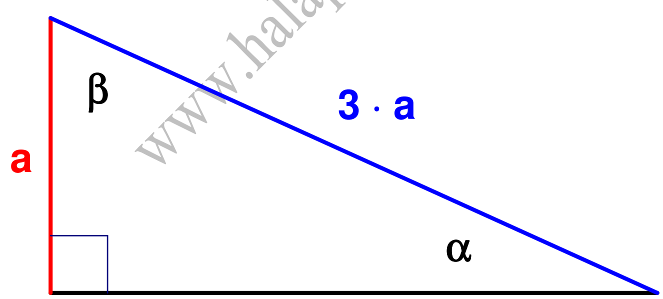
Sa slike vidi se:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{3} \cdot c}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{1}{3} \cdot c}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \alpha = 19.5^{0}.$$

Računamo mjeru kuta β.

$$\alpha + \beta = 90^{0} \Rightarrow \beta = 90^{0} - \alpha \Rightarrow \beta = 90^{0} - 19.5^{0} \Rightarrow \beta = 70.5^{0}.$$

2.inačica



Sa slike vidi se:

$$\sin\alpha = \frac{a}{3 \cdot a} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{3 \cdot a} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \alpha = 19.5^{0}.$$

Računamo mjeru kuta β.

$$\alpha + \beta = 90^{0} \Rightarrow \beta = 90^{0} - \alpha \Rightarrow \beta = 90^{0} - 19.5^{0} \Rightarrow \beta = 70.5^{0}.$$

Vježba 296

Jedna je kateta pravokutnog trokuta četiri puta kraća od hipotenuze. Koliki su kutovi tog trokuta?

Rezultat: 14.5°, 75.5°.

Zadatak 297 (Danijel, gimnazija)

Zbroj duljina stranica trokuta iznosi 15, a duljine visina spuštenih na te stranice jesu 4 i 6. Nađite ploštinu trokuta.

Rješenje 297

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

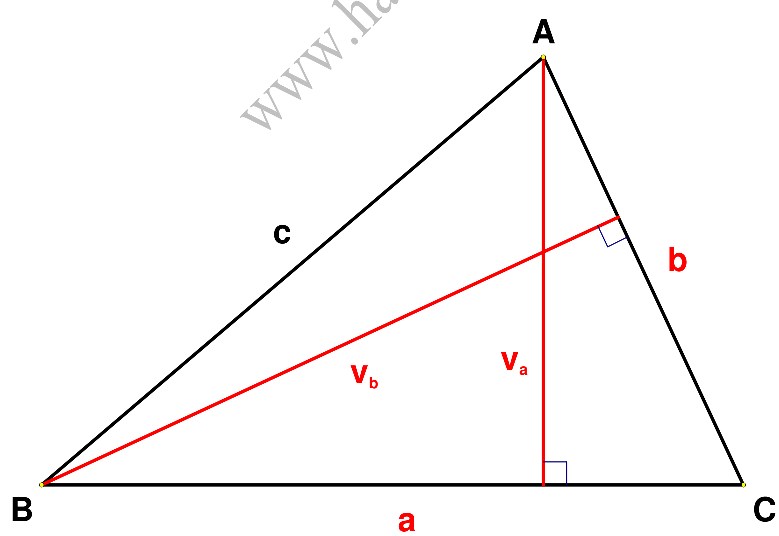
$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Neka su a i b duljine stranica trokuta, ABC, a v_a i v_b duljine visina spuštenih na te stranice. Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{a \cdot v_a}{2} \\ P = \frac{b \cdot v_b}{2} \\ a + b = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a \cdot v_a}{2} = P \\ \frac{b \cdot v_b}{2} = P \\ a + b = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a \cdot v_a}{2} = P \ / \cdot \frac{2}{v_a} \\ \frac{b \cdot v_b}{2} = P \ / \cdot \frac{2}{v_b} \\ a + b = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \frac{2 \cdot P}{v_a} \\ b = \frac{2 \cdot P}{v_b} \\ a + b = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot P}{v_a} + \frac{2 \cdot P}{v_b} = 15 \Rightarrow \begin{bmatrix} v_a = 4 \\ v_b = 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{2 \cdot P}{4} + \frac{2 \cdot P}{6} = 15 \Rightarrow \frac{2 \cdot P}{4} + \frac{2 \cdot P}{6} = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2} + \frac{P}{3} = 15 \Rightarrow \frac{P}{2} + \frac{P}{3} = 15 \ / \cdot 6 \Rightarrow 3 \cdot P + 2 \cdot P = 90 \Rightarrow 5 \cdot P = 90 \Rightarrow 5 \cdot P = 90 \ / : 5 \Rightarrow P = 18.$$



Vježba 297

Zbroj duljina stranica trokuta iznosi 30, a duljine visina spuštenih na te stranice jesu 8 i 12. Nađite ploštinu trokuta.

Rezultat: 72.

Zadatak 298 (Dubravka, srednja škola)

Duljina hipotenuze c i duljina katete a pravokutnog trokuta su dva uzastopna prirodna broja. Kvadrat katete b tog trokuta jednak je:

$$A.\ (a+c)^2 \qquad B.\ a+c \qquad C.\ c-a \qquad D.\ (c-a)^2$$

Rješenje 298

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Budući da su kateta a i hipotenuza c pravokutnog trokuta dva uzastopna prirodna broja možemo zapisati:

$$\left.\begin{array}{l} a=n \\ c=n+1 \end{array}\right\}.$$

Kvadrat katete b iznosi:

$$b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=(n+1)^2-n^2 \Rightarrow b^2=n^2+2\cdot n+1-n^2 \Rightarrow b^2=n^2+2\cdot n+1-n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=2\cdot n+1 \Rightarrow b^2=n+n+1 \Rightarrow b^2=n+(n+1) \Rightarrow b^2=a+c.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Budući da su kateta a i hipotenuza c pravokutnog trokuta dva uzastopna prirodna broja, vrijedi:

$$c=a+1.$$

Kvadrat katete b je:

$$b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=(a+1)^2-a^2 \Rightarrow b^2=a^2+2\cdot a+1-a^2 \Rightarrow b^2=a^2+2\cdot a+1-a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=2\cdot a+1 \Rightarrow b^2=a+a+1 \Rightarrow b^2=a+(a+1) \Rightarrow b^2=a+c.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 298

Duljina hipotenuze c i duljina katete b pravokutnog trokuta su dva uzastopna prirodna broja. Kvadrat katete a tog trokuta jednak je:

$$A.\ (b+c)^2 \qquad B.\ b+c \qquad C.\ c-b \qquad D.\ (c-b)^2$$

Rezultat: B.

Zadatak 299 (Alen, srednja škola)

Visina trokuta na stranicu a iznosi $v_a = 2$. Na kojoj udaljenosti od stranice a treba povući pravac paralelan sa stranicom a tako da trokut bude podijeljen na dva dijela jednakih površina?

$$A.\ 2-\sqrt{2} \qquad B.\ \frac{1}{2} \qquad C.\ \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad D.\ \frac{2}{3}$$

Rješenje 299

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

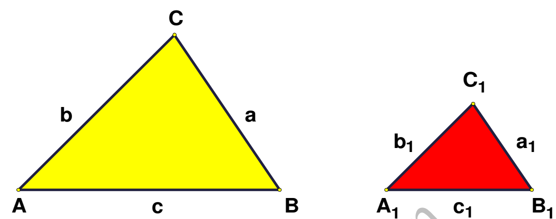
Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

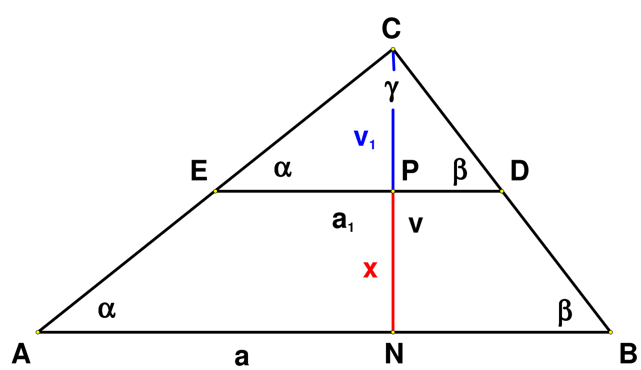
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Neka pravac usporedan s bazom a siječe stranice u točkama D i E, $D \in \overline{BC}$ i $E \in \overline{AC}$.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = a \;,\; |NC| = v \;,\; |NP| = x \;,\; |PC| = v_1 \;,\; |ED| = a_1$$

$$\angle CAB = \angle CED \;,\; \angle ABC = \angle EDC$$

Trokuti EDC i ABC slični su jer imaju jednake kutove pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{a} = t \\ \frac{v_1}{v} = t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{a} = t \;/\cdot a \\ \frac{v_1}{v} = t \;/\cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = t\cdot a \\ v_1 = t\cdot v \end{array}\right\}.$$

Površina trokuta EDC jednaka je polovici površine trokuta ABC.

$$P_{EDC} = \frac{1}{2}\cdot P_{ABC} \Rightarrow \frac{a_1\cdot v_1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\cdot v}{2} \Rightarrow \frac{t\cdot a\cdot t\cdot v}{2} = \frac{a\cdot v}{4} \Rightarrow \frac{t^2\cdot a\cdot v}{2} = \frac{a\cdot v}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t^2\cdot a\cdot v}{2} = \frac{a\cdot v}{4} \;/\cdot \frac{2}{a\cdot v} \Rightarrow t^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow t^2 = \frac{2}{4} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{4}} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = t\cdot v \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot v \Rightarrow [\,v = 2\,] \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2 \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2}.$$

Udaljenost na kojoj treba povući pravac paralelan sa stranicom a iznosi:

$$|NP| = |NC| - |PC| \Rightarrow x = v - v_1 = 2 - \sqrt{2}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 299

Visina trokuta na stranicu a iznosi $v_a = 4$. Na kojoj udaljenosti od stranice a treba povući pravac paralelan sa stranicom a tako da trokut bude podijeljen na dva dijela jednakih površina?

$$A.\ 4 - 2\cdot\sqrt{2} \qquad B.\ \sqrt{2} - 1 \qquad C.\ 3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad D.\ \frac{2}{3}$$

Rezultat: A.

Zadatak 300 (Matko, gimnazija)

U trokutu s kutovima α, β, γ je $\cos\alpha = \frac{7}{8}$, $\cos\beta = \frac{11}{16}$. Koliki je cos γ?

$$A.\ -\frac{1}{4} \qquad B.\ -\frac{1}{3} \qquad C.\ \frac{2}{3} \qquad D.\ \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Rješenje 300

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad,\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \quad , \quad \cos\left(180^0-\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Prvo izračunamo sin α i sin β.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{7}{8}\\ \cos\beta=\frac{11}{16}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\\ \cos^2\beta+\sin^2\beta=1\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\sin^2\alpha=1\\ \left(\frac{11}{16}\right)^2+\sin^2\beta=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{49}{64}+\sin^2\alpha=1\\ \frac{121}{256}+\sin^2\beta=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin^2\alpha=1-\frac{49}{64}\\ \sin^2\beta=1-\frac{121}{256}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin^2\alpha=\frac{1}{1}-\frac{49}{64}\\ \sin^2\beta=\frac{1}{1}-\frac{121}{256}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin^2\alpha=\frac{64-49}{64}\\ \sin^2\beta=\frac{256-121}{256}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin^2\alpha=\frac{15}{64}\\ \sin^2\beta=\frac{135}{256}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin^2\alpha=\frac{15}{64} \ / \sqrt{}\\ \sin^2\beta=\frac{135}{256} \ / \sqrt{}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\sqrt{\frac{15}{64}}\\ \sin\beta=\sqrt{\frac{135}{256}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{64}}\\ \sin\beta=\frac{\sqrt{135}}{\sqrt{256}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}\\ \sin\beta=\frac{\sqrt{9\cdot 15}}{16}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}\\ \sin\beta=\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{15}}{16}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8}\\ \sin\beta=\frac{3\cdot\sqrt{15}}{16}\end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{7}{8} \ , \ \cos\beta=\frac{11}{16}\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{8} \ , \ \sin\beta=\frac{3\cdot\sqrt{15}}{16}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{16}-\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{15}}{16} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{77}{128}-\frac{3\cdot\left(\sqrt{15}\right)^2}{128} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{77}{128}-\frac{3\cdot 15}{128} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{77}{128}-\frac{45}{128} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{77-45}{128} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{32}{128} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{32}{128} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}.$$

Vrijednost cos γ je:

$$\cos\gamma = \left[\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma=180^0 \\ \gamma=180^0-(\alpha+\beta) \end{array}\right] = \cos\left(180^0-(\alpha+\beta)\right) = -\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{4}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 300

U trokutu s kutovima α, β, γ je $\cos\beta = \frac{7}{8}$, $\cos\gamma = \frac{11}{16}$. Koliki je cos α?

$A.\ -\frac{1}{4}$ $B.\ -\frac{1}{3}$ $C.\ \frac{2}{3}$ $D.\ \frac{\sqrt{2}}{3}$

Rezultat: A.