Zadatak 261 (Mery, gimnazija)

Izvedi formulu za ploštinu trokuta ABC, ako je zadano a + b, c, γ.

Rješenje 261

Ponovimo!

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Uporabom poučka o kosinusu izračunat ćemo umnožak a · b i uvrstiti u formulu za ploštinu trokuta.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \left(a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b\right) - 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\right) - 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow c^2 = (a+b)^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot (1 + \cos\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot b \cdot (1 + \cos\gamma) = (a+b)^2 - c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot b \cdot (1 + \cos\gamma) = (a+b)^2 - c^2 \,/ \cdot \frac{1}{2 \cdot (1 + \cos\gamma)} \Rightarrow a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2 \cdot (1 + \cos\gamma)}.$$

Ploština trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma \\ a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2 \cdot (1 + \cos\gamma)} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2 \cdot (1 + \cos\gamma)} \cdot \sin\gamma \Rightarrow P = \frac{1}{4} \frac{(a+b)^2 - c^2}{1 + \cos\gamma} \cdot \sin\gamma.$$

Vježba 261

Izvedi formulu za ploštinu trokuta ABC, ako je zadano b + c, a, α.

Rezultat: $P = \frac{1}{4} \frac{(b+c)^2 - a^2}{1 + \cos\alpha} \cdot \sin\alpha.$

Zadatak 262 (Mery, gimnazija)

Ako je zadan opseg pravokutnog trokuta O i mjera kuta α, kolike su duljine stranica trokuta?

Rješenje 262

Ponovimo!

$$a = b \Rightarrow b = a \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

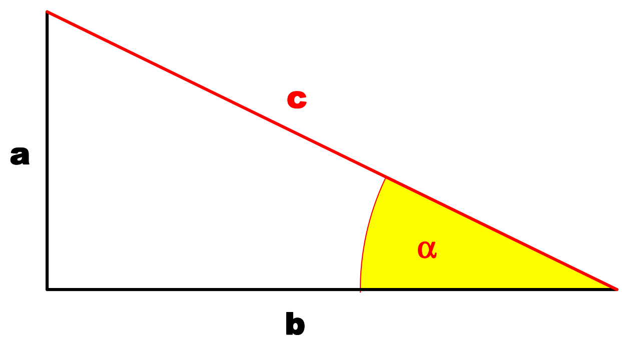
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O = a + b + c.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$



Uporabom funkcija sinus i kosinus duljine kateta a i b izrazit ćemo preko kuta α i duljine hipotenuze c.

$$\left.\begin{matrix}\sin\alpha=\frac{a}{c}\\ \cos\alpha=\frac{b}{c}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\sin\alpha=\frac{a}{c}\ /\cdot c\\ \cos\alpha=\frac{b}{c}\ /\cdot c\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}c\cdot\sin\alpha=a\\ c\cdot\cos\alpha=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=c\cdot\sin\alpha\\ b=c\cdot\cos\alpha\end{matrix}\right\}.$$

Pomoću formule za opseg trokuta izračunamo c.

$$O=a+b+c\ \Rightarrow\left[\begin{matrix}a=c\cdot\sin\alpha\\ b=c\cdot\cos\alpha\end{matrix}\right]\Rightarrow\ O=c\cdot\sin\alpha+c\cdot\cos\alpha+c\ \Rightarrow\ O=c\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ O=c\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\ /\cdot\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}\ \Rightarrow\ \frac{O}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}=c\ \Rightarrow\ c=\frac{O}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}.$$

Duljine kateta iznose:

$$\left.\begin{matrix}a=c\cdot\sin\alpha\\ b=c\cdot\cos\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[c=\frac{O}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}\right]\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=\frac{O}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}\cdot\sin\alpha\\ b=\frac{O}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}\cdot\cos\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=\frac{O\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}\\ b=\frac{O\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}\end{matrix}\right\}.$$

Vježba 262

Ako je zadan opseg pravokutnog trokuta O i mjera kuta β, kolike su duljine stranica trokuta?

Rezultat: $c=\frac{O}{\cos\beta+\sin\beta+1}\ ,\ a=\frac{O\cdot\cos\beta}{\cos\beta+\sin\beta+1}\ ,\ b=\frac{O\cdot\sin\beta}{\cos\beta+\sin\beta+1}.$

Zadatak 263 (Nataša, TUPŠ)

Ploština pravokutnog trokuta je 12 cm^2. Jedna je njegova kateta duljine 6 cm. Kolika je duljina njegove hipotenuze zaokružena na dvije decimale?

$A.\ 4.47\ cm \qquad B.\ 5.66\ cm \qquad C.\ 6.83\ cm \qquad D.\ 7.21\ cm$

Rješenje 263

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Budući da je zadana ploština pravokutnog trokuta i duljina jedne katete, možemo izračunati duljinu druge njegove katete.

$$\left.\begin{matrix} P = 12 \\ a = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[P = \frac{a \cdot b}{2}\right] \Rightarrow 12 = \frac{6 \cdot b}{2} \Rightarrow 12 = \frac{6 \cdot b}{2} \Rightarrow 12 = 3 \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot b = 12 \Rightarrow 3 \cdot b = 12 \ / : 3 \Rightarrow b = 4.$$

Duljinu hipotenuze c dobijemo uporabom Pitagorinog poučka.

$$\left.\begin{matrix} a = 6 \\ b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[c^2 = a^2 + b^2\right] \Rightarrow c^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow c^2 = 36 + 16 \Rightarrow c^2 = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 52 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow c = \sqrt{52} \Rightarrow c = 7.211103 \Rightarrow c \approx 7.21.$$

Duljina hipotenuze zaokružena na dvije decimale je 7.21 cm.
Odgovor je pod D.

Vježba 263

Ploština pravokutnog trokuta je 12 cm^2. Jedna je njegova kateta duljine 4 cm. Kolika je duljina njegove hipotenuze zaokružena na dvije decimale?

$A.\ 4.47\ cm \qquad B.\ 5.66\ cm \qquad C.\ 6.83\ cm \qquad D.\ 7.21\ cm$

Rezultat: D.

Zadatak 264 (Luc, gimnazija)

Kolika je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, ako je a – b = 23, α – β = 28°?

Rješenje 264

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta. Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^0.$$

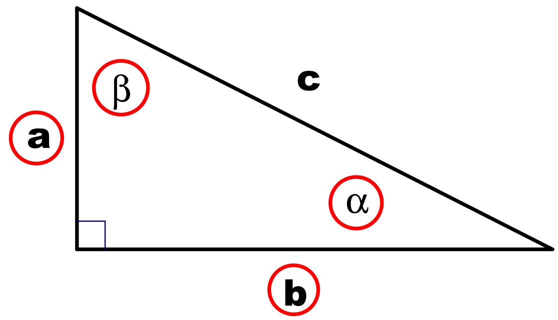
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

$$a = b \Rightarrow b = a \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Prvo ćemo izračunati mjeru jednog od dva šiljasta kuta pravokutnog trokuta. Na primjer kut α:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=90^{0}\\ \alpha-\beta=28^{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot\alpha=118^{0} \Rightarrow 2\cdot\alpha=118^{0} \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=59^{0}.$$



Sada duljina hipotenuze c iznosi:

$$a-b=23 \Rightarrow a-b=23 \;/\cdot\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{23}{c} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{a}{c}\\ \\ \cos\alpha=\dfrac{b}{c}\end{array}\right] \Rightarrow \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{23}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{1}=\frac{23}{c} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{c}{23} \Rightarrow \frac{c}{23}=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{23}=\frac{1}{\sin\alpha-\cos\alpha} \;/\cdot 23 \Rightarrow c=\frac{23}{\sin\alpha-\cos\alpha} \Rightarrow c=\frac{23}{\sin 59^{0}-\cos 59^{0}} \Rightarrow c=67.23.$$

Vježba 264

Kolika je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, ako je a – 23 = b, α – 28° = β?

Rezultat: 67.23.

Zadatak 265 (Luc, gimnazija)

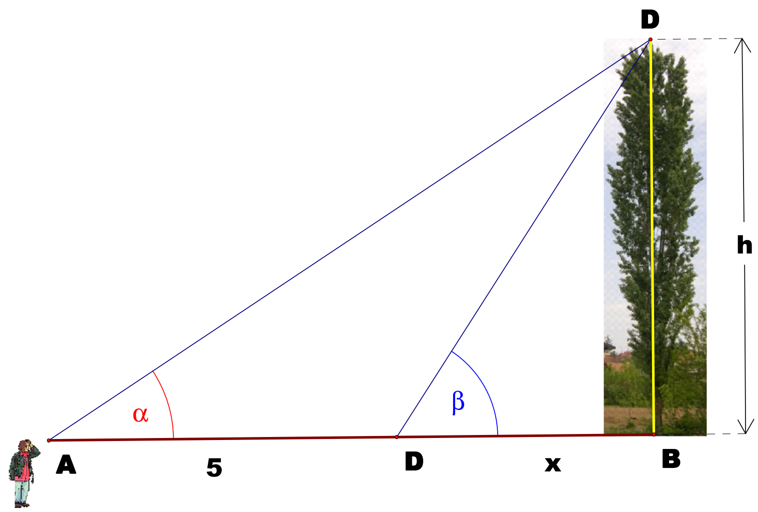
Promatrač vidi vrh stabla pod kutom od 32°. Kada se primakne stablu za 5 m vidi vrh pod kutom od 43°. Koliko je visoko stablo?

Rješenje 265

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$



Sa slike vidi se:

$$|AD|=5\ ,\ |DB|=x\ ,\ |AB|=5+x\ ,\ |BC|=h\ ,\ \angle CAB=\alpha=32^{0}\ ,\ \angle CDB=\beta=43^{0}$$

Uočimo pravokutne trokute ΔABC i ΔDBC i pomoću funkcije tangens dobijemo:

- ΔABC

$$tg\,\alpha=\frac{|BC|}{|AB|}\ \Rightarrow\ tg\,\alpha=\frac{h}{5+x}\ \Rightarrow\ tg\,\alpha=\frac{h}{5+x}\ /\cdot(5+x)\ \Rightarrow\ (5+x)\cdot tg\,\alpha=h\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5\cdot tg\,\alpha+x\cdot tg\,\alpha=h\ \Rightarrow\ x\cdot tg\,\alpha=h-5\cdot tg\,\alpha\ \Rightarrow\ x\cdot tg\,\alpha=h-5\cdot tg\,\alpha\ /\cdot\frac{1}{tg\,\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{h-5\cdot tg\,\alpha}{tg\,\alpha}.$$

- ΔDBC

$$tg\,\beta=\frac{|BC|}{|DB|}\ \Rightarrow\ tg\,\beta=\frac{h}{x}\ \Rightarrow\ tg\,\beta=\frac{h}{x}\ /\cdot\frac{x}{tg\,\beta}\ \Rightarrow\ x=\frac{h}{tg\,\beta}.$$

Iz sustava jednadžbi nađe se visina h stabla.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{h-5\cdot tg\,\alpha}{tg\,\alpha} \\ x=\dfrac{h}{tg\,\beta}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \frac{h-5\cdot tg\,\alpha}{tg\,\alpha}=\frac{h}{tg\,\beta}\ \Rightarrow\ \frac{h-5\cdot tg\,\alpha}{tg\,\alpha}=\frac{h}{tg\,\beta}\ /\cdot tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg\,\beta\cdot(h-5\cdot tg\,\alpha)=h\cdot tg\,\alpha\ \Rightarrow\ h\cdot tg\,\beta-5\cdot tg\,\alpha\cdot tg\,\beta=h\cdot tg\,\alpha\ \Rightarrow\ h\cdot tg\,\beta-h\cdot tg\,\alpha=5\cdot tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ h\cdot(tg\,\beta-tg\,\alpha)=5\cdot tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\ \Rightarrow\ h\cdot(tg\,\beta-tg\,\alpha)=5\cdot tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\ /\cdot\frac{1}{tg\,\beta-tg\,\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ h=\frac{5\cdot tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}{tg\,\beta-tg\,\alpha}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\alpha=32^{0}\\ \beta=43^{0}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ h=\frac{5\cdot tg\,32^{0}\cdot tg\,43^{0}}{tg\,43^{0}-tg\,32^{0}}\ \Rightarrow\ h=9.47\ m.$$

Vježba 265

Promatrač vidi vrh stabla pod kutom od 32°. Kada se primakne stablu za 500 cm vidi vrh pod kutom od 43°. Koliko je visoko stablo?

Rezultat: 9.47 m.

Zadatak 266 (Domagoj, srednja škola)

Zadan je trokut ABC čiji kutovi zadovoljavaju relaciju $\alpha - \beta = 2 \cdot \gamma$. Dokažite da je kut α tupi kut.

Rješenje 266

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Dva polupravca sa zajedničkim početkom dijele ravninu na dva dijela. Svaki od tih dijelova zajedno s polupravcima zove se kut. Kut je skup točaka ravnine određen dvama polupravcima sa zajedničkim početkom. Kutovi veći od pravog kuta (90°), a manji od ispruženog kuta (180°) zovu se tupi kutovi.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Iz sustava

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \\ \alpha - \beta = 2 \cdot \gamma \end{array} \right\},$$

slijedi

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 180^0 - \gamma \\ \alpha - \beta = 2 \cdot \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot \alpha = 180^0 + \gamma \Rightarrow 2 \cdot \alpha = 180^0 + \gamma \ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^0 + \frac{\gamma}{2}.$$

Kut α je tupi kut.

Vježba 266

Zadan je trokut ABC čiji kutovi zadovoljavaju relaciju $\beta - \gamma = 2 \cdot \alpha$. Dokažite da je kut β tupi kut.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 267 (Goran, gimnazija)

Dokaži da uz uobičajene oznake u trokutu vrijedi

$$\left(a^2 - b^2 + c^2\right) \cdot tg\,\beta = \left(a^2 + b^2 - c^2\right) \cdot tg\,\gamma = \left(b^2 + c^2 - a^2\right) \cdot tg\,\alpha.$$

Rješenje 267

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \;\Rightarrow\; \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

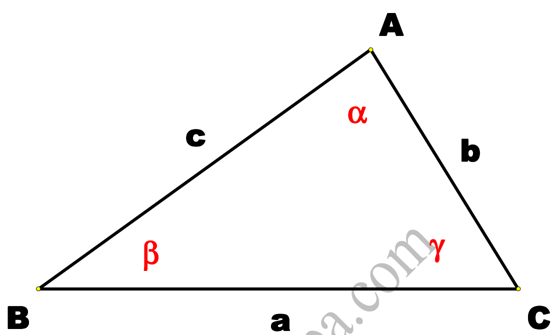
Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad , \qquad \left.\begin{matrix} x = n \\ y = n \end{matrix}\right\} \Rightarrow\; x = y.$$



Neka je

$$\left.\begin{matrix} x = \left(a^2 - b^2 + c^2\right) \cdot tg\,\beta \\ y = \left(a^2 + b^2 - c^2\right) \cdot tg\,\gamma \end{matrix}\right\},$$

tada vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} x = \left(a^2 - b^2 + c^2\right) \cdot tg\,\beta \\ y = \left(a^2 + b^2 - c^2\right) \cdot tg\,\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot a \cdot c} \cdot 2 \cdot a \cdot c \cdot tg\,\beta \\ y = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot tg\,\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2 \cdot a \cdot c} \cdot 2 \cdot a \cdot c \cdot tg\,\beta \\ y = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot tg\,\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = \cos\beta \cdot 2 \cdot a \cdot c \cdot tg\,\beta \\ y = \cos\gamma \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot tg\,\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \cdot tg\,\beta \\ y = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \cdot tg\,\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} \\ y = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} \\ y = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta \\ y = 2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta \\ y = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta\right) \\ y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \cdot P \\ y = 4 \cdot P \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2 - b^2 + c^2\right) \cdot tg\,\beta = \left(a^2 + b^2 - c^2\right) \cdot tg\,\gamma.$$

Dokaz gotov.

Vježba 267

Dokaži da uz uobičajene oznake u trokutu vrijedi

$$\left(a^2 - b^2 + c^2\right) \cdot tg\,\beta = \left(a^2 + b^2 - c^2\right) \cdot tg\,\gamma = \left(b^2 + c^2 - a^2\right) \cdot tg\,\alpha.$$

Rezultat: Na isti način dokaže se i preostala jednakost.

Zadatak 268 (Bond, gimnazija)

Ako točke A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) i C(x_3, y_3) pripadaju istom pravcu (ako su kolinearne) njihove koordinate zadovoljavaju relaciju $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$. Dokažite.

Rješenje 268

Ponovimo!

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Ploština trokuta ΔABC kojemu su vrhovi točke A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) i C(x_3, y_3) jednaka je

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot \left(y_2 - y_3\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2\right) \right|.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da točke A, B i C pripadaju istom pravcu, površina trokuta ABC jednaka je nuli.

$$\left.\begin{matrix} P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot \left(y_2 - y_3\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2\right) \right| \\ P_{ABC} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot \left(y_2 - y_3\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot \left(y_2 - y_1 - y_3 + y_1\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot \left(\left(y_2 - y_1\right) - \left(y_3 - y_1\right)\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot \left(y_2 - y_1\right) - x_1 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) - x_3 \cdot \left(y_2 - y_1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) - x_1 \cdot \left(y_3 - y_1\right) = x_3 \cdot \left(y_2 - y_1\right) - x_1 \cdot \left(y_2 - y_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) - x_1 \cdot \left(y_3 - y_1\right) = x_3 \cdot \left(y_2 - y_1\right) - x_1 \cdot \left(y_2 - y_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y_3 - y_1\right) \cdot \left(x_2 - x_1\right) = \left(y_2 - y_1\right) \cdot \left(x_3 - x_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_3 - y_1)\cdot(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)\cdot(x_3 - x_1) \;/\cdot \frac{1}{(y_3 - y_1)\cdot(x_3 - x_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}.$$

Vježba 268

Ako točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ pripadaju istom pravcu (ako su kolinearne) njihove koordinate zadovoljavaju relaciju $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}$. Dokažite.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 269 (Božo, srednja škola)

Odredite duljinu stranice c, ako je zadano: $a = 2\cdot\sqrt{2},\ b = 2\cdot\sqrt{3},\ \gamma = 75^0$.

$A.\ \sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\quad B.\ \sqrt{3}+\sqrt{6}$ $\quad C.\ \sqrt{2}+\sqrt{6}$ $\quad D.\ \sqrt{3}-\sqrt{2}$

Rješenje 269

Ponovimo!

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sin 30^0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \left(a\cdot\sqrt{b}\right)^2 = a^2\cdot b.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i Jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

$$\cos 75^0 = \cos\left(45^0 + 30^0\right) = \cos 45^0\cdot\cos 30^0 - \sin 45^0\cdot\sin 30^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Primijenimo kosinusov poučak.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \Rightarrow c^2 = \left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\cdot\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 2^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 4\cdot 2 + 4\cdot 3 - 4\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow c^2 = 4\cdot 2 + 4\cdot 3 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 8 + 12 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \Rightarrow c^2 = 8 + 12 - 2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 8 + 12 - 2\cdot 6 + 2\cdot\sqrt{12} \Rightarrow c^2 = 8 + 12 - 12 + 2\cdot\sqrt{12} \Rightarrow c^2 = 8 + 12 - 12 + 2\cdot\sqrt{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 8 + 2\cdot\sqrt{12} \Rightarrow c^2 = 8 + 2\cdot\sqrt{2\cdot 6} \Rightarrow c^2 = 8 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} \Rightarrow c^2 = 2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} + \left(\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow c^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow c^2 = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 \; /\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2} \Rightarrow c = \sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 269

Odredite duljinu stranice a, ako je zadano: $b = 2\cdot\sqrt{2},\ c = 2\cdot\sqrt{3},\ \alpha = 75^0.$

$A.\ \sqrt{2}+\sqrt{3}$ $B.\ \sqrt{3}+\sqrt{6}$ $C.\ \sqrt{2}+\sqrt{6}$ $D.\ \sqrt{3}-\sqrt{2}$

Rezultat: C.

Zadatak 270 (Jelena, srednja škola)

Umnožak duljina stranica trokuta je jednak 21840. Umnožak polumjera trokutu opisane i upisane kružnice je jednak 130. Koliki je opseg trokuta?

Rješenje 270

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O = a + b + c.$$

Poluopseg trokuta je:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \frac{O}{2}.$$

Ploština trokuta

$$P = r\cdot s \quad , \quad P = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R},$$

gdje je r polumjer trokutu upisane kružnice, s poluopseg trokuta; a, b, c duljine stranica trokuta, R polumjer trokutu opisane kružnice.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \ne 0 \;,\; n \ne 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} s = \frac{O}{2} \\ P = r\cdot s \\ P = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P = r\cdot\frac{O}{2} \\ P = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda} \\ \text{komparacije}\end{bmatrix} \Rightarrow r\cdot\frac{O}{2} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\cdot\frac{O}{2} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} \;/\cdot\frac{2}{r} \Rightarrow O = \frac{2\cdot a\cdot b\cdot c}{4\cdot R\cdot r} \Rightarrow O = \frac{2\cdot a\cdot b\cdot c}{4\cdot R\cdot r} \Rightarrow O = \frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot R\cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} a \cdot b \cdot c = 21840 \\ R \cdot r = 130 \end{matrix}\right] \Rightarrow O = \frac{21840}{2 \cdot 130} \Rightarrow O = 84.$$

Vježba 270

Umnožak duljina stranica trokuta je jednak 43680. Umnožak polumjera trokutu opisane i upisane kružnice je jednak 260. Koliki je opseg trokuta?

Rezultat: 84.

Zadatak 271 (Jelena, srednja škola)

Duljine dviju stranica trokuta su $a = 5 \cdot \sqrt{2}$ i $b = 10$. Polumjer opisane kružnice je $R = 5 \cdot \sqrt{2}$. Koliki su kutovi trokuta?

Rješenje 271

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot R \quad , \quad \frac{a}{\sin \alpha} = 2 \cdot R \quad , \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2 \cdot R \quad , \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2 \cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Računamo kut α.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2 \cdot R \Rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = 2 \cdot R \ / \cdot \frac{\sin \alpha}{2 \cdot R} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{2 \cdot R} \Rightarrow \left[\begin{matrix} a = 5 \cdot \sqrt{2} \\ R = 5 \cdot \sqrt{2} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 30^0.$$

Računamo kut β.

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2 \cdot R \Rightarrow \frac{b}{\sin \beta} = 2 \cdot R \ / \cdot \frac{\sin \beta}{2 \cdot R} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{2 \cdot R} \Rightarrow \left[\begin{matrix} b = 10 \\ R = 5 \cdot \sqrt{2} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{10}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{10}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \beta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ \Rightarrow \ \beta = 45^{0}.$$

Računamo kut γ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{0} \ \Rightarrow \ \gamma = 180^{0} - (\alpha + \beta) \ \Rightarrow \ \gamma = 180^{0} - \left(30^{0} + 45^{0}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \gamma = 180^{0} - 75^{0} \ \Rightarrow \ \gamma = 105^{0}.$$

Vježba 271

Duljine dviju stranica trokuta su $a = 10 \cdot \sqrt{2}$ i $b = 20.$ Polumjer opisane kružnice je $R = 10 \cdot \sqrt{2}.$ Koliki su kutovi trokuta?

Rezultat: $\alpha = 30^{0}, \ \beta = 45^{0}, \ \gamma = 105^{0}.$

Zadatak 272 (Josip, tehnička škola)

Zbroj polumjera opisane i upisane kružnice pravokutnog trokuta jednak je 78. Koliki je zbroj kateta tog trokuta?

Rješenje 272

Ponovimo!

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ako su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a R i r polumjeri opisane i upisane kružnice pravokutnog trokuta, tada vrijedi:

$$R = \frac{c}{2}, \qquad r = \frac{a+b-c}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} R = \frac{c}{2} \\ r = \frac{a+b-c}{2} \\ R + r = 78 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = 78 \ \Rightarrow \ \frac{c+a+b-c}{2} = 78 \ \Rightarrow \ \frac{c+a+b-c}{2} = 78 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a+b}{2} = 78 \ \Rightarrow \ \frac{a+b}{2} = 78 \ / \cdot 2 \ \Rightarrow \ a + b = 156.$$

Vježba 272

Zbroj polumjera opisane i upisane kružnice pravokutnog trokuta jednak je 100. Koliki je zbroj kateta tog trokuta?

Rezultat: 200.

Zadatak 273 (Josip, tehnička škola)

Opseg trokuta jednak je 200. Duljina hipotenuze jednaka je 78. Koliki je polumjer trokutu upisane kružnice?

Rješenje 273

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-c=b-d \\ c-a=d-b \end{array}\right\}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \quad , \quad a \cdot b+a \cdot c=a \cdot (b+c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O=a+b+c.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ako su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a r polumjer upisane kružnice pravokutnog trokuta, tada vrijedi:

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} O=a+b+c \\ r=\dfrac{a+b-c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O=a+b+c \\ r=\dfrac{a+b+c-2 \cdot c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O=a+b+c \\ r=\dfrac{(a+b+c)-2 \cdot c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{O-2 \cdot c}{2} \Rightarrow r=\frac{O}{2}-\frac{2 \cdot c}{2} \Rightarrow r=\frac{O}{2}-\frac{2 \cdot c}{2} \Rightarrow r=\frac{O}{2}-c \Rightarrow \begin{bmatrix} O=200 \\ c=78 \end{bmatrix} \Rightarrow r=\frac{200}{2}-78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{200}{2}-78 \Rightarrow r=100-78 \Rightarrow r=22.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} O=a+b+c \\ r=\dfrac{a+b-c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O=a+b+c \\ r=\dfrac{a+b-c}{2} \ / \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O=a+b+c \\ 2 \cdot r=a+b-c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r-O=a+b-c-(a+b+c) \Rightarrow 2 \cdot r-O=a+b-c-a-b-c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r-O=a+b-c-a-b-c \Rightarrow 2 \cdot r-O=-2 \cdot c \Rightarrow 2 \cdot r=O-2 \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r=O-2 \cdot c \ / : 2 \Rightarrow r=\frac{O}{2}-c \Rightarrow \begin{bmatrix} O=200 \\ c=78 \end{bmatrix} \Rightarrow r=\frac{200}{2}-78 \Rightarrow$$

Vježba 273

Opseg trokuta jednak je 400. Duljina hipotenuze jednaka je 156. Koliki je polumjer trokutu upisane kružnice?

Rezultat: 44.

Zadatak 273 (Josip, tehnička škola)

Opseg trokuta jednak je 200. Duljina hipotenuze jednaka je 78. Koliki je polumjer trokutu upisane kružnice?

Rješenje 273

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad \left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a-c=b-d \\ c-a=d-b \end{matrix}\right\}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \quad , \quad a \cdot b+a \cdot c=a \cdot (b+c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O=a+b+c.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ako su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a r polumjer upisane kružnice pravokutnog trokuta, tada vrijedi:

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

1.inačica

$$\left.\begin{matrix} O=a+b+c \\ r=\frac{a+b-c}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} O=a+b+c \\ r=\frac{a+b+c-2 \cdot c}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} O=a+b+c \\ r=\frac{(a+b+c)-2 \cdot c}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{O-2 \cdot c}{2} \Rightarrow r=\frac{O}{2}-\frac{2 \cdot c}{2} \Rightarrow r=\frac{O}{2}-\frac{2 \cdot c}{2} \Rightarrow r=\frac{O}{2}-c \Rightarrow \begin{bmatrix} O=200 \\ c=78 \end{bmatrix} \Rightarrow r=\frac{200}{2}-78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{200}{2}-78 \Rightarrow r=100-78 \Rightarrow r=22.$$

2.inačica

$$\left.\begin{matrix} O=a+b+c \\ r=\frac{a+b-c}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} O=a+b+c \\ r=\frac{a+b-c}{2} \ / \cdot 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} O=a+b+c \\ 2 \cdot r=a+b-c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r-O=a+b-c-(a+b+c) \Rightarrow 2 \cdot r-O=a+b-c-a-b-c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r-O=a+b-c-a-b-c \Rightarrow 2 \cdot r-O=-2 \cdot c \Rightarrow 2 \cdot r=O-2 \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r=O-2 \cdot c \ / : 2 \Rightarrow r=\frac{O}{2}-c \Rightarrow \begin{bmatrix} O=200 \\ c=78 \end{bmatrix} \Rightarrow r=\frac{200}{2}-78 \Rightarrow$$

Vježba 273

Opseg trokuta jednak je 400. Duljina hipotenuze jednaka je 156. Koliki je polumjer trokutu upisane kružnice?

Rezultat: 44.

Zadatak 274 (Tanja, srednja škola)

Dvije visine trokuta ABC su $v_a = 6$ i $v_b = 9$. Izračunajte duljine stranica a i b, ako je $a - b = 4$.

Rješenje 274

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} - c = \frac{a - b \cdot c}{b} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

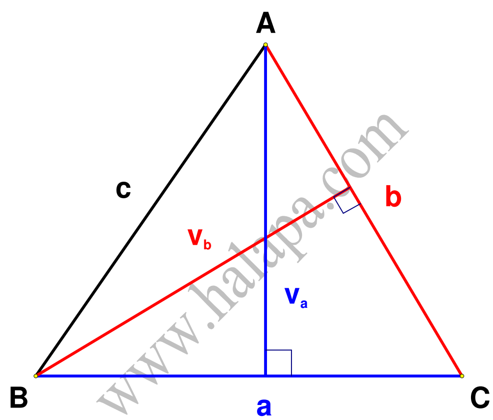
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.



Ploštinu trokuta računamo na dva načina

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2}$$

pa duljine stranica a i b iznose:

$$\left.\begin{matrix} P = \dfrac{a \cdot v_a}{2} \\ P = \dfrac{b \cdot v_b}{2} \\ a - b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{a \cdot v_a}{2} = \dfrac{b \cdot v_b}{2} \\ a - b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dfrac{a \cdot v_a}{2} = \dfrac{b \cdot v_b}{2} \ / \cdot \dfrac{2}{v_a} \\ a - b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \dfrac{b \cdot v_b}{v_a} \\ a - b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_a = 6 \\ v_b = 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \dfrac{9 \cdot b}{6} \\ a - b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \dfrac{9 \cdot b}{6} \\ a - b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \dfrac{3 \cdot b}{2} \\ a - b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \dfrac{3}{2} \cdot b \\ a - b = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot b - b = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot b = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot b = 4 \ / \cdot 2 \Rightarrow b = 8.$$

Računamo duljinu stranice a.

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{3}{2}\cdot b \\ b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{3}{2}\cdot 8 \Rightarrow a=\frac{3}{2}\cdot 8 \Rightarrow a=12.$$

Vježba 274

Dvije visine trokuta ABC su $v_a = 12$ i $v_b = 18$. Izračunajte duljine stranica a i b, ako je $a - b = 8$.

Rezultat: a = 24, b = 16.

Zadatak 275 (Mihaela, gimnazija)

Na jednoj obali rijeke nalaze se točke A i B međusobno udaljene 40 metara iz kojih se nedostupna točka C na drugoj obali vidi pod kutovima $\angle BAC = 55^0 20'$ i $\angle CBA = 71^0 43'$. Izračunaj $|AC|$.

Rješenje 275

Ponovimo!

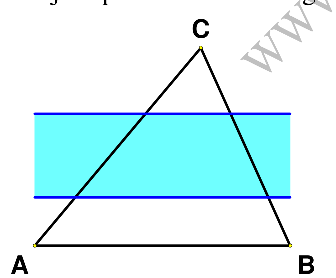
Rezolvirati znači jedinice – veličine višega reda pretvoriti u jedinice – veličine nižega reda. Tu množimo s pretvornicima.
Reducirati znači jedinice – veličine nižega reda pretvoriti u jedinice – veličine višega reda.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

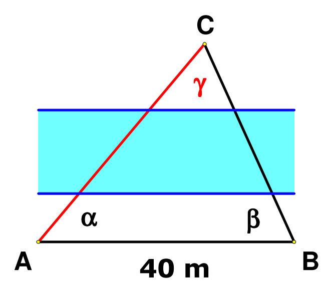
$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.





Sa slika vidi se:

$$|AB|=40\ m\ ,\ \angle BAC=\alpha=55^0 20'\ ,\ \angle CBA=\beta=71^0 43'\ ,\ \angle ACB=\gamma$$

Najprije odredimo mjeru kuta γ.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \gamma=180^0-(\alpha+\beta) \Rightarrow \gamma=180^0-\left(55^0 20'+71^0 43'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma=180^0-126^0 63' \Rightarrow \left[1^0=60'\right] \Rightarrow \gamma=179^0 60'-127^0 3' \Rightarrow \gamma=52^0 57'.$$

Primjenom sinusovog poučka imamo

$$\frac{|AC|}{\sin\angle CBA}=\frac{|AB|}{\sin\angle ACB} \Rightarrow \frac{|AC|}{\sin\beta}=\frac{|AB|}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{|AC|}{\sin\beta}=\frac{|AB|}{\sin\gamma}\ /\cdot\sin\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot |AB| \Rightarrow |AC| = \frac{\sin 71^0 43'}{\sin 52^0 57'} \cdot 40 \ m \Rightarrow |AC| = 47.59 \ m.$$

Vježba 275

Na jednoj obali rijeke nalaze se točka A i B međusobno udaljene 80 metara iz kojih se nedostupna točka C na drugoj obali vidi pod kutovima $\angle BAC = 55^0 20'$ i $\angle CBA = 71^0 43'$. Izračunaj | AC |.

Rezultat: 95.18 m.

Zadatak 276 (Valentina, gimnazija)

Izračunaj ploštinu trokuta kojemu su zadane duljine stranica $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{10}$ i $c = \sqrt{13}$.

Rješenje 276

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad , \quad \left(\sqrt{x}\right)^4 = x^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Ploština trokuta ΔABC kojemu su zadane duljine stranica a, b, c računa se pomoću Heronove formule

$$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \ , \ s = \frac{a+b+c}{2} - \text{poluopseg trokuta}.$$

Heronova formula može se napisati u obliku:

$$\boxed{P = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2 \cdot \left(a^4 + b^4 + c^4\right)}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \sqrt{5} \ , \ b = \sqrt{10} \ , \ c = \sqrt{13} \\ P = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 - 2 \cdot \left(a^4 + b^4 + c^4\right)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\left(\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2\right)^2 - 2 \cdot \left(\left(\sqrt{5}\right)^4 + \left(\sqrt{10}\right)^4 + \left(\sqrt{13}\right)^4\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(5+10+13)^2 - 2 \cdot (25+100+169)} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{28^2 - 2 \cdot 294} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{784 - 588} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{196} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot 14 \Rightarrow P = \frac{1}{4} \cdot 14 \Rightarrow P = \frac{7}{2}.$$

Vježba 276

Izračunaj ploštinu trokuta kojemu su zadane duljine stranica $a = \sqrt{20}$, $b = \sqrt{40}$ i $c = \sqrt{52}$.

Rezultat: 14.

Zadatak 277 (Sony, gimnazija)

Ako za stranice trokuta i tim stranicama suprotne kutove vrijedi jednakost $\frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, taj je trokut sigurno:

$A.$ pravokutan $\qquad B.$ jednakokračan $\qquad C.$ tupokutan $\qquad D.$ jednakostraničan

Rješenje 277

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Trokute dijelimo:

- prema odnosu među duljinama stranica

$$\begin{cases}\text{raznostraničan}\\ \text{jednakokračan}\\ \text{jednakostraničan}\end{cases}$$

- prema kutovima

$$\begin{cases}\text{šiljastokutan}\\ \text{tupokutan}\\ \text{pravokutan.}\end{cases}$$

Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki. Jednakostranični trokut ima tri jednaka kuta $\alpha = 60°$ i tri jednake stranice. Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º).
Tupokutni trokut je trokut koji ima jedan tupi kut, a ostala dva su šiljasta.
Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c\quad,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta\quad,\quad \sin 0=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\\ \frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\;/\cdot\frac{\sin\alpha}{b}\\ \frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\\ \frac{a}{b}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\beta=\cos\alpha\cdot\sin\beta\Rightarrow\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta=0\Rightarrow\sin(\alpha-\beta)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha-\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta.$$

Trokut je jednakokračan. Odgovor je pod B.

Vježba 277

Ako za stranice trokuta i tim stranicama suprotne kutove vrijedi jednakost $\frac{b}{c}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, taj je trokut sigurno:

$A.$ pravokutan $\qquad B.$ jednakokračan $\qquad C.$ tupokutan $\qquad D.$ jednakostraničan

Rezultat: B.

Zadatak 278 (Sony, gimnazija)

Ako za duljine stranica a, b i c i za površinu P trokuta ΔABC vrijedi $P=\frac{1}{4}\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right)$, onda je:

$$A.\ \alpha=30^0 \qquad B.\ \alpha=45^0 \qquad C.\ \alpha=60^0 \qquad D.\ \alpha=15^0$$

Rješenje 278

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Površina trokuta zadanog dvjema stranicama i kutom između njih

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

$$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad tg\,45^0=1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Preoblikujemo formulu za kosinusov poučak.

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha=b^2+c^2-a^2 \Rightarrow b^2+c^2-a^2=2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{1}{4}\cdot\left(b^2+c^2-a^2\right) \\ b^2+c^2-a^2=2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow P=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha.$$

Usporedbom formula za površinu trokuta dobije se mjera kuta α.

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha \\ P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \ /\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1 \Rightarrow tg\,\alpha=1 \Rightarrow \alpha=45^0.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 278

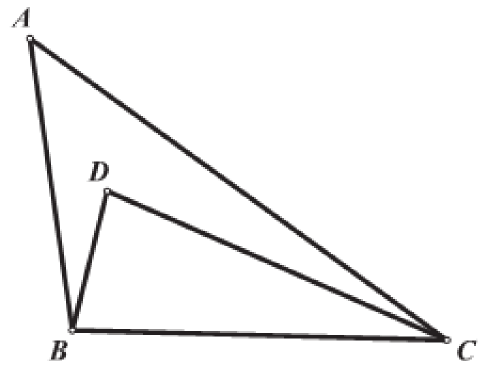
Ako za duljine stranica a, b i c i za površinu P trokuta ΔABC vrijedi $P=\frac{1}{4}\cdot\left(a^2+c^2-b^2\right)$, onda je:

$A.\ \beta=30^0$ $B.\ \beta=45^0$ $C.\ \beta=60^0$ $D.\ \beta=15^0$

Rezultat: B.

Zadatak 279 (4A, TUPŠ)

U trokutu ABC, prikazanome na skici, kutovi $\angle ABD$ i $\angle BCD$ imaju jednaku mjeru. Mjera kuta $\angle ACB$ je 50°, a kuta $\angle BDC$ je 85°. Odredite mjeru kuta $\angle BAC$.



Rješenje 279

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

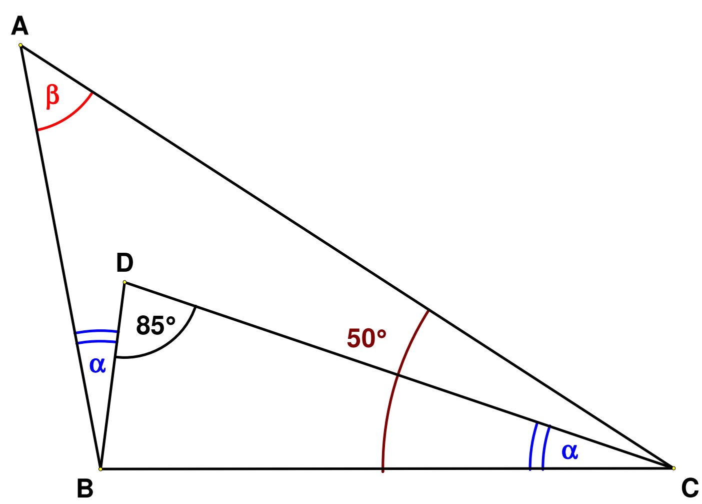
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice. Te dužine zovemo stranice četverokuta.
Zbroj svih kutova u četverokutu je 360º.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^0.$$

Puni kut ima 360°.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica



Sa slike vidi se:

$$\angle ABD = \angle BCD = \alpha \quad , \quad \angle ACB = 50^0 \quad , \quad \angle BDC = 85^0 \quad , \quad \angle BAC = \beta$$

Kut $\angle ACD$ jednak je razlici kutova $\angle ACB$ i $\angle BCD$.

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD \;\Rightarrow\; \angle ACD = 50^0 - \alpha.$$

U trokutu ΔBCD za kut $\angle DBC$ vrijedi:

$$\angle DBC + \angle BCD + \angle BDC = 180^0 \;\Rightarrow\; \angle DBC = 180^0 - \angle BCD - \angle BDC \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \angle DBC = 180^0 - \alpha - 85^0 \;\Rightarrow\; \angle DBC = 95^0 - \alpha.$$

Uočimo da je kut $\angle ABC$ jednak zbroju kutova $\angle ABD$ i $\angle DBC$.

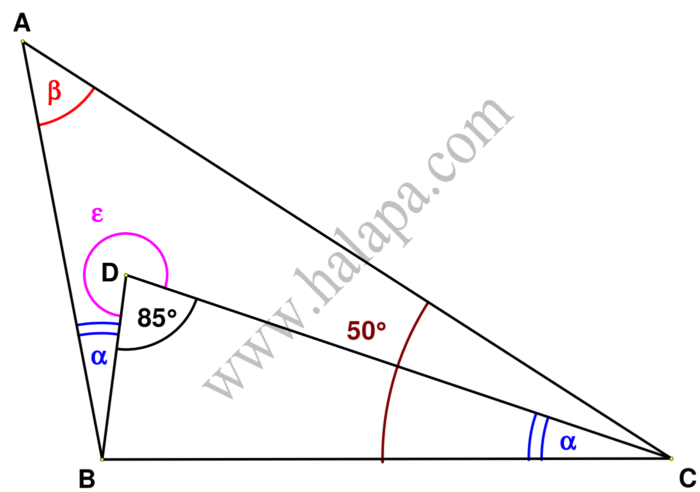
$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \;\Rightarrow\; \angle ABC = \alpha + 95^0 - \alpha \;\Rightarrow\; \angle ABC = \alpha + 95^0 - \alpha \;\Rightarrow\; \angle ABC = 95^0.$$

U trokutu ΔABC za traženi kut $\angle BAC = \beta$ vrijedi:

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^0 \;\Rightarrow\; \beta = 180^0 - \angle ACB - \angle ABC \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \beta = 180^0 - 50^0 - 85^0 \;\Rightarrow\; \beta = 35^0.$$

2.inačica



Sa slike vidi se:

$$\angle ABD = \angle BCD = \alpha \quad , \quad \angle ACB = 50^0 \quad , \quad \angle BDC = 85^0 \quad , \quad \angle BAC = \beta$$

Kut $\angle ACD$ jednak je razlici kutova $\angle ACB$ i $\angle BCD$.

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD \;\Rightarrow\; \angle ACD = 50^0 - \alpha.$$

Uočimo puni kut sa vrhom u točki D. Tada je:

$$\varepsilon + \angle BDC = 360^0 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 360^0 - \angle BDC \;\Rightarrow\; \varepsilon = 360^0 - 85^0 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 275^0.$$

U četverokutu ABCD za traženi kut $\angle BAC = \beta$ vrijedi:

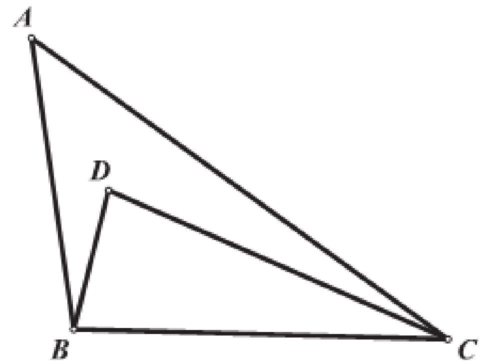
$$\angle BAC + \angle ACD + \varepsilon + \angle ABD = 360^0 \;\Rightarrow\; \angle BAC = 360^0 - \angle ACD - \varepsilon - \angle ABD \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \beta = 360^0 - \left(50^0 - \alpha\right) - 275^0 - \alpha \;\Rightarrow\; \beta = 360^0 - 50^0 + \alpha - 275^0 - \alpha \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \beta = 360^0 - 50^0 + \alpha - 275^0 - \alpha \;\Rightarrow\; \beta = 35^0.$$

Vježba 279

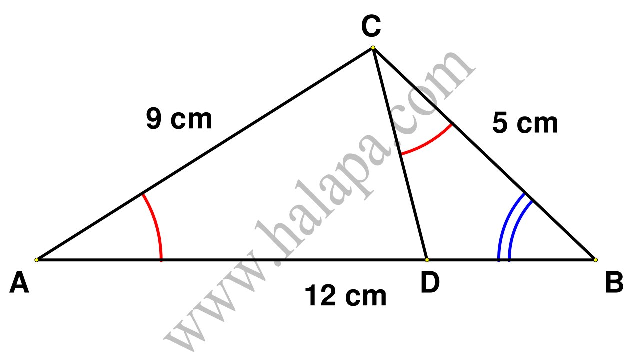
U trokutu ABC, prikazanome na skici, kutovi $\angle ABD$ i $\angle BCD$ imaju jednaku mjeru. Mjera kuta $\angle ACB$ je 60°, a kuta $\angle BDC$ je 100°. Odredite mjeru kuta $\angle BAC$.



Rezultat: 40°.

Zadatak 280 (Mihaela, srednja škola)

Duljine stranica trokuta ABC prikazanoga na skici iznose $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 5$ cm i $|AC| = 9$ cm. Za kutove vrijedi $\angle BAC = \angle BCD$. Izračunajte duljinu dužine $\overline{CD}$.



Rješenje 280

Ponovimo!

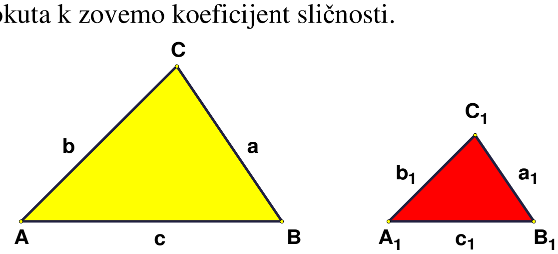
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

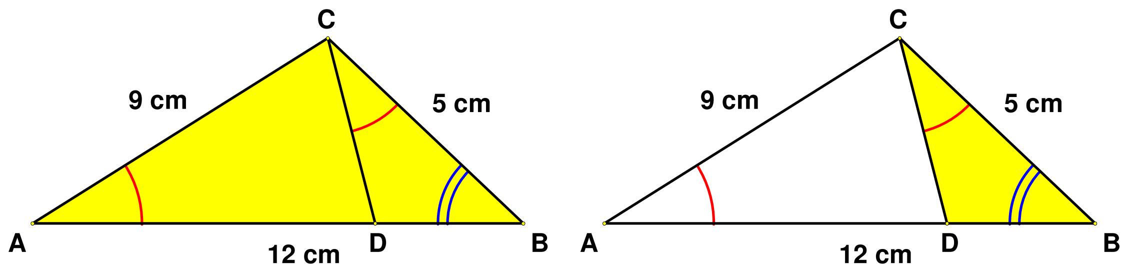
$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$



Sa slika vidi se:

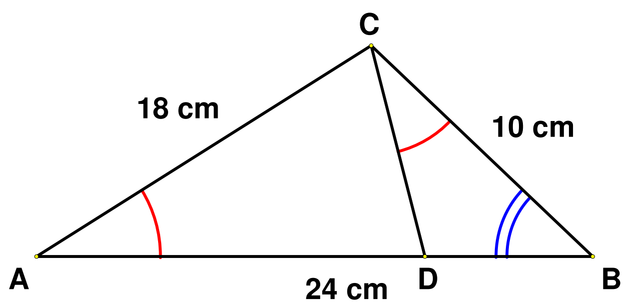
$$|AB| = 12 \text{ cm} \quad , \quad |BC| = 5 \text{ cm} \quad , \quad |AC| = 9 \text{ cm} \quad , \quad \angle BAC = \angle BCD.$$

Uočimo trokute ΔDBC i ΔABC kojima je kut $\angle DBC$ zajednički i vrijedi $\angle BAC = \angle BCD$. Zato su po Prvom poučku sličnosti (K – K) trokuti slični pa vrijedi razmjer:

$$\frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \;\Rightarrow\; \frac{|CD|}{5} = \frac{9}{12} \;\Rightarrow\; \frac{|CD|}{5} = \frac{9}{12} \;/ \cdot 5 \;\Rightarrow\; |CD| = \frac{45}{12} \;\Rightarrow\; |CD| = 3.75 \; cm.$$

Vježba 280

Duljine stranica trokuta ABC prikazanoga na skici iznose |AB| = 24 cm, |BC| = 10 cm i |AC| = 18 cm. Za kutove vrijedi $\angle BAC = \angle BCD$. Izračunajte duljinu dužine $\overline{CD}$.



Rezultat: 7.50 cm.