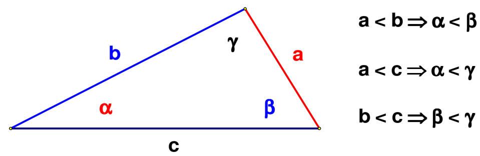
Zadatak 241 (4A, TUPŠ)

Kolika je mjera najmanjeg kuta u trokutu kojemu su stranice duljina 7 cm, 8 cm i 9 cm?

Rješenje 241

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.



Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Neka je a = 7 cm, b = 8 cm i c = 9 cm.
Budući da se nasuprot najmanje stranice a u trokutu nalazi najmanji kut α, slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{(8\ cm)^2 + (9\ cm)^2 - (7\ cm)^2}{2 \cdot 8\ cm \cdot 9\ cm}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{64\ cm^2 + 81\ cm^2 - 49\ cm^2}{144\ cm^2}\right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{96\ cm^2}{144\ cm^2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{kratimo razlomak} \\ \text{s } 48\ cm^2\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \alpha = 48^0\, 11'23''.$$

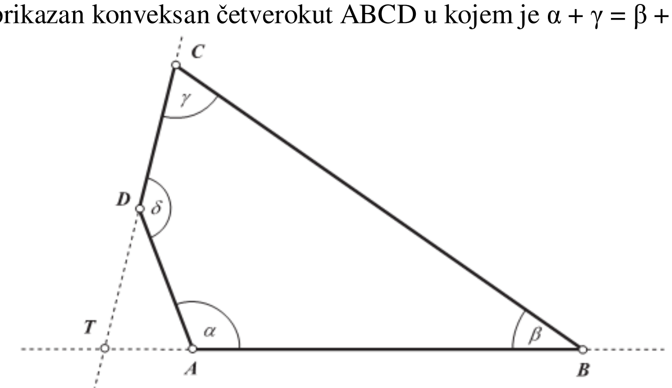
Vježba 241

Kolika je mjera najmanjeg kuta u trokutu kojemu su stranice duljina 14 cm, 16 cm i 18 cm?

Rezultat: 48° 11' 23".

Zadatak 242 (4A, TUPŠ)

Na skici je prikazan konveksan četverokut ABCD u kojem je α + γ = β + δ = 180°.



Pravci AB i CD sijeku se u točki T. Točka T je 3 cm udaljena od točke A, 6 cm od točke D i 10 cm od točke C. Kolika je duljina stranice $\overline{AB}$?

$$A.\ 13\ cm \qquad B.\ 15\ cm \qquad C.\ 17\ cm \qquad D.\ 19\ cm$$

Rješenje 242

Ponovimo!

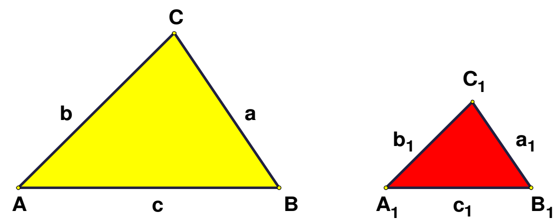
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ ,\ \beta = \beta_1 \ ,\ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.

Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$

$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

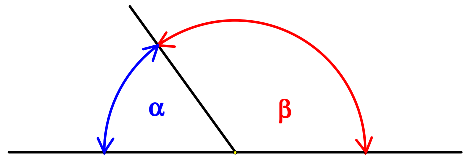
tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

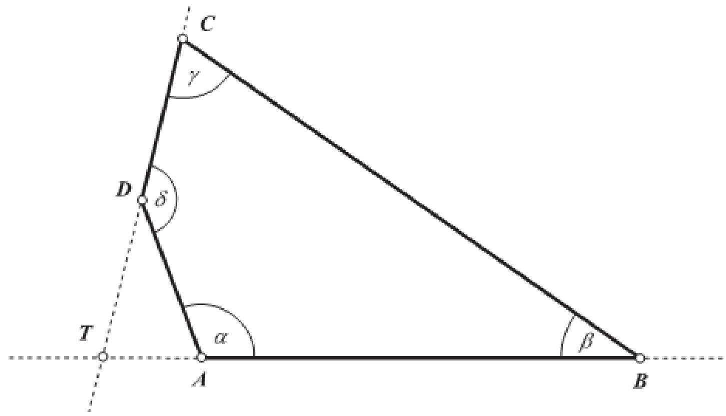
Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Dva su kuta suplementna, ako je njihov zbroj jednak 180°, još kažemo da su ti kutovi sukuti.



$\alpha + \beta = 180°$



Sa slike vidi se:

$$|TA|=3\ ,\ |TD|=6\ ,\ |TC|=10\ ,\ |AB|=|TB|-|TA|$$

$$\angle DAB=\alpha\ ,\ \angle ABC=\beta\ ,\ \angle BCD=\gamma\ ,\ \angle CDA=\delta$$

Dokažimo da vrijedi:

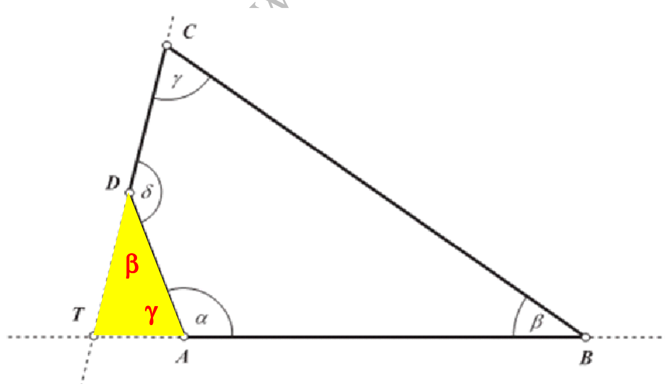
$$\angle TAD=\gamma,$$
$$\angle ADT=\beta.$$

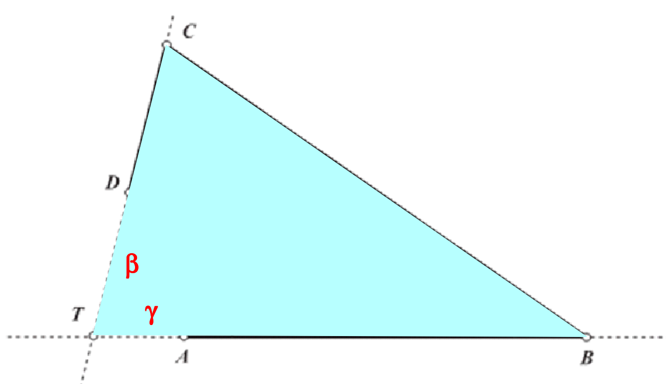
$\angle TAD=\gamma$

- $\left.\begin{array}{l}\angle TAD=180^{0}-\alpha\\ \alpha+\gamma=180^{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\angle TAD=180^{0}-\alpha\\ \gamma=180^{0}-\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right]\Rightarrow\angle TAD=\gamma.$

$\angle ADT=\beta$

- $\left.\begin{array}{l}\angle ADT=180^{0}-\delta\\ \beta+\delta=180^{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\angle ADT=180^{0}-\delta\\ \beta=180^{0}-\delta\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right]\Rightarrow\angle ADT=\beta.$





Uočimo da su trokuti ΔTAD i ΔTBC slični jer imaju jednake kutove (kut DTA je zajednički za oba trokuta, $\angle ABC = \angle ADT$, $\angle BCD = \angle TAD$).

Nasuprot kutu β je:

- u trokutu TAD stranica $\overline{TA}$
- u trokutu TBC stranica $\overline{TC}$.

Nasuprot kutu γ je:

- u trokutu TAD stranica $\overline{TD}$
- u trokutu TBC stranica $\overline{TB}$.

Tada vrijedi razmjer:

$$|TB| : |TC| = |TD| : |TA| \Rightarrow |TB| : 10 = 6 : 3 \Rightarrow 3 \cdot |TB| = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot |TB| = 60 \; /: 3 \Rightarrow |TB| = 20.$$

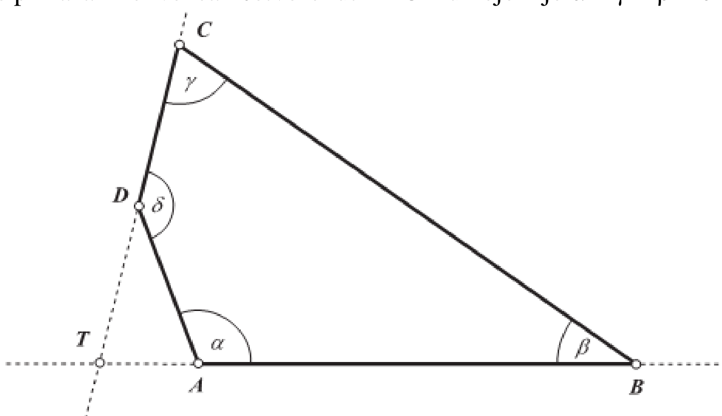
Računamo duljinu stranice $\overline{AB}$.

$$|AB| = |TB| - |TA| \Rightarrow |AB| = 20 - 3 \Rightarrow |AB| = 17.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 242

Na skici je prikazan konveksan četverokut ABCD u kojem je α + γ = β + δ = 180°.



Pravci AB i CD sijeku se u točki T. Točka T je 6 cm udaljena od točke A, 12 cm od točke D i 20 cm od točke C. Kolika je duljina stranice $\overline{AB}$?

$A.\ 26\ cm \qquad B.\ 30\ cm \qquad C.\ 34\ cm \qquad D.\ 38\ cm$

Rezultat: C.

Zadatak 243 (4A, TUPŠ)

U pravokutnome trokutu mjera jednoga šiljastog kuta je sedam puta veća od mjere drugoga šiljastog kuta. Kolika je mjera manjega kuta toga trokuta?

$A.\ 11^0 15' \qquad B.\ 12^0 51' \qquad C.\ 22^0 30' \qquad D.\ 25^0 42'$

Rješenje 243

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

$$\gamma = 90^0 \quad , \quad \alpha + \beta = 90^0.$$

Kako zapisati da je broj b "n puta" veći od broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Mjera najmanjega kuta pravokutnog trokuta dobije se iz sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^0 \\ \alpha = 7 \cdot \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 7 \cdot \beta + \beta = 90^0 \Rightarrow 8 \cdot \beta = 90^0 \Rightarrow 8 \cdot \beta = 90^0 \ /:8 \Rightarrow \beta = 11^0 15'.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 243

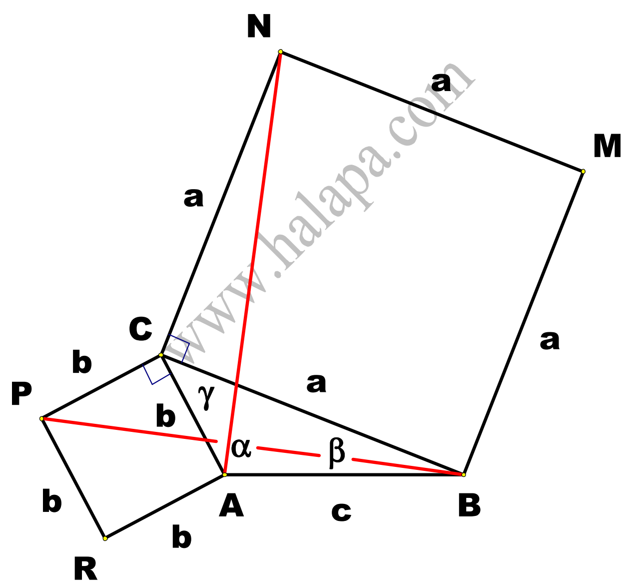
U pravokutnome trokutu mjera jednoga šiljastog kuta je osam puta veća od mjere drugoga šiljastog kuta. Kolika je mjera manjega kuta toga trokuta?

$$A.\ 10^0 \qquad B.\ 12^0 \qquad C.\ 22^0 \qquad D.\ 25^0$$

Rezultat: A.

Zadatak 244 (Helena, pedagoški fakultet)

Neka je zadan trokut ΔABC takav da je $|AC| < |BC|$ i neka su nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ konstruirani kvadrati (slika). Dokažite da je $|AN| = |BP|$.



Rješenje 244

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \ , \ b = b_1 \ , \ c = c_1.$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.

Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)

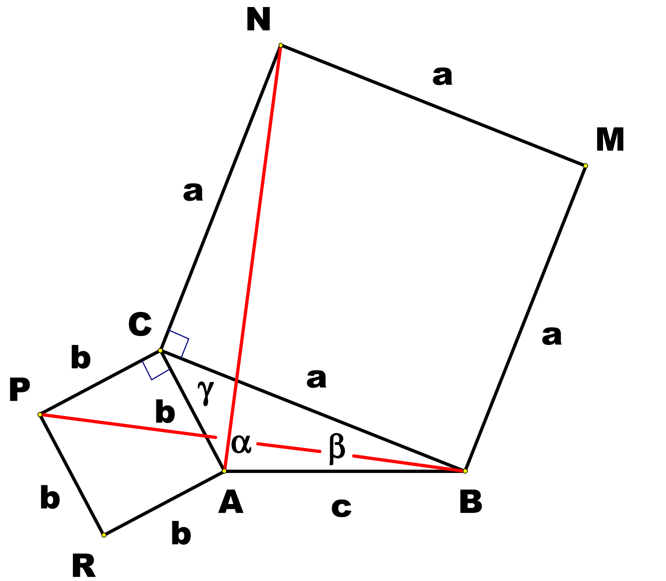
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.

Treći poučak sukladnosti (K – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.

Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.

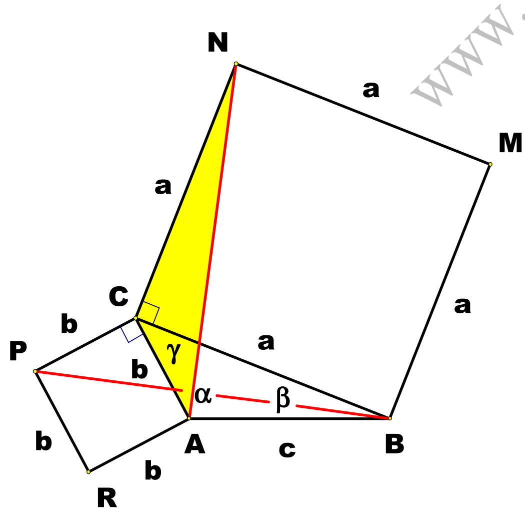


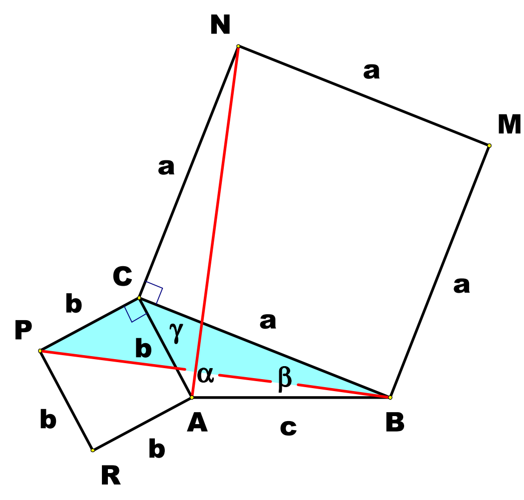
Sa slike vidi se:

$$|AC| = |CP| = |PR| = |RA| = b \quad , \quad |BM| = |MN| = |NC| = |CB| = a$$

$$\angle CAB = \alpha \quad , \quad \angle ABC = \beta \quad , \quad \angle BCA = \gamma$$

$$\angle NCA = 90^0 + \angle BCA = 90^0 + \gamma \quad , \quad \angle BCP = \angle BCA + 90^0 = \gamma + 90^0 .$$





Uočimo trokute ΔANC i ΔBCP za koje vrijedi:

- ΔANC

$$|NC| = a \quad , \quad |CA| = b \quad , \quad \angle NCA = \gamma + 90^0$$

- ΔBCP

$$|BC| = a \quad , \quad |CP| = b \quad , \quad \angle BCP = \gamma + 90^0 .$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l}\angle NCA = \gamma + 90^{0} \\ \angle BCP = \gamma + 90^{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle NCA = \angle BCP.$$

Dakle, promatrani trokuti ΔANC i ΔBCP imaju dvije stranice jednake duljine

$$|NC| = |BC| = a \quad , \quad |CA| = |CP| = b$$

i jednake kutove među tim stranicama

$$\angle NCA = \angle BCP.$$

Po drugom poučku o sukladnosti trokuta (S – K – S) trokuti ΔANC i ΔBCP sukladni su (podudaraju se u dvije stranice i kutu među njima) pa im je i treća stranica jednake duljine, tj.

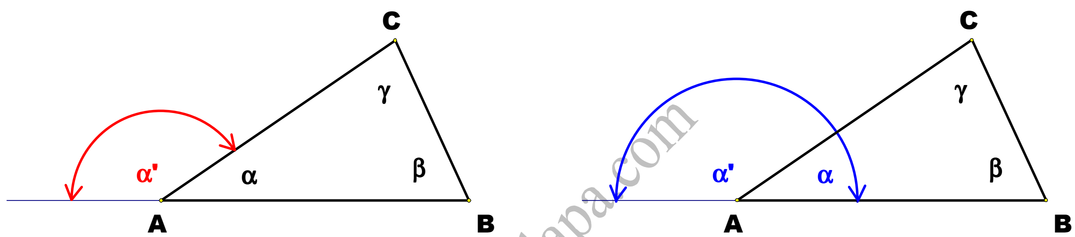
$$|AN| = |BP|.$$

Dokaz gotov.

Vježba 244

Svaki vanjski kut trokuta jednak je zbroju dvaju unutarnjih kutova trokuta koji s njime nisu susjedni.

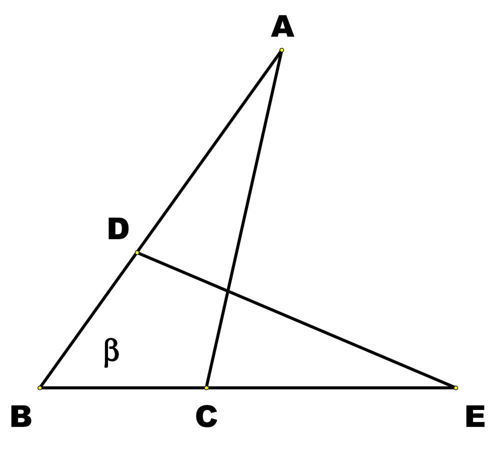
Rezultat:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta + \gamma = 180^{0} \\ \alpha' + \alpha = 180^{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha' = \beta + \gamma.$$

Zadatak 245 (Helena, pedagoški fakultet)

Neka je $\angle CAB = \angle BED$ i $|AB| = |BE|$ (slika). Dokažite da je $|AD| = |CE|$.



Rješenje 245

Ponovimo!

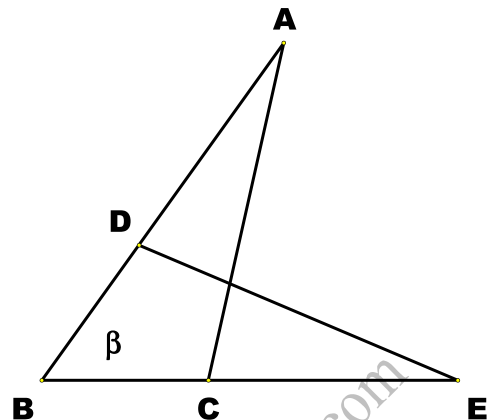
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

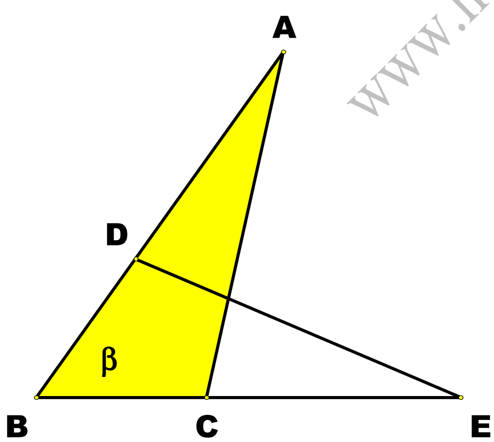
$$\alpha = \alpha_1 \; , \; \beta = \beta_1 \; , \; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad a = a_1 \; , \; b = b_1 \; , \; c = c_1 .$$

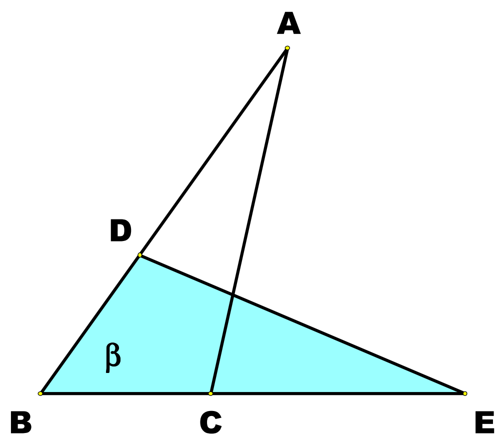
Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.
Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.
Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.



Uočimo trokute ΔABC i ΔBED za koje vrijedi:

$$|AB| = |BE| \quad , \quad \angle ABC = \angle DBE = \beta \quad , \quad \angle CAB = \angle BED.$$





Po trećem poučku o sukladnosti trokuta (K – S – K) trokuti ΔABC i ΔBED sukladni su (podudaraju se u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici) pa vrijedi:

$$|DB| = |BC| \quad , \quad |AC| = |ED|.$$

Sa slika vidi se:

$$|AB| = |BE| \Rightarrow |AD| + |DB| = |BC| + |CE| \Rightarrow \left[\, |DB| = |BC| \, \right] \Rightarrow$$

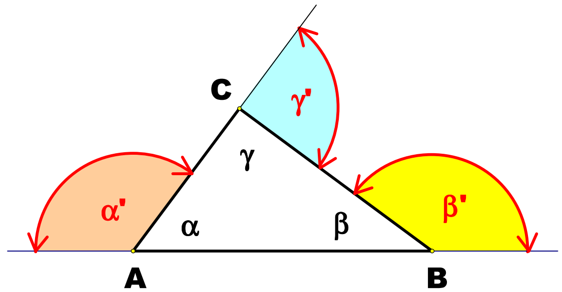
$$\Rightarrow |AD| + |BC| = |BC| + |CE| \Rightarrow |AD| + |BC| = |BC| + |CE| \Rightarrow |AD| = |CE|.$$

Dokaz gotov.

Vježba 245

Zbroj vanjskih kutova trokuta jednak je punom kutu (360°).

Rezultat:



$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=180^0\\ \alpha'=\beta+\gamma\\ \beta'=\alpha+\gamma\\ \gamma'=\alpha+\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha'+\beta'+\gamma'=\beta+\gamma+\alpha+\gamma+\alpha+\beta\Rightarrow\ldots\Rightarrow\alpha'+\beta'+\gamma'=360^0.$$

Zadatak 246 (Nick, gimnazija)

Duljine katete a i hipotenuze c pravokutnog trokuta su dva uzastopna prirodna broja. Kvadrat katete b trokuta je:

$A.\ a-c \qquad B.\ a+c \qquad C.\ 2\cdot a+c \qquad D.\ 2\cdot a-c$

Rješenje 246

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Zakon asocijacije za zbrajanje

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Kako zapisati dva uzastopna prirodna broja?

$$n,\ n+1 \quad , \quad n-1,\ n.$$

Budući da su duljine katete a i hipotenuze c pravokutnog trokuta dva uzastopna prirodna broja, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}a=n\ \ ,\ c=n+1\\ a^2+b^2=c^2\end{array}\right\}\Rightarrow n^2+b^2=(n+1)^2\Rightarrow b^2=(n+1)^2-n^2\Rightarrow b^2=n^2+2\cdot n+1-n^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=n^2+2\cdot n+1-n^2\Rightarrow b^2=2\cdot n+1\Rightarrow b^2=n+n+1\Rightarrow b^2=n+(n+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=n\\ c=n+1\end{array}\right]\Rightarrow b^2=a+c.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 246

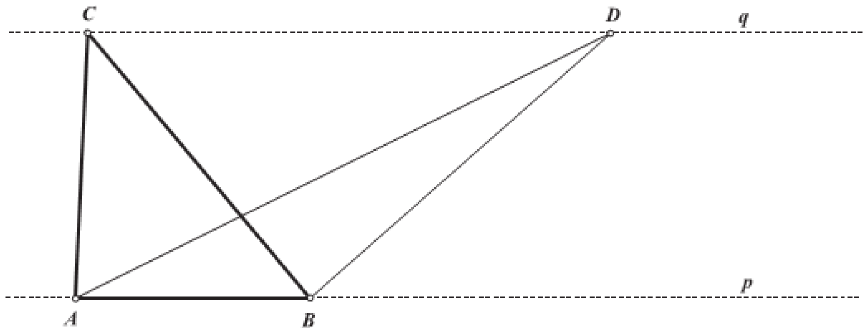
Duljine katete b i hipotenuze c pravokutnog trokuta su dva uzastopna prirodna broja. Kvadrat katete a trokuta je:

$A.\ b-c \qquad B.\ b+c \qquad C.\ 2\cdot b+c \qquad D.\ 2\cdot b-c$

Rezultat: B.

Zadatak 247 (Petra, strukovna škola)

Nacrtani su usporedni pravci p i q i po dvije točke na svakome od njih. Koja je tvrdnja točna za površine trokuta ABC i ABD prikazanih na skici?



$A.\ P_{ABC} = 0.5\cdot P_{ABD} \qquad B.\ P_{ABC} = P_{ABD}$

$C.\ P_{ABC} = 1.5\cdot P_{ABD} \qquad D.\ P_{ABC} = 2\cdot P_{ABD}$

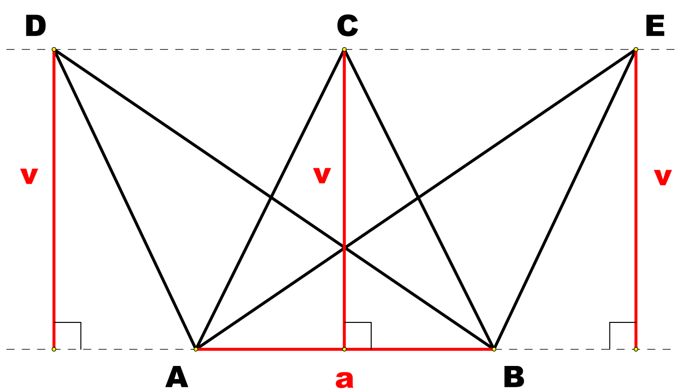
Rješenje 247

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

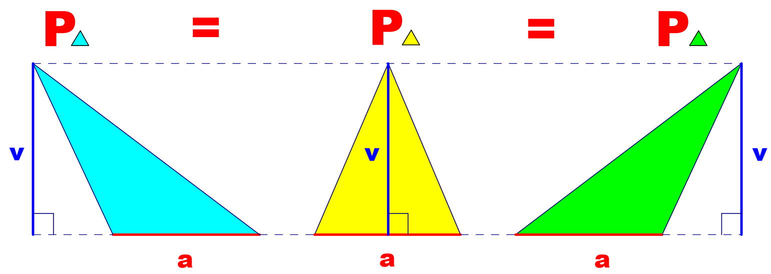
$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}\quad,\quad P=\frac{b\cdot v_b}{2}\quad,\quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

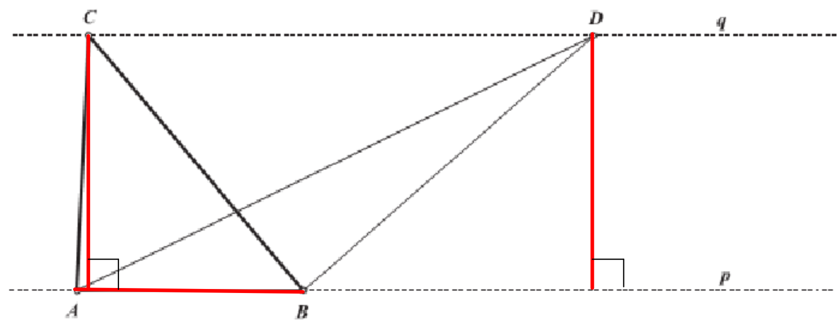
Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.



$$P=\frac{a\cdot v}{2}$$

$$P_{ABC}=P_{ABD}=P_{ABE}$$

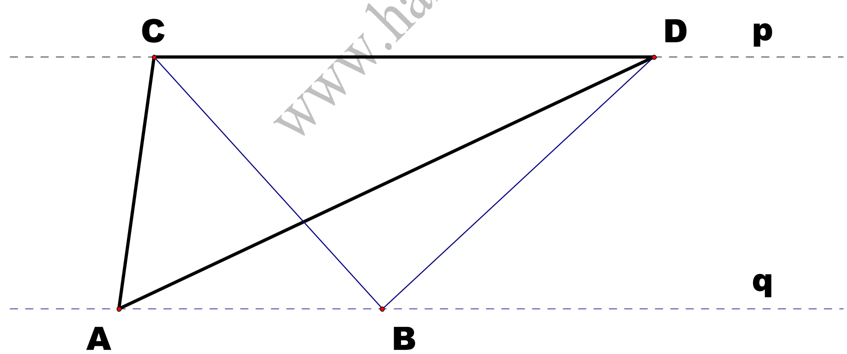




Sa slike vidi se da trokuti ABC i ABD imaju jednaku osnovicu (bazu) $\overline{AB}$, a visine su jednake duljine jer su pravci p i q usporedni. Površine trokuta ABC i ABD jednake su.
Odgovor je pod B.

Vježba 247

Nacrtani su usporedni pravci p i q i po dvije točke na svakome od njih. Koja je tvrdnja točna za površine trokuta CDA i CDB prikazanih na skici?



$A.\ P_{CDA} = 0.5 \cdot P_{CDB}$ $\quad B.\ P_{CDA} = P_{CDB}$
$C.\ P_{CDA} = 1.5 \cdot P_{CDB}$ $\quad D.\ P_{CDA} = 2 \cdot P_{CDB}$

Rezultat: B.

Zadatak 248 (Ivana, gimnazija)

Razlika duljina hipotenuze i jedne katete pravokutnog trokuta je 8 cm, a duljina je druge katete 36 cm. Kolika je površina trokuta?

Rješenje 248

Ponovimo!

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete,

a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Iz zadane pretpostavke dobije se sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} c - a = 8 \\ b = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 8 + a \\ b = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Pitagorin poučak} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right] \Rightarrow (8 + a)^2 = a^2 + 36^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64 + 16 \cdot a + a^2 = a^2 + 1296 \Rightarrow 64 + 16 \cdot a + a^2 = a^2 + 1296 \Rightarrow 64 + 16 \cdot a = 1296 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot a = 1296 - 64 \Rightarrow 16 \cdot a = 1232 \Rightarrow 16 \cdot a = 1232 \;/ : 16 \Rightarrow a = 77.$$

Površina pravokutnog trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 77 \; cm \;\;,\;\; b = 36 \; cm \\ P = \dfrac{a \cdot b}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{77 \; cm \cdot 36 \; cm}{2} \Rightarrow P = 1386 \; cm^2.$$

Vježba 248

Razlika duljina hipotenuze i jedne katete pravokutnog trokuta je 4 cm, a duljina je druge katete 8 cm. Kolika je površina trokuta?

Rezultat: 24 cm^2.

Zadatak 249 (Lea, gimnazija)

Koliki su kutovi jednakokračnog trokuta, ako je a = 330 cm i v_a = 150 cm?

Rješenje 249

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:

1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

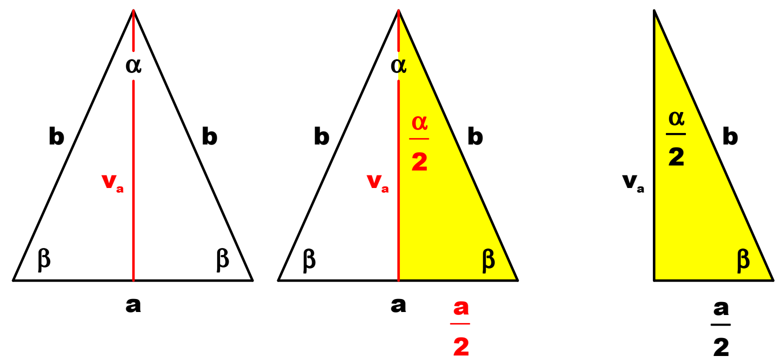
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Za jednakokračan trokut vrijedi:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^0.$$

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Gledaj slike!



Iz pravokutnog trokuta, čije su katete v_a i $\frac{a}{2}$, a hipotenuza b uz pomoć funkcije tangens, dobije se:

$$tg\,\beta=\frac{v_a}{\frac{a}{2}}\Rightarrow tg\,\beta=\frac{\frac{v_a}{1}}{\frac{a}{2}}\Rightarrow tg\,\beta=\frac{2\cdot v_a}{a}\Rightarrow \beta=tg^{-1}\left(\frac{2\cdot v_a}{a}\right)\Rightarrow \beta=tg^{-1}\left(\frac{2\cdot 150\ cm}{330\ cm}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=tg^{-1}\left(\frac{300\ cm}{330\ cm}\right)\Rightarrow \beta=tg^{-1}\left(\frac{300\ \cancel{cm}}{330\ \cancel{cm}}\right)\Rightarrow \beta=tg^{-1}\left(\frac{300}{330}\right)\Rightarrow \beta=42^0\,16'25''.$$

Računamo kut α.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+2\cdot\beta=180^0\\ \beta=42^0\,16'25''\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha+2\cdot 42^0\,16'25''=180^0\Rightarrow \alpha+84^0\,32'50''=180^0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=180^0-84^0\,32'50''\Rightarrow \begin{bmatrix}1^0=60'\\ 1'=60''\end{bmatrix}\Rightarrow \alpha=179^0\,59'60''-84^0\,32'50''\Rightarrow \alpha=95^0\,27'10''.$$

Vježba 249

Koliki su kutovi jednakokračnog trokuta, ako je a = 660 cm i v_a = 300 cm?

Rezultat: $\alpha=95^0\,27'10''\ ,\ \beta=42^0\,16'25''.$

Zadatak 250 (Lea, gimnazija)

U jednakokračnom trokutu ABC je |AC| = |BC| = 30 cm i |AB| = 25 cm. Simetrale kutova na osnovici trokuta sijeku se u točki D. Koliki je kut ADB?

Rješenje 250

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

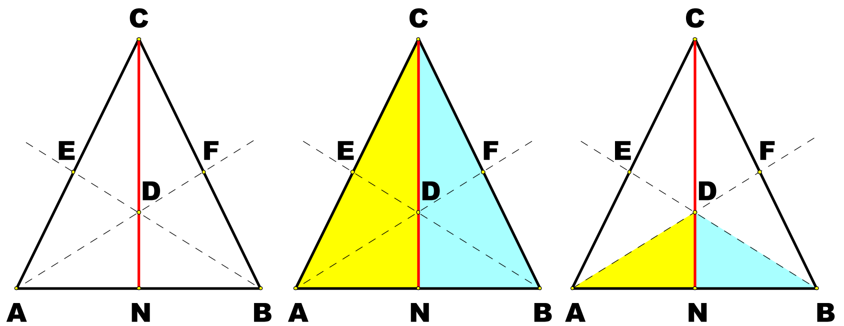
$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



Sa slika vidi se:

$$|AC|=|BC|=30\ ,\ |AB|=25\ ,\ |AN|=|NB|=\frac{1}{2}\cdot|AB|\ ,\ \angle BAC=\angle CBA$$

$$\angle NAD=\frac{1}{2}\cdot\angle BAC\ ,\ \angle DBN=\frac{1}{2}\cdot\angle CBA\ ,\ \angle NAD=\angle DBN$$

Visina $\overline{CN}$ okomita je na osnovicu $\overline{AB}$ i trokut ABC dijeli na dva sukladna pravokutna trokuta: ΔANC i ΔNBC. Promatrajmo, na primjer, pravokutan trokut ANC. Pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos\angle NAC=\frac{|AN|}{|AC|}\Rightarrow\cos\angle NAC=\frac{\frac{1}{2}\cdot|AB|}{|AC|}\Rightarrow\cos\angle NAC=\frac{\frac{1}{2}\cdot 25\ cm}{30\ cm}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\angle NAC=\frac{\frac{1}{2}\cdot 25\ cm}{30\ cm}\Rightarrow\cos\angle NAC=\frac{25}{60}\Rightarrow\cos\angle NAC=\frac{25}{60}\Rightarrow\cos\angle NAC=\frac{5}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\angle NAC=\cos^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)\Rightarrow\angle NAC=65^{0}22'32''.$$

Tada je

$$\angle NAD=\frac{1}{2}\cdot\angle NAC\Rightarrow\angle NAD=\frac{1}{2}\cdot 65^{0}22'32''\Rightarrow\left[1^{0}=60'\right]\Rightarrow\angle NAD=\frac{1}{2}\cdot 64^{0}82'32''\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\angle NAD=32^{0}41'16.$$

Zbog

$$\angle NAD=\angle DBN,$$

slijedi

$$\angle NAD+\angle ADB+\angle DBN=180^{0}\Rightarrow\angle ADB=180^{0}-\left(\angle NAD+\angle DBN\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\angle ADB=180^{0}-2\cdot\angle NAD\Rightarrow\angle ADB=180^{0}-2\cdot 65^{0}22'32''\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\angle ADB=180^{0}-130^{0}44'64''\Rightarrow\begin{bmatrix}1^{0}=60'\\1'=60''\end{bmatrix}\Rightarrow\angle ADB=179^{0}59'60''-130^{0}45'4''\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\angle ADB=49^{0}14'56''.$$

Vježba 250

U jednakokračnom trokutu ABC je $|AC| = |BC| = 60$ cm i $|AB| = 50$ cm. Simetrale kutova na osnovici trokuta sijeku se u točki D. Koliki je kut ADB?

Rezultat: $\alpha = 95^0 27'10''$, $\beta = 42^0 16'25''$.

Zadatak 251 (Matija, gimnazija)

Duljine stranica trokuta jednake su 11 cm, 12 cm i 13 cm. Razlika duljina dviju kraćih stranica sličnog trokuta iznosi 11 cm. Kolike su duljine stranica sličnog trokuta?

Rješenje 251

Ponovimo!

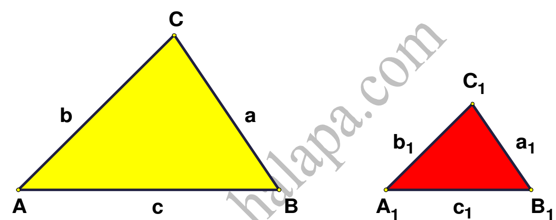
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = k \cdot a \\ b_1 = k \cdot b \\ c_1 = k \cdot c \end{matrix}\right\}.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Ako trokut ABC ima duljine stranica a, b i c, tada njemu sličan trokut $A_1B_1C_1$ ima duljine stranica a_1, b_1 i c_1 tako da vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = k \cdot a \\ b_1 = k \cdot b \\ c_1 = k \cdot c \end{matrix}\right\}.$$

Tražimo koeficijent sličnosti k. Budući da je razlika duljina dviju kraćih stranica sličnog trokuta jednaka 11 cm, vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} b_1 - a_1 = 11 \\ b_1 - a_1 = k \cdot b - k \cdot a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow k \cdot b - k \cdot a = 11 \Rightarrow k \cdot (b - a) = 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot (12 - 11) = 11 \Rightarrow k \cdot 1 = 11 \Rightarrow k = 11.$$

Duljine stranica sličnog trokuta iznose:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = k \cdot a \\ b_1 = k \cdot b \\ c_1 = k \cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} & a = 11 \\ k = 11 \ , & b = 12 \\ & c = 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 11 \cdot 11 \\ b_1 = 11 \cdot 12 \\ c_1 = 11 \cdot 13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 121 \ cm \\ b_1 = 132 \ cm \\ c_1 = 143 \ cm \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 251

Duljine stranica trokuta jednake su 11 cm, 12 cm i 13 cm. Zbroj duljina dviju kraćih stranica sličnog trokuta iznosi 253 cm. Kolike su duljine stranica sličnog trokuta?

Rezultat: $a_1 = 121\ cm\ ,\ b_1 = 132\ cm\ ,\ c_1 = 143\ cm.$

Zadatak 252 (Antun, tehnička škola)

U tupokutnome trokutu ABC mjera kuta u vrhu B je 23°, a duljine stranica su │AB│= 20 cm i │BC│ = 30 cm. Kolika je duljina visine iz vrha B?

$A.\ 14.77\ cm \qquad B.\ 15.77\ cm \qquad C.\ 16.77\ cm \qquad D.\ 17.77\ cm$

Rješenje 252

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

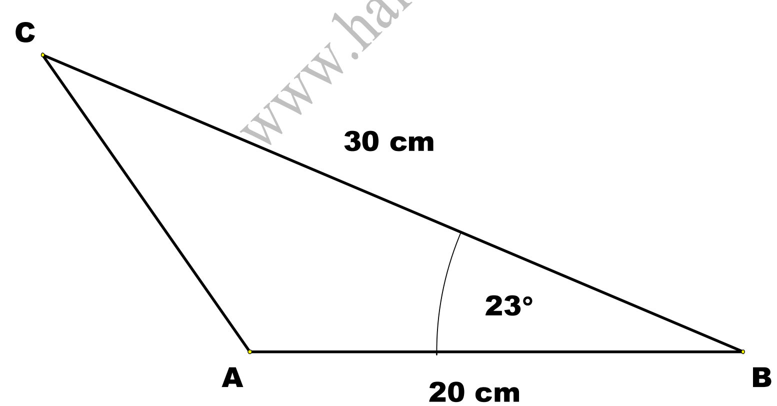
$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Ploština trokuta zadanog dvjema stranicama i kutom između njih

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 20 \quad , \quad |BC| = 30 \quad , \quad \angle ABC = 23^0$$

Duljinu │AC│, treće stranice trokuta ABC, izračunamo primjenom kosinusovog poučka.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\angle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\angle ABC \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos\angle ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 23^0} \Rightarrow |AC| = 13.98\ cm.$$

Uporabom formula za ploštinu trokuta odredimo duljinu visine iz vrha B, v_b.

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{|AC|\cdot v_b}{2} \\ P=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin 23^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{|AC|\cdot v_b}{2}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin 23^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|AC|\cdot v_b}{2}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin 23^0 \quad /\cdot\frac{2}{|AC|} \Rightarrow v_b=\frac{|AB|\cdot|BC|\cdot\sin 23^0}{|AC|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_b=\frac{20\cdot 30\cdot\sin 23^0}{13.98} \Rightarrow v_b=16.77\ cm.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 252

U tupokutnome trokutu ABC mjera kuta u vrhu B je 23°, a duljine stranica su $|AB|$ = 40 cm i $|BC|$ = 60 cm. Kolika je duljina visine iz vrha B?

A. 29.54 *cm* *B.* 31.54 *cm* *C.* 33.54 *cm* *D.* 35.54 *cm*

Rezultat: C.

Zadatak 253 (Ivan, srednja škola)

Izračunaj visinu na stranicu AB u trokutu čiji su vrhovi A(– 3, 2), B(1, – 1) i C(– 3, – 3).

Rješenje 253

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot b=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1\cdot k_2=-1 \Rightarrow k_1=-\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Odredimo koeficijent smjera k_1 pravca AB (na kojem leži stranica $\overline{AB}$ trokuta ABC).

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-3, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(1, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right] \Rightarrow k_1 = \frac{-1-2}{1-(-3)} \Rightarrow k_1 = \frac{-3}{1+3} \Rightarrow k_1 = -\frac{3}{4}.$$

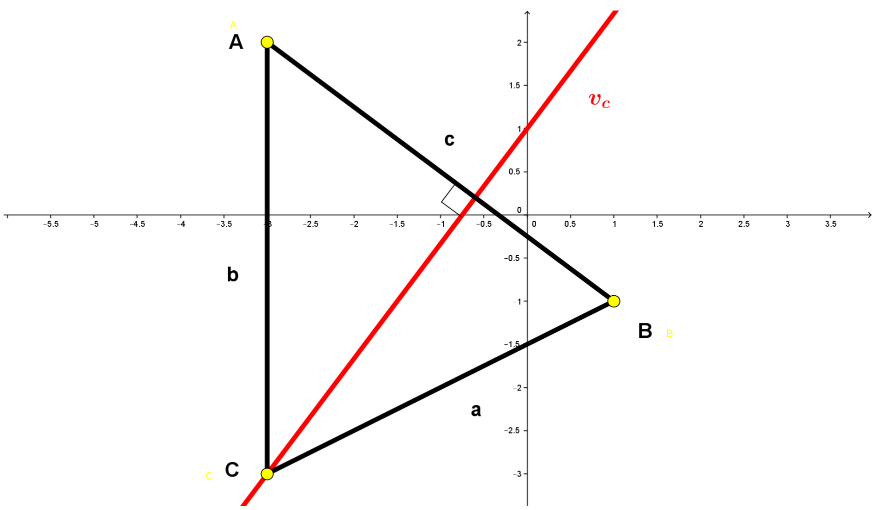
Budući da je pravac kojemu pripada visina v_c okomit na stranicu AB, za njegov koeficijent smjera k_2 vrijedi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \,/ \cdot \frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} \Rightarrow k_2 = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow k_2 = \frac{4}{3}.$$

Jednadžba pravca kojemu pripada visina v_c je:

$$\left.\begin{array}{l} k_2 = \frac{4}{3}\ ,\ C(x_1, y_1) = C(-3, 3) \\ y - y_1 = k_2 \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 3 = \frac{4}{3} \cdot (x - (-3)) \Rightarrow y - 3 = \frac{4}{3} \cdot (x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{4}{3} \cdot x + 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \cdot x + 4 + 3 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \cdot x + 7.$$



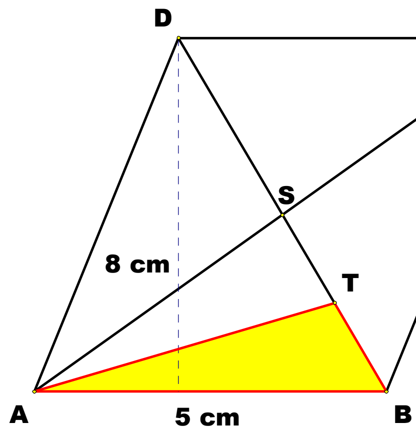
Vježba 253

Izračunaj visinu na stranicu BC u trokutu čiji su vrhovi A(– 3, 2), B(1, – 1) i C(– 3, – 3).

Rezultat: $y = -2 \cdot x - 4.$

Zadatak 254 (Helena, gimnazija)

Na skici je prikazan paralelogram ABCD kojemu je stranica $\overline{AB}$ duljine 5 cm, a visina na tu stranicu 8 cm. Točka S je sjecište njegovih dijagonala, a točka T polovište dužine $\overline{BS}$. Izračunajte površinu trokuta ABT.



Rješenje 254

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

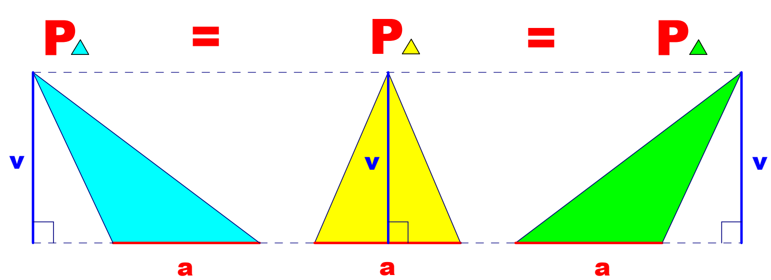
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

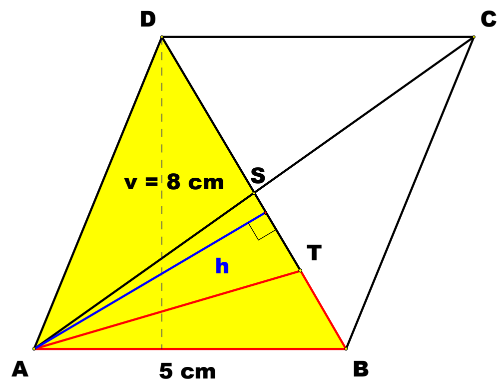
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , n \neq 1.$$

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Dijagonala paralelograma je spojnica dva nesusjedna vrha. Paralelogram ima dvije dijagonale koje se međusobno raspolavljaju.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.





Sa slike vidi se:

$$|AB| = |DC| = 5 \;,\; |BC| = |AD| \;,\; v = 8 \;,\; h - \text{visina okomita na } \overline{BD}$$

$$\left. \begin{array}{l} |BT| = \frac{1}{2} \cdot |BS| \\ \\ |BS| = \frac{1}{2} \cdot |BD| \end{array} \right\} \Rightarrow |BT| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |BD| \Rightarrow |BT| = \frac{1}{4} \cdot |BD|.$$

Izračunamo ploštinu trokuta ABD.

$$P_{ABD} = \frac{|AB| \cdot v}{2} \Rightarrow P_{ABD} = \frac{5 \cdot 8}{2} \Rightarrow P_{ABD} = 20 \; cm^2.$$

Ploština trokuta ABD može se izračunati i na sljedeći način:

$$P_{ABD} = \frac{|BD| \cdot h}{2}.$$

Promatrajmo trokute ΔABD i ΔABT. Imaju zajedničku visinu h, a za baze vrijedi:

$$|BT| = \frac{1}{4} \cdot |BD|.$$

Pomoću omjera dobije se ploština treokuta ABT.

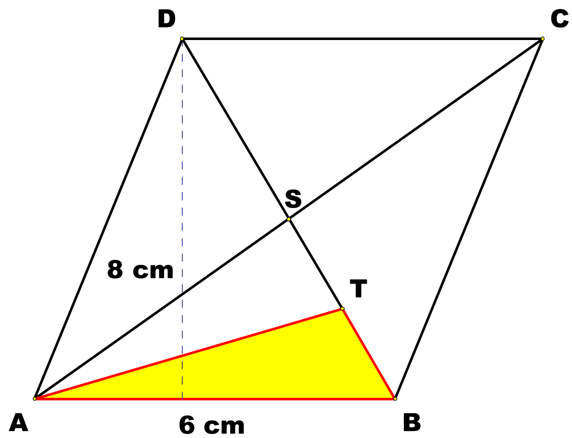
$$\frac{P_{ABT}}{P_{ABD}} = \frac{\frac{|BT| \cdot h}{2}}{\frac{|BD| \cdot h}{2}} \Rightarrow \frac{P_{ABT}}{P_{ABD}} = \frac{\frac{|BT| \cdot \cancel{h}}{\cancel{2}}}{\frac{|BD| \cdot \cancel{h}}{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{P_{ABT}}{P_{ABD}} = \frac{\frac{|BT|}{1}}{\frac{|BD|}{1}} \Rightarrow \frac{P_{ABT}}{P_{ABD}} = \frac{|BT|}{|BD|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[|BT| = \frac{1}{4} \cdot |BD| \right] \Rightarrow \frac{P_{ABT}}{P_{ABD}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot |BD|}{|BD|} \Rightarrow \frac{P_{ABT}}{P_{ABD}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \cancel{|BD|}}{\cancel{|BD|}} \Rightarrow \frac{P_{ABT}}{P_{ABD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ABT}}{P_{ABD}} = \frac{1}{4} \; / \cdot P_{ABD} \Rightarrow P_{ABT} = \frac{1}{4} \cdot P_{ABD} \Rightarrow P_{ABT} = \frac{1}{4} \cdot 20 \; cm^2 \Rightarrow P_{ABT} = 5 \; cm^2.$$

Vježba 254

Na skici je prikazan paralelogram ABCD kojemu je stranica $\overline{AB}$ duljine 5 cm, a visina na tu stranicu 8 cm. Točka S je sjecište njegovih dijagonala, a točka T polovište dužine $\overline{BS}$. Izračunajte površinu trokuta ABT.



Rezultat: 6 cm^2.

Zadatak 255 (Sanja, gimnazija)

Opseg pravokutnog trokuta je jednak 200. Duljina hipotenuze je jednaka 78. Koliki je polumjer trokutu upisane kružnice?

Rješenje 255

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ako su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta ABC, onda je formula za opseg

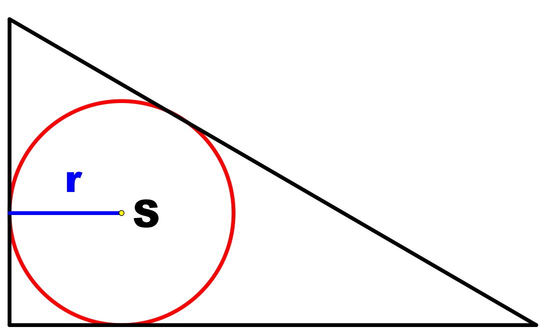
$$O = a + b + c.$$

Ako je zadan pravokutni trokut duljina kateta a i b i hipotenuze c, tada je polumjer r upisane kružnice dan formulom

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



1.inačica

$$\left.\begin{matrix} O = 200 \\ c = 78 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a + b + c = 200 \\ c = 78 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + b + 78 = 200 \Rightarrow a + b = 200 - 78 \Rightarrow a + b = 122.$$

Polumjer trokutu upisane kružnice iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=122 \\ c=78 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[r=\frac{a+b-c}{2} \right] \Rightarrow r=\frac{122-78}{2} \Rightarrow r=\frac{44}{2} \Rightarrow r=\frac{44}{2} \Rightarrow r=22.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} O=200 \\ c=78 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=200 \\ c=78 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[r=\frac{a+b-c}{2} \right] \Rightarrow r=\frac{a+b-c}{2} \Rightarrow r=\frac{a+b+c-2\cdot c}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{a+b+c-2\cdot c}{2} \Rightarrow r=\frac{200-2\cdot 78}{2} \Rightarrow r=\frac{200-156}{2} \Rightarrow r=\frac{44}{2} \Rightarrow r=\frac{44}{2} \Rightarrow r=22.$$

Vježba 255

Opseg pravokutnog trokuta je jednak 400. Duljina hipotenuze je jednaka 156. Koliki je polumjer trokutu upisane kružnice?

Rezultat: 44.

Zadatak 256 (Lilly, gimnazija)

Duljine stranica trokuta su a = 5, b = 6 i c = 8. Kako se odnose visine trokuta?

Rješenje 256

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent a : b, $b\neq 0$ omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)$$
$$a:b=(a:n):(b:n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad i \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{array}{c} a_1:b_1=k \\ a_2:b_2=k \\ a_3:b_3=k \\ \ldots \\ a_n:b_n=k, \end{array}$$

produženi razmjer je

$$a_1:a_2:a_3:\ldots:a_n=b_1:b_2:b_3:\ldots:b_n.$$

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{a\cdot v_a}{2} \\ P=\frac{b\cdot v_b}{2} \\ P=\frac{c\cdot v_c}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=\frac{a\cdot v_a}{2}\ /\cdot\frac{2}{a} \\ P=\frac{b\cdot v_b}{2}\ /\cdot\frac{2}{b} \\ P=\frac{c\cdot v_c}{2}\ /\cdot\frac{2}{c}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_a=\frac{2\cdot P}{a} \\ v_b=\frac{2\cdot P}{b} \\ v_c=\frac{2\cdot P}{c}\end{array}\right\} \Rightarrow v_a : v_b : v_c = \frac{2\cdot P}{a} : \frac{2\cdot P}{b} : \frac{2\cdot P}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{članove razmjera} \\ \text{kratimo sa } 2\cdot P\end{array}\right] \Rightarrow v_a : v_b : v_c = \left(\frac{2\cdot P}{a}\cdot\frac{1}{2\cdot P}\right) : \left(\frac{2\cdot P}{b}\cdot\frac{1}{2\cdot P}\right) : \left(\frac{2\cdot P}{c}\cdot\frac{1}{2\cdot P}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_a : v_b : v_c = \left(\frac{\cancel{2\cdot P}}{a}\cdot\frac{1}{\cancel{2\cdot P}}\right) : \left(\frac{\cancel{2\cdot P}}{b}\cdot\frac{1}{\cancel{2\cdot P}}\right) : \left(\frac{\cancel{2\cdot P}}{c}\cdot\frac{1}{\cancel{2\cdot P}}\right) \Rightarrow v_a : v_b : v_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ b=6 \\ c=8\end{array}\right] \Rightarrow v_a : v_b : v_c = \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{članove razmjera} \\ \text{proširimo sa } 120\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_a : v_b : v_c = \left(\frac{1}{5}\cdot 120\right) : \left(\frac{1}{6}\cdot 120\right) : \left(\frac{1}{8}\cdot 120\right) \Rightarrow v_a : v_b : v_c = \left(\frac{1}{\cancel{5}}\cdot\cancel{120}\right) : \left(\frac{1}{\cancel{6}}\cdot\cancel{120}\right) : \left(\frac{1}{\cancel{8}}\cdot\cancel{120}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_a : v_b : v_c = 24 : 20 : 15.$$

Vježba 256

Duljine stranica trokuta su a = 3, b = 4 i c = 5. Kako se odnose visine trokuta?

Rezultat: $v_a : v_b : v_c = 20 : 15 : 12.$

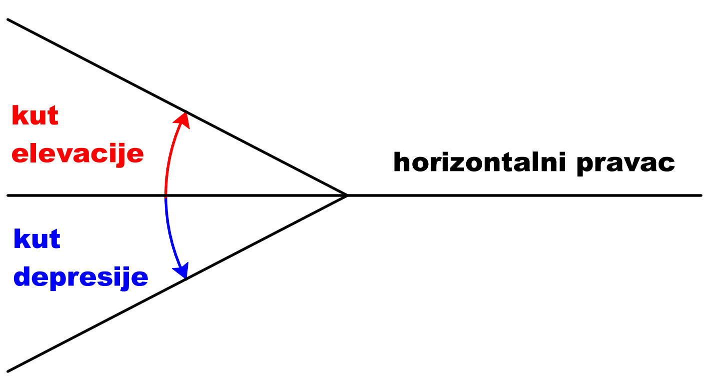
Zadatak 257 (Sanny, gimnazija)

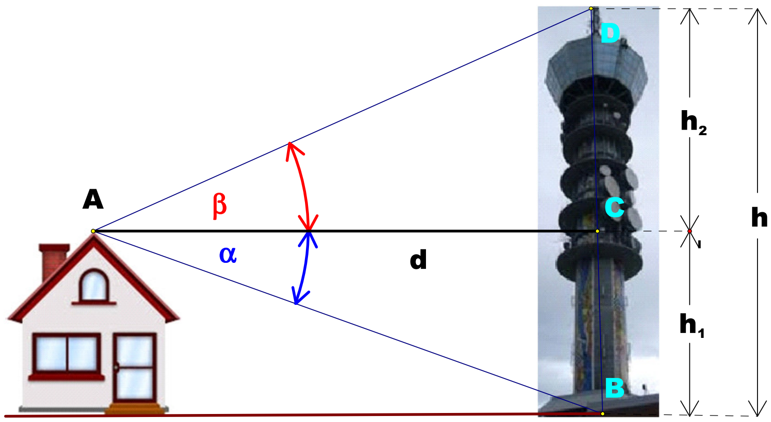
S krova kuće visine 15 m vidi se podnožje tornja pod kutom depresije od 12° 35' 28'', a njegov vrh pod kutom elevacije od 18° 39' 24''. Kolika je visina tornja?

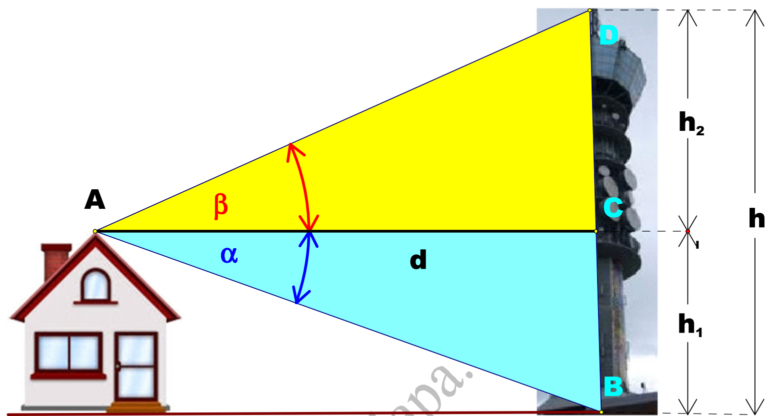
Rješenje 257

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Kut elevacije – kut od horizontalnog pravca prema gore.
Kut depresije – kut od horizontalnog pravca prema dolje.







Sa slika vidi se:

$$\alpha = 12^{0}\,35'28'' \ , \ \beta = 18^{0}\,34'24'' \ , \ |AC| = d \ , \ |BC| = h_1 \ , \ |CD| = h_2 \ , \ |BD| = h$$

Uočimo pravokutne trokute ΔACD i ΔABC. Pomoću funkcije tangens dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\beta = \dfrac{|CD|}{|AC|} \\ tg\,\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\,\beta = \dfrac{h_2}{d} \\ tg\,\alpha = \dfrac{h_1}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\,\beta = \dfrac{h_2}{d} \ /\cdot \dfrac{d}{tg\,\beta} \\ tg\,\alpha = \dfrac{h_1}{d} \ /\cdot \dfrac{d}{tg\,\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d = \dfrac{h_2}{tg\,\beta} \\ d = \dfrac{h_1}{tg\,\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h_2}{tg\,\beta} = \frac{h_1}{tg\,\alpha} \Rightarrow \frac{h_2}{tg\,\beta} = \frac{h_1}{tg\,\alpha} \ /\cdot tg\,\beta \Rightarrow h_2 = \frac{h_1 \cdot tg\,\beta}{tg\,\alpha}.$$

Visina h tornja iznosi:

$$h = h_1 + h_2 \Rightarrow h = h_1 + \frac{h_1 \cdot tg\,\beta}{tg\,\alpha} \Rightarrow h = h_1 \cdot \left(1 + \frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 15\ m \cdot \left(1 + \frac{tg\,18^{0}\,39'24''}{tg\,12^{0}\,35'28''}\right) \Rightarrow h = 37.67\ m.$$

Vježba 257

S krova kuće visine 30 m vidi se podnožje tornja pod kutom depresije od 12° 35' 28'', a njegov vrh pod kutom elevacije od 18° 39' 24''. Kolika je visina tornja?

Rezultat: 75.35 m.

Zadatak 258 (Ivan, gimnazija)

Površina trokuta jednaka je 214.42 cm^2, dva su njegova kuta $\alpha = 35° \, 15'$ i $\beta = 101° \, 17'$. Kolike su duljine stranica ovog trokuta?

Rješenje 258

Ponovimo!

$$1^0 = 60' \quad , \quad 1' = 60''.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Površina trokuta zadanog duljinom jedne njegove stranice i mjerama sva tri kuta dana je izrazom:

$$P = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha} \quad , \quad P = \frac{b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\beta} \quad , \quad P = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2 \cdot \sin\gamma}.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Najprije odredimo mjeru kuta γ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \Rightarrow \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma = 180^0 - \left(35^0 \, 15' + 101^0 \, 17'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 180^0 - 136^0 \, 32' \Rightarrow \gamma = 179^0 \, 60' - 136^0 \, 32' \Rightarrow \gamma = 43^0 \, 28'.$$

Iz zadane površine izračunamo, na primjer, duljinu stranice a.

$$P = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha} \Rightarrow P = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha} \; / \cdot \frac{2 \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} \Rightarrow a^2 = \frac{2 \cdot P \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{2 \cdot P \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{2 \cdot 214.42 \; cm^2 \cdot \sin 35^0 \, 15'}{\sin 101^0 \, 17' \cdot \sin 43^0 \, 28'}} \Rightarrow a = 19.15 \; cm.$$

Da bismo odredili duljine stranica b i c primijenit ćemo poučak o sinusima:

- $$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \; / \cdot \sin\beta \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow b = \frac{19.15 \; cm \cdot \sin 101^0 \, 17'}{\sin 35^0 \, 15'} \Rightarrow b = 32.54 \; cm.$$

- $$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \; / \cdot \sin\gamma \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow c = \frac{19.15 \; cm \cdot \sin 43^0 \, 28'}{\sin 35^0 \, 15'} \Rightarrow c = 22.83 \; cm.$$

Vježba 258

Površina trokuta jednaka je 857.68 cm^2, dva su njegova kuta $\alpha = 35° \, 15'$ i $\beta = 101° \, 17'$. Kolike su duljine stranica ovog trokuta?

Rezultat: a = 38.30 cm, b = 65.08 cm, c = 45.66 cm.

Zadatak 259 (Ivan, gimnazija)

Na horizontalnom zemljištu nalazi se neboder. Njegov se vrh vidi iz udaljenosti d pod kutom elevacije α. Za koliko se trebamo približiti neboderu da bi se kut elevacije udvostručio?

Rješenje 259

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Kut elevacije – kut od horizontalnog pravca prema gore.

$$tg\, 2\alpha = \frac{2 \cdot tg\, \alpha}{1 - tg^2\, \alpha}.$$

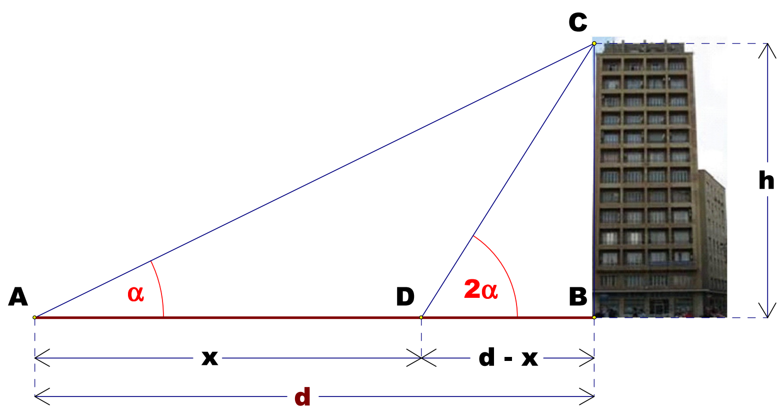
$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

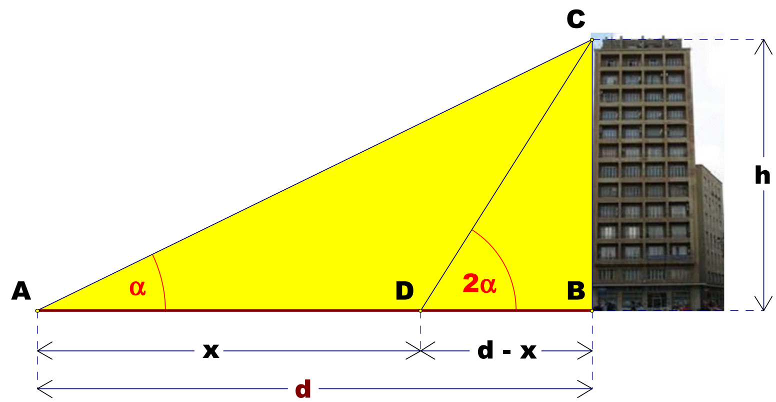
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

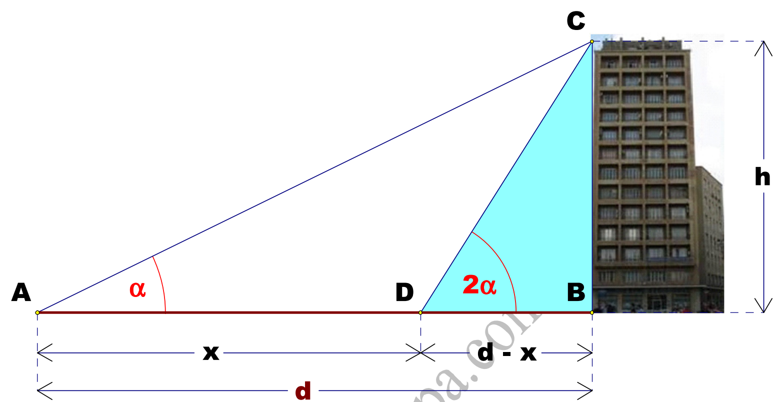


Sa slike vidi se:

$$|AD| = x \quad , \quad |DB| = d - x \quad , \quad |AB| = d \quad , \quad |BC| = h$$

Uočimo pravokutne trokute ΔABC i ΔDBC. Pomoću funkcije tangens dobije se:





$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha=\dfrac{|BC|}{|AB|} \\ tg\,2\alpha=\dfrac{|BC|}{|DB|} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\,\alpha=\dfrac{h}{d} \\ tg\,2\alpha=\dfrac{h}{d-x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\,\alpha=\dfrac{h}{d}\ /\cdot d \\ tg\,2\alpha=\dfrac{h}{d-x}\ /\cdot(d-x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} h=d\cdot tg\,\alpha \\ h=(d-x)\cdot tg\,2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow d\cdot tg\,\alpha=(d-x)\cdot tg\,2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\cdot tg\,\alpha=d\cdot tg\,2\alpha-x\cdot tg\,2\alpha \Rightarrow x\cdot tg\,2\alpha=d\cdot tg\,2\alpha-d\cdot tg\,\alpha \Rightarrow x\cdot tg\,2\alpha=d\cdot(tg\,2\alpha-tg\,\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot tg\,2\alpha=d\cdot(tg\,2\alpha-tg\,\alpha)\ /\cdot\frac{1}{tg\,2\alpha} \Rightarrow x=\frac{d\cdot(tg\,2\alpha-tg\,\alpha)}{tg\,2\alpha} \Rightarrow \left[tg\,2\alpha=\frac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{d\cdot\left(\dfrac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}-tg\,\alpha\right)}{\dfrac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}} \Rightarrow x=\frac{d\cdot\left(\dfrac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}-\dfrac{tg\,\alpha}{1}\right)}{\dfrac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}} \Rightarrow x=\frac{d\cdot\dfrac{2\cdot tg\,\alpha-tg\,\alpha\cdot(1-tg^2\,\alpha)}{1-tg^2\,\alpha}}{\dfrac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{d\cdot\dfrac{2\cdot tg\,\alpha-tg\,\alpha+tg^3\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}}{\dfrac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}} \Rightarrow x=\frac{d\cdot\dfrac{tg\,\alpha+tg^3\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}}{\dfrac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}} \Rightarrow x=\frac{d\cdot\dfrac{tg\,\alpha+tg^3\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}}{\dfrac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{d\cdot\left(tg\,\alpha+tg^3\,\alpha\right)}{2\cdot tg\,\alpha}\ \Rightarrow\ x=\frac{d\cdot tg\,\alpha\cdot\left(1+tg^2\,\alpha\right)}{2\cdot tg\,\alpha}\ \Rightarrow\ x=\frac{d\cdot tg\,\alpha\cdot\left(1+tg^2\,\alpha\right)}{2\cdot tg\,\alpha}\ \Rightarrow\ x=\frac{d\cdot\left(1+tg^2\,\alpha\right)}{2}.$$

Vježba 259

Na horizontalnom zemljištu nalazi se neboder. Njegov se vrh vidi iz udaljenosti 600 m pod kutom elevacije α. Za koliko se trebamo približiti neboderu da bi se kut elevacije udvostručio?

Rezultat: $x=300\cdot\left(1+tg^2\,\alpha\right)\ m.$

Zadatak 260 (Deny, gimnazija)

Izračunaj duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta ako polumjer tom trokutu upisane kružnice iznosi 4 cm, a jedan kut trokuta 67º 25'.

Rješenje 260

Ponovimo!

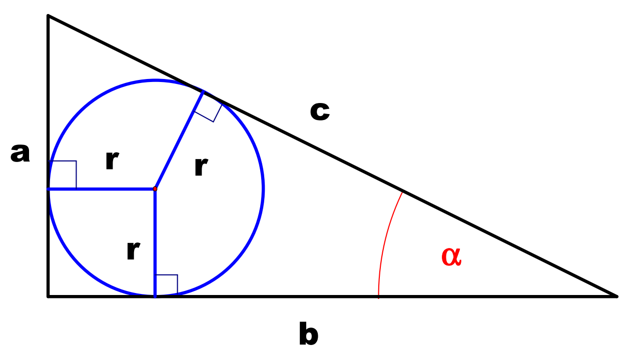
$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\quad,\quad a=b\ \Rightarrow\ b=a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Ako je zadan pravokutni trokut duljina kateta a i b i hipotenuze c, tada je polumjer r upisane kružnice dan formulom

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$



Sa slike vidi se:

$$r=4\ cm\ ,\ \alpha=67^0\,25'\ ,\ \sin\alpha=\frac{a}{c}\ ,\ \cos\alpha=\frac{b}{c}$$

Računamo duljinu hipotenuze c.

$$r=\frac{a+b-c}{2}\ \Rightarrow\ r=\frac{a+b-c}{2}\ /\cdot\frac{2}{c}\ \Rightarrow\ \frac{2\cdot r}{c}=\frac{a+b-c}{c}\ \Rightarrow\ \frac{2\cdot r}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-\frac{c}{c}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot r}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - \frac{c}{c} \Rightarrow \frac{2 \cdot r}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ \sin \alpha = \frac{a}{c} \\ \cos \alpha = \frac{b}{c} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{2 \cdot r}{c} = \sin \alpha + \cos \alpha - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot r}{c} = \sin \alpha + \cos \alpha - 1 \; / \cdot \frac{c}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} \Rightarrow \frac{2 \cdot r}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} = c \Rightarrow c = \frac{2 \cdot r}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{2 \cdot 4 \; cm}{\sin 67^0 25' + \cos 67^0 25' - 1} \Rightarrow c = 26.03 \; cm.$$

Vježba 260

Izračunaj duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta ako polumjer tom trokutu upisane kružnice iznosi 8 cm, a jedan kut trokuta 67º 25'.

Rezultat: 52.06 cm.