Zadatak 221 (Ivan, strukovna škola)

Duljine dviju stranica trokuta su a i b, a kut među njima iznosi γ = 60°. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

$$A.\ c=\sqrt{a^2+b^2-a\cdot b} \qquad B.\ c=\sqrt{a^2+b^2+a\cdot b}$$

$$C.\ c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b} \qquad D.\ c=\sqrt{a^2+b^2+2\cdot a\cdot b}$$

Rješenje 221

Ponovimo!

$$\cos 60^0=\frac{1}{2}.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad , \quad b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \quad , \quad c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Uporabom kosinusovog poučka dobije se duljina stranice c.

$$\left.\begin{array}{l} c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \\ \gamma=60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos 60^0 \Rightarrow c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow c^2=a^2+b^2-a\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2-a\cdot b \ /\sqrt{\ } \Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2-a\cdot b}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 221

Duljine dviju stranica trokuta su a i b, a kut među njima iznosi γ = 120°. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

$$A.\ c=\sqrt{a^2+b^2-a\cdot b} \qquad B.\ c=\sqrt{a^2+b^2+a\cdot b}$$

$$C.\ c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b} \qquad D.\ c=\sqrt{a^2+b^2+2\cdot a\cdot b}$$

Rezultat: B.

Zadatak 222 (Ante, strukovna škola)

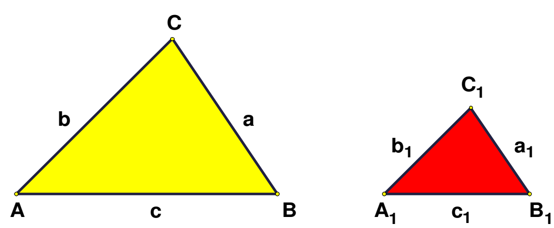
Duljine stranica trokuta iznose 12.5 cm, 10 cm i 8.5 cm. Duljina najduže stranice njemu sličnog trokuta iznosi 20 cm. Koliki je omjer ploština zadanog i njemu sličnog trokuta?

A. 0.311 *B.* 0.391 *C.* 0.621 *D.* 0.645

Rješenje 222

Ponovimo!

Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1\ ,\ \beta=\beta_1\ ,\ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).
Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina pripadnih stranica, tj. ako je

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k,$$

tada je

$$\frac{P}{P_1}=k^2.$$

Duljine stranica prvog trokuta su:

$$a=12.5\ cm,\ b=10\ cm,\ c=8.5\ cm.$$

Duljina najduže stranice njemu sličnog trokuta je

$$a_1=20\ cm.$$

Tada je koeficijent k sličnosti jednak

$$k=\frac{a}{a_1}$$

pa omjer ploština zadanog i njemu sličnog trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P}{P_1}=k^2 \\ k=\frac{a}{a_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{P}{P_1}=\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{P}{P_1}=\left(\frac{12.5\ cm}{20\ cm}\right)^2 \Rightarrow \frac{P}{P_1}=0.625^2 \Rightarrow \frac{P}{P_1}=0.391.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 222

Duljine stranica trokuta iznose 25 cm, 10 cm i 8.5 cm. Duljina najduže stranice njemu sličnog trokuta iznosi 40 cm. Koliki je omjer ploština zadanog i njemu sličnog trokuta?

A. 0.311 *B.* 0.391 *C.* 0.621 *D.* 0.645

Rezultat: B.

Zadatak 223 (Elena, gimnazija)

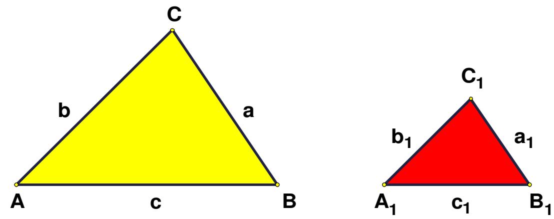
Jednakokračnom trokutu ABC s osnovicom AB duljine 12 cm i krakom duljine 18 cm upisana je kružnica. Na tu kružnicu položena je tangenta paralelno osnovici trokuta. Kolika je duljina odsječka te tangente koji je omeđen njezinim sjecištima s kracima trokuta?

Rješenje 223

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}\ ,\ a \geq 0 \quad , \quad \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c} = a \cdot b \cdot \sqrt{c}\ ,\ a, b \geq 0.$$

Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1\ ,\ \beta = \beta_1\ ,\ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).
Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \ \Rightarrow\ a \cdot d = b \cdot c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

$$\gamma = 90^0 \quad , \quad \alpha + \beta = 90^0.$$

Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta. Uočimo da su kutovi koji leže na trećoj stranici jednaki zbog činjenice da se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi. Opseg jednakokračnog trokuta kojemu je duljina osnovice a i duljina kraka b iznosi:

$$O = a + 2 \cdot b.$$

Poluopseg je:

$$s=\frac{O}{2}\;\Rightarrow\; s=\frac{a+2\cdot b}{2}.$$

Formule za ploštinu trokuta glase

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\quad,\quad P=r\cdot s,$$

gdje je r polumjer upisane kružnice trokutu, a s poluopseg trokuta

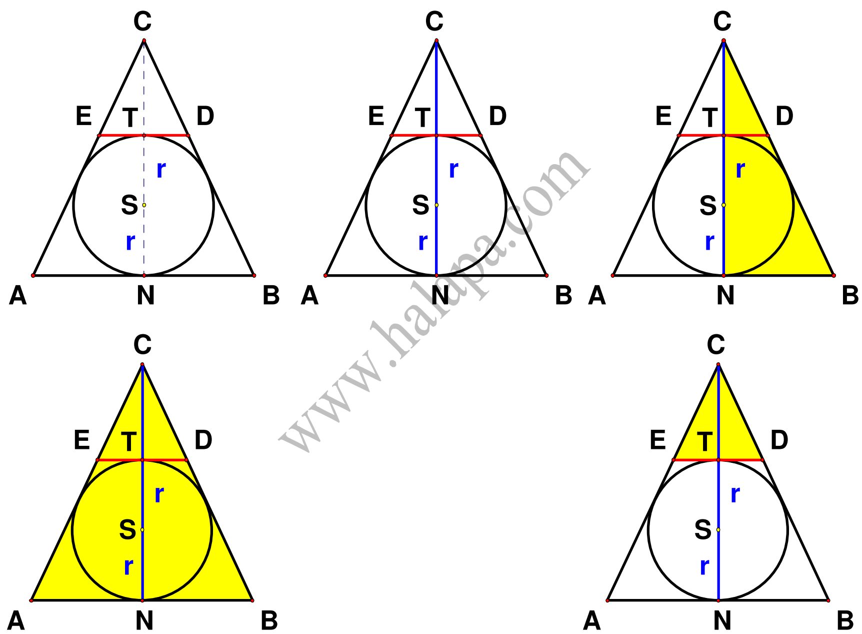
$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Za jednakokračan trokut te formule glase:

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-b)}\quad,\quad P=r\cdot s\quad,\quad s=\frac{a+2\cdot b}{2}.$$

Polumjer upisane kružnice jednakokračnom trokutu iznosi:

$$r=\frac{\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-b)}}{s}.$$



Sa slika vidi se:

$$|AB|=12\quad,\quad |AC|=|BC|=18\quad,\quad |NB|=\frac{1}{2}\cdot|AB|=6\quad,\quad |NT|=2\cdot r$$

$$|TC|=|NC|-|NT|=|NC|-2\cdot r$$

Izračunamo polumjer r upisane kružnice trokutu ABC.

$$\left.\begin{array}{l} a=12\;,\; b=18 \\ s=\dfrac{a+2\cdot b}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow s=\frac{12+2\cdot 18}{2}\Rightarrow s=\frac{12+36}{2}\Rightarrow s=\frac{48}{2}\Rightarrow s=24\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[r=\frac{\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-b)}}{s}\right]\Rightarrow r=\frac{\sqrt{24\cdot(24-12)\cdot(24-18)\cdot(24-18)}}{24}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{24\cdot 12\cdot 6\cdot 6}}{24} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2\cdot 12\cdot 12\cdot 6\cdot 6}}{24} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{2\cdot 12^2\cdot 6^2}}{24} \Rightarrow r=\frac{12\cdot 6\cdot\sqrt{2}}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{72\cdot\sqrt{2}}{24} \Rightarrow r=\frac{72\cdot\sqrt{2}}{24} \Rightarrow r=3\cdot\sqrt{2}.$$

Uočimo pravokutan trokut NBC i pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu visine $|NC|$ trokuta ABC.

$$|NC|^2=|BC|^2-|NB|^2 \Rightarrow |NC|^2=18^2-6^2 \Rightarrow |NC|^2=324-36 \Rightarrow |NC|^2=288 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |NC|^2=288 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |NC|=\sqrt{288} \Rightarrow |NC|=\sqrt{2\cdot 144} \Rightarrow |NC|=\sqrt{2\cdot 12^2} \Rightarrow |NC|=12\cdot\sqrt{2}.$$

Sada je

$$|TC|=|NC|-2\cdot r \Rightarrow |TC|=12\cdot\sqrt{2}-2\cdot 3\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |TC|=12\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |TC|=6\cdot\sqrt{2}.$$

Budući da su jednakokračni trokuti ΔABC i ΔEDC slični (imaju iste unutarnje kutove), vrijedi razmjer:

$$|AB|:|ED|=|NC|:|TC| \Rightarrow 12:|ED|=\left(12\cdot\sqrt{2}\right):\left(6\cdot\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot\sqrt{2}\cdot|ED|=12\cdot 6\cdot\sqrt{2} \Rightarrow 12\cdot\sqrt{2}\cdot|ED|=12\cdot 6\cdot\sqrt{2} \;/\cdot\frac{1}{12\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow |ED|=6.$$

Vježba 223

Jednakokračnom trokutu ABC s osnovicom AB duljine 24 cm i krakom duljine 36 cm upisana je kružnica. Na tu kružnicu položena je tangenta paralelno osnovici trokuta. Kolika je duljina odsječka te tangente koji je omeđen njezinim sjecištima s kracima trokuta?

Rezultat: 12.

Zadatak 224 (M – K – N, gimnazija)

Opseg pravokutnog trokuta jednak je 40 cm. Njegova je površina 120 cm^2. Duljina hipotenuze trokuta iznosi:

$A.\ 14\ cm \qquad B.\ 15\ cm \qquad C.\ 16\ cm \qquad D.\ 18\ cm$

Rješenje 224

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog trokuta duljina kateta a i b izračunava se po formuli:

$$P=\frac{a\cdot b}{2}.$$

Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O=a+b+c.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O=40 \\ P=120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=40 \\ \frac{a\cdot b}{2}=120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=40 \\ \frac{a\cdot b}{2}=120 \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=40 \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=40-c \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{kvadriramo prvu} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=40-c \;/^{2} \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+b)^{2}=(40-c)^{2} \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}=1600-80\cdot c+c^{2} \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Pitagorin poučak} \\ a^{2}+b^{2}=c^{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}=1600-80\cdot c+c^{2} \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c^{2}+2\cdot a\cdot b=1600-80\cdot c+c^{2} \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a\cdot b=1600-80\cdot c \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a\cdot b=1600-80\cdot c \;/:2 \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot b=800-40\cdot c \\ a\cdot b=240 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 800-40\cdot c=240 \Rightarrow -40\cdot c=240-800 \Rightarrow -40\cdot c=-560 \Rightarrow -40\cdot c=-560 \;/:(-40) \Rightarrow c=14.$$

Duljina hipotenuze trokuta iznosi c = 14 cm.

Odgovor je pod A.

Vježba 224

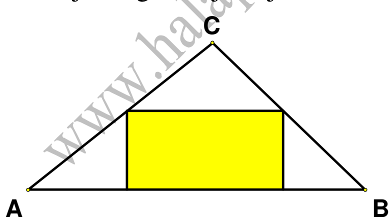
Opseg pravokutnog trokuta jednak je 24 cm. Njegova je površina 24 cm^2. Duljina hipotenuze trokuta iznosi:

$A.\ 10\ cm \qquad B.\ 9\ cm \qquad C.\ 11\ cm \qquad D.\ 12\ cm$

Rezultat: A.

Zadatak 225 (Fran, gimnazija)

U trokut zadane osnovice i visine upisan je pravokutnik. Izračunaj mu ploštinu ako je jedna stranica dva puta veća od druge. Koliko je mogućih rješenja?

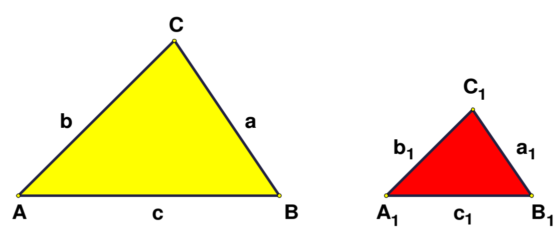


(In ΔABC (AB = 8 cm, its altitude 4 cm) a rectangle is inscribed. Evaluate its area knowing one of its sides is twice the length of the other. How many answers are there to this problem?)

Rješenje 225

Ponovimo!

Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1 \;,\; \beta=\beta_1 \;,\; \gamma=\gamma_1 \qquad , \qquad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).

Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Svi elementi sličnih trokuta (težišnice, simetrale kutova, visine, polumjeri opisane i upisane kružnice) proporcionalni su odgovarajućim elementima trokuta, uz isti koeficijent sličnosti.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

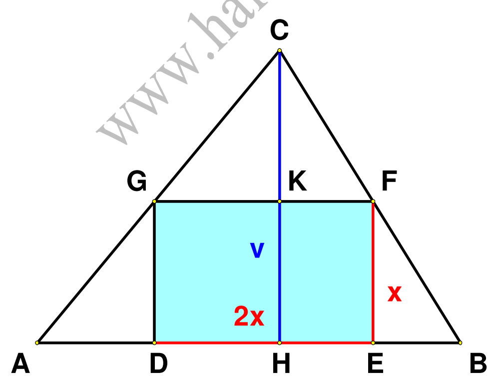
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Ploština pravokutnika
Ploština pravokutnika je jednaka produktu njegove duljine a i širine b.

$$P = a \cdot b.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Prvi slučaj



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 8 \;,\; |HC| = v = 4 \;,\; |DE| = |GF| = 2 \cdot x \;,\; |EF| = |HK| = x \;,\; |KC| = |HC| - |HK| = 4 - x$$

Uočimo da su trokuti ΔABC i ΔGFC slični (imaju jednake kutove) pa vrijedi razmjer:

$$|AB| : |HC| = |GF| : |KC| \;\Rightarrow\; 8 : 4 = 2x : (4 - x) \;\Rightarrow\; 8 \cdot (4 - x) = 4 \cdot 2x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 32 - 8 \cdot x = 8 \cdot x \;\Rightarrow\; -8 \cdot x - 8 \cdot x = -32 \;\Rightarrow\; -16 \cdot x = -32 \;\Rightarrow\; -16 \cdot x = -32 \;/ : (-16) \;\Rightarrow\; x = 2.$$

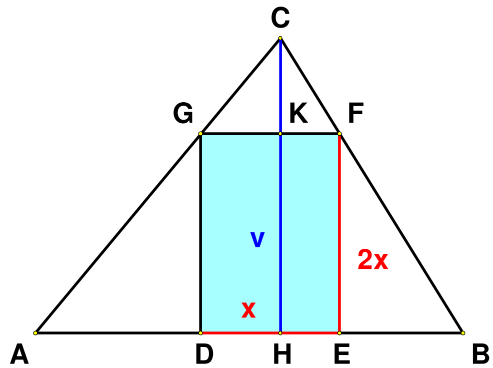
Stranice pravokutnika iznose:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ |DE| = 2 \cdot x \\ |EF| = x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |DE| = 2 \cdot 2 \\ |EF| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |DE| = 4 \; cm \\ |EF| = 2 \; cm \end{array}\right\}.$$

Ploština pravokutnika ima vrijednost:

$$P = |DE| \cdot |EF| = 4\ cm \cdot 2\ cm = 8\ cm^2.$$

Drugi slučaj



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 8\ ,\ |HC| = v = 4\ ,\ |DE| = |GF| = x\ ,\ |EF| = |HK| = 2 \cdot x\ ,\ |KC| = |HC| - |HK| = 4 - 2 \cdot x$$

Uočimo da su trokuti ΔABC i ΔGFC slični (imaju jednake kutove) pa vrijedi razmjer:

$$|AB| : |HC| = |GF| : |KC| \Rightarrow 8 : 4 = x : (4 - 2 \cdot x) \Rightarrow 8 \cdot (4 - 2 \cdot x) = 4 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32 - 16 \cdot x = 4 \cdot x \Rightarrow -16 \cdot x - 4 \cdot x = -32 \Rightarrow -20 \cdot x = -32 \Rightarrow -20 \cdot x = -32\ /: (-20) \Rightarrow x = 1.6.$$

Stranice pravokutnika iznose:

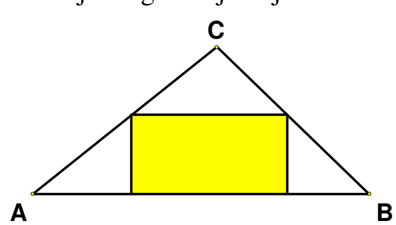
$$\left.\begin{array}{l} x = 1.6 \\ |DE| = x \\ |EF| = 2 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |DE| = 1.6 \\ |EF| = 2 \cdot 1.6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |DE| = 1.6\ cm \\ |EF| = 3.2\ cm \end{array}\right\}.$$

Ploština pravokutnika ima vrijednost:

$$P = |DE| \cdot |EF| = 1.6\ cm \cdot 3.2\ cm = 5.12\ cm^2.$$

Vježba 225

U trokut zadane osnovice i visine upisan je pravokutnik. Izračunaj mu ploštinu ako je jedna stranica dva puta veća od druge. Koliko je mogućih rješenja?



(In ΔABC (AB = 0.8 dm, its altitude 40 mm) a rectangle is inscribed. Evaluate its area knowing one of its sides is twice the length of the other. How many answers are there to this problem?)

Rezultat: 8 cm^2, 5.12 cm^2.

Zadatak 226 (Ante, srednja škola)

U jednakokračnom trokutu osnovica je za 2 cm, a krak za 1 cm dulji od visine na osnovicu. Odredite ploštinu trokuta.

Rješenje 226

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\quad ,\quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pitagorin poučak:
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}\quad,\quad P=\frac{b\cdot v_b}{2}\quad,\quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

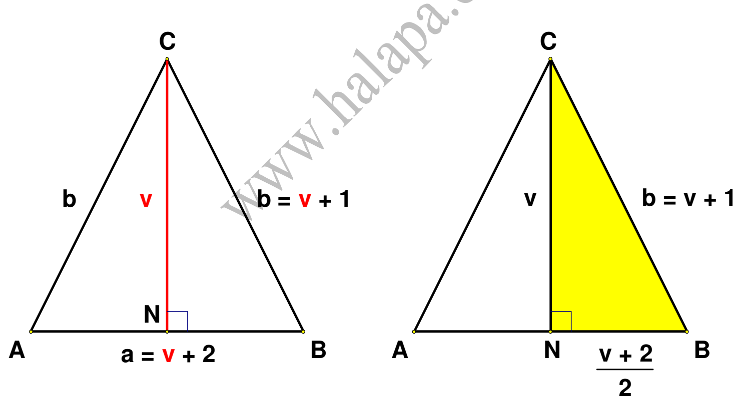
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a-n=b\quad,\quad a=b+n\quad,\quad a-b=n.$$



Sa slika vidi se:

$$|AB|=a=v+2\ ,\ |BC|=|AC|=b=v+1\ ,\ |CN|=v\ ,\ |NB|=\frac{1}{2}\cdot|AB|=\frac{v+2}{2}$$

Uočimo pravokutan trokut NBC i pomoću Pitagorina poučka izračunamo visinu v.

$$|BC|^2=|CN|^2+|NB|^2\ \Rightarrow\ (v+1)^2=v^2+\left(\frac{v+2}{2}\right)^2\ \Rightarrow\ (v+1)^2=v^2+\frac{(v+2)^2}{2^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (v+1)^2=v^2+\frac{(v+2)^2}{4}\ \Rightarrow\ v^2+2\cdot v+1=v^2+\frac{v^2+4\cdot v+4}{4}\ \Rightarrow\ v^2+2\cdot v+1=v^2+\frac{v^2+4\cdot v+4}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot v+1=\frac{v^2+4\cdot v+4}{4}\ \Rightarrow\ 2\cdot v+1=\frac{v^2+4\cdot v+4}{4}\ /\cdot 4\ \Rightarrow\ 4\cdot(2\cdot v+1)=v^2+4\cdot v+4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 8\cdot v+4=v^2+4\cdot v+4\ \Rightarrow\ 8\cdot v+4=v^2+4\cdot v+4\ \Rightarrow\ 8\cdot v=v^2+4\cdot v\ \Rightarrow\ v^2+4\cdot v=8\cdot v\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2+4\cdot v-8\cdot v=0 \Rightarrow v^2-4\cdot v=0 \Rightarrow v\cdot(v-4)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v=0 \\ v-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v=0 \text{ nema smisla} \\ v=4 \end{array}\right\} \Rightarrow v=4.$$

Visina trokuta ABC je v = 4 cm, a duljina osnovice

$$a=v+2 \Rightarrow a=4\ cm+2\ cm \Rightarrow a=6\ cm.$$

Ploština trokuta ABC iznosi:

$$P=\frac{a\cdot v}{2} \Rightarrow P=\frac{6\ cm\cdot 4\ cm}{2} \Rightarrow P=12\ cm^2.$$

Vježba 226

U jednakokračnom trokutu osnovica je za 0.2 dm, a krak za 10 mm dulji od visine na osnovicu. Odredite ploštinu trokuta.

Rezultat: 12 cm^2.

Zadatak 227 (Marija, srednja škola)

Izračunaj duljinu stranice i veličine kutova pravokutnog trokuta ako je a = 16 cm i c = 65 cm.

Rješenje 227

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Za pravokutan trokut vrijedi:

$$\alpha+\beta=90^0.$$

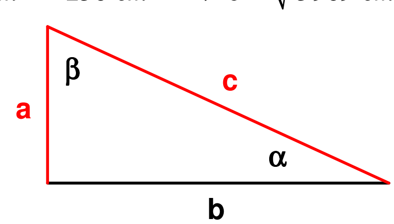
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2=a^2+b^2 \quad , \quad a^2=c^2-b^2 \quad , \quad b^2=c^2-a^2.$$

Duljinu stranice b izračunamo pomoću Pitagorina poučka.

$$b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2} \Rightarrow b=\sqrt{(65\ cm)^2-(16\ cm)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{4225\ cm^2-256\ cm^2} \Rightarrow b=\sqrt{3969\ cm^2} \Rightarrow b=63\ cm.$$



Računamo veličine kutova α i β.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{a}{c}\\ \alpha+\beta=90^{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)\\ \beta=90^{0}-\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)\\ \beta=90^{0}-\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=14^{0}15'\\ \beta=90^{0}-\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=14^{0}15'\\ \beta=90^{0}-14^{0}15'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=14^{0}15'\\ \beta=89^{0}60'-14^{0}15'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=14^{0}15'\\ \beta=75^{0}45'\end{array}\right\}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l}\cos\beta=\frac{a}{c}\\ \alpha+\beta=90^{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=\cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)\\ \alpha=90^{0}-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=\cos^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)\\ \alpha=90^{0}-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=75^{0}45'\\ \alpha=90^{0}-\beta\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=75^{0}45'\\ \alpha=90^{0}-75^{0}45'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=75^{0}45'\\ \alpha=89^{0}60'-75^{0}45'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=75^{0}45'\\ \alpha=14^{0}15'\end{array}\right\}.$$

3.inačica

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{a}{c}\\ \cos\beta=\frac{a}{c}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)\\ \beta=\cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=\sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)\\ \beta=\cos^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=14^{0}15'\\ \beta=75^{0}45'\end{array}\right\}.$$

Napomena: Uporabili smo stranice koje su zadane. Ako uzmemo u obzir treću stranicu b koju smo naknadno izračunali, onda ima još mogućnosti.

Vježba 227

Izračunaj duljinu stranice i veličine kutova pravokutnog trokuta ako je a = 32 cm i c = 130 cm.

Rezultat: b = 126 cm, α = 14° 15', β = 75° 45'.

Zadatak 228 (Tin, srednja škola)

Odredite kutove pravokutnog trokuta za koji vrijedi formula $(a+b)^{2}=8\cdot P,$ gdje su a i b katete, a P ploština trokuta.

Rješenje 228

Ponovimo!

$$(x+y)^{2}=x^{2}+2\cdot x\cdot y+y^{2}\quad,\quad(x-y)^{2}=x^{2}-2\cdot x\cdot y+y^{2}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:

1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Za pravokutan trokut vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^{0}.$$

Ploština pravokutnog trokuta kojemu su duljine kateta a i b računa se po formuli:

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta. Uočimo da su kutovi koji leže na trećoj stranici jednaki zbog činjenice da se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Ako se uzme u obzir pretpostavka da je

$$(a+b)^2 = 8 \cdot P$$

dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} (a+b)^2 = 8 \cdot P \\ P = \dfrac{a \cdot b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow (a+b)^2 = 8 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow (a+b)^2 = 8 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 4 \cdot a \cdot b \Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 4 \cdot a \cdot b \Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 4 \cdot a \cdot b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \; / \sqrt{\ } \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b.$$

Budući da su katete jednake, pravokutan trokut je jednakokračan pa su mu šiljasti kutovi također jednaki i iznose:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^{0} \\ \alpha = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = 45^{0}.$$

Vježba 228

Odredite kutove pravokutnog trokuta za koji vrijedi formula $c^2 + 2 \cdot a \cdot b = 8 \cdot P$, gdje su a i b katete, c hipotenuta, a P ploština trokuta.

Rezultat: Dokaz analogan uz primjenu Pitagorina poučka.

Zadatak 229 (Mira, srednja škola)

Pravac na kojem su točke A i B zatvara s ravninom kut mjere 32° 12'. Duljina dužine $\overline{AB}$ je 12 cm. Kolika je duljina ortogonalne projekcije dužine $\overline{AB}$ na tu ravninu?

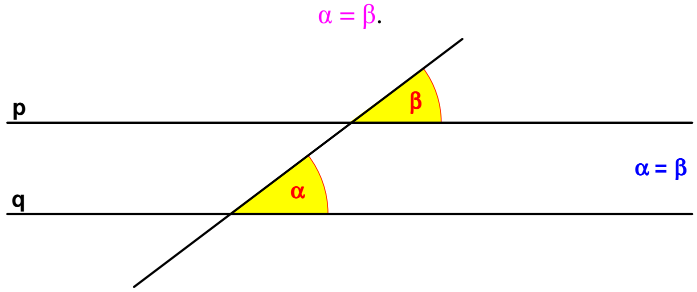
$A.\ 6.39\ cm \qquad B.\ 7.56\ cm \qquad C.\ 9.06\ cm \qquad D.\ 10.15\ cm$

Rješenje 229

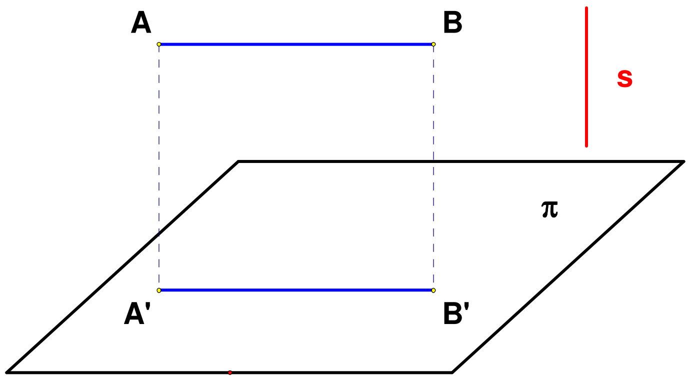
Ponovimo!

Ako su pravci p i q usporedni, onda je

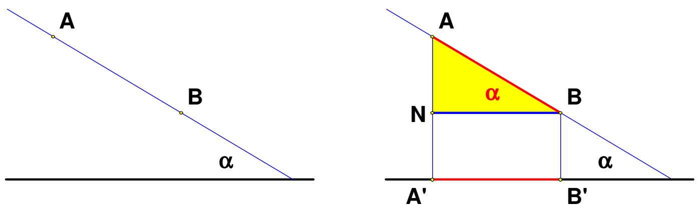
$$\alpha = \beta.$$



Ortogonalno projiciranje je projiciranje kod kojeg je pravac s koji određuje smjer projiciranja okomit na ravninu projekcija π.



Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



Sa slike vidi se:

$$|NB| = |A'B'|$$

Uočimo sa slike pravokutan trokut NBA i pomoću funkcije kosinus izračunamo duljinu $|\mathrm{NB}|$, a to je duljina ortogonalne projekcije dužine $\overline{AB}$.

$$\cos\alpha = \frac{|NB|}{|AB|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|NB|}{|AB|} \; / \cdot |AB| \Rightarrow |NB| = |AB| \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |NB| = 12\ cm \cdot \cos 32^{0}\, 12' \Rightarrow |NB| = 10.15\ cm \Rightarrow |A'B'| = 10.15\ cm.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 229

Pravac na kojem su točke A i B zatvara s ravninom kut mjere 32° 12'. Duljina dužine $\overline{AB}$ je 24 cm. Kolika je duljina ortogonalne projekcije dužine $\overline{AB}$ na tu ravninu?

$A.\ 20.31\ cm \qquad B.\ 18.56\ cm \qquad C.\ 19.06\ cm \qquad D.\ 21.15\ cm$

Rezultat: A.

Zadatak 230 (Darko, srednja škola)

U trokutu ABC duljine stranica su a = 20 cm i b = 30 cm, a duljina težišnice iz vrha A je t_a = 25 cm. Kolika je duljina stranice c tog trokuta?

Rješenje 230

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

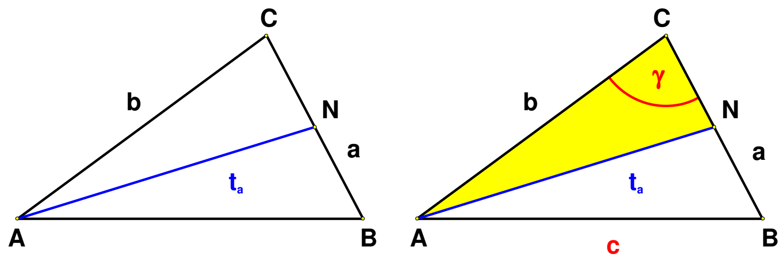
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma .$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} .$$

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) .$$



Sa slika vidi se:

$$|AB| = c \ , \ |BC| = a \ , \ |CA| = b \ , \ |NC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| = \frac{a}{2} \ , \ |AN| = t_a \ , \ \gamma = \angle BCA$$

Uočimo trokut ANC i pomoću kosinusovog poučka odredimo cos γ.

$$\cos\gamma = \frac{|NC|^2 + |CA|^2 - |AN|^2}{2 \cdot |NC| \cdot |CA|} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - t_a^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{\frac{a^2}{4} + b^2 - t_a^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\gamma = \frac{\frac{a^2}{4} + b^2 - t_a^2}{a \cdot b} .$$

Sada računamo duljinu stranice c trokuta ABC. Pomoću kosinusovog poučka dobije se:

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |CA| \cdot \cos\gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cos\gamma = \frac{\frac{a^2}{4} + b^2 - t_a^2}{a \cdot b} \right] \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\frac{a^2}{4} + b^2 - t_a^2}{a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\frac{a^2}{4} + b^2 - t_a^2}{a \cdot b} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \left(\frac{a^2}{4} + b^2 - t_a^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{4} - 2 \cdot b^2 + 2 \cdot t_a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{4} - 2 \cdot b^2 + 2 \cdot t_a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} - 2 \cdot b^2 + 2 \cdot t_a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} + b^2 - 2 \cdot b^2 + 2 \cdot t_a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{1} - \frac{a^2}{2} - b^2 + 2 \cdot t_a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{2 \cdot a^2 - a^2}{2} - b^2 + 2 \cdot t_a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{2} - b^2 + 2 \cdot t_a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{2} - b^2 + 2 \cdot t_a^2 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{a^2}{2} - b^2 + 2 \cdot t_a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{(20\ cm)^2}{2} - (30\ cm)^2 + 2 \cdot (25\ cm)^2} \Rightarrow c = 23.45\ cm.$$

Vježba 230

U trokutu ABC duljine stranica su a = 40 cm i b = 60 cm, a duljina težišnice iz vrha A je t_a = 50 cm. Kolika je duljina stranice c tog trokuta?

Rezultat: 46.90 cm.

Zadatak 231 (DM, gimnazija)

Ako za stranice trokuta ABC vrijedi a < b < c, onda je $a < \frac{a+b+c}{3}$. Dokažite.

Rješenje 231

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c < b + d \quad , \quad \left.\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Iz uvjeta zadatka

$$a < b < c$$

dobije se:

$$\left.\begin{matrix} a = a \\ a < b \\ a < c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \cdot a < a + b + c \Rightarrow 3 \cdot a < a + b + c \; /:3 \Rightarrow a < \frac{a+b+c}{3}.$$

Vježba 231

Ako za stranice trokuta ABC vrijedi a < b < c, onda je $c > \frac{a+b+c}{3}$. Dokažite.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 232 (Kolačić ☺, srednja škola)

Krošnja drveta visoka 4 m baca sjenu dugu 10 m. Ako je sjena cijelog drveta 15 m, onda je visina stabla

A. 15 dm B. 2 m C. 300 m D. 2.5 m E. 0.4 km

Rješenje 232

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

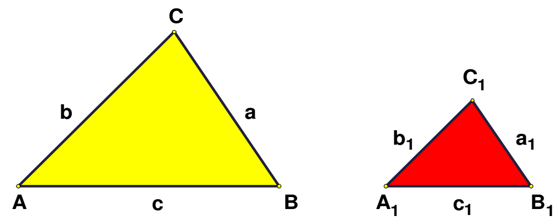
Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

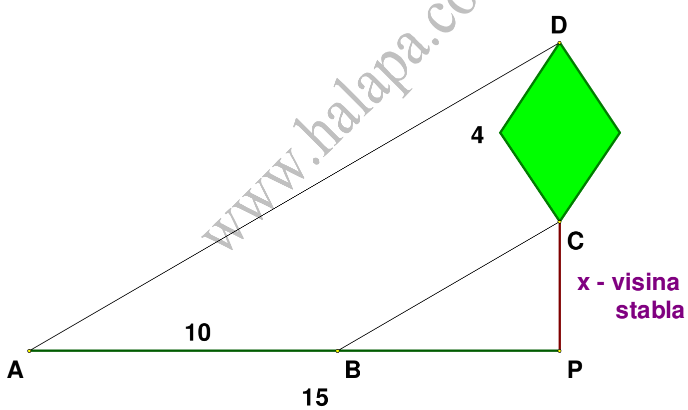
Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

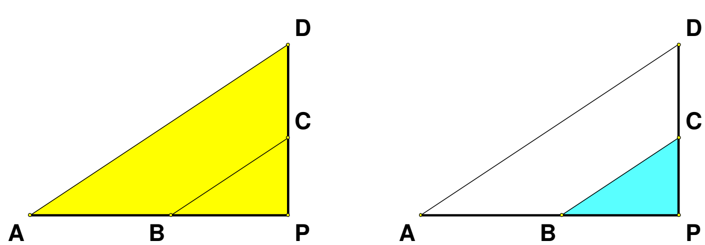
$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).
Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 10 \ , \ |AP| = 15 \ , \ |BP| = |AP| - |AB| = 15 - 10 = 5 \ , \ |PC| = x \ , \ |CD| = 4$$
$$|PD| = |PC| + |CD| = x + 4$$



1.inačica

Uočimo pravokutne trokute △APD i △BPC. Budući da su slični (imaju sukladne kutove), vrijedi razmjer:

$$\left|AP\right| : \left|BP\right| = \left|PD\right| : \left|PC\right| \Rightarrow 15 : 5 = (x+4) : x \Rightarrow 15 \cdot x = 5 \cdot (x+4) \Rightarrow 15 \cdot x = 5 \cdot (x+4) \; /: 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = x + 4 \Rightarrow 3 \cdot x - x = 4 \Rightarrow 2 \cdot x = 4 \Rightarrow 2 \cdot x = 4 \; /: 2 \Rightarrow x = 2.$$

Visina stabla je 2 m. Odgovor je pod B.

2.inačica

Uočimo pravokutne trokute △APD i △BPC. Budući da su slični (imaju sukladne kutove), vrijedi razmjer:

$$\left|AB\right| : \left|BP\right| = \left|CD\right| : \left|PC\right| \Rightarrow 10 : 5 = 4 : x \Rightarrow 10 \cdot x = 20 \Rightarrow 10 \cdot x = 20 \; /: 10 \Rightarrow x = 2.$$

Visina stabla je 2 m. Odgovor je pod B.

3.inačica

Uočimo pravokutne trokute △APD i △BPC. Budući da su slični (imaju sukladne kutove), vrijedi razmjer:

$$\left|AP\right| : \left|AB\right| = \left|PD\right| : \left|CD\right| \Rightarrow 15 : 10 = (x+4) : 4 \Rightarrow 60 = 10 \cdot (x+4) \Rightarrow 60 = 10 \cdot (x+4) \; /: 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 = x + 4 \Rightarrow x + 4 = 6 \Rightarrow x = 6 - 4 \Rightarrow x = 2.$$

Visina stabla je 2 m. Odgovor je pod B.

Vježba 232

Krošnja drveta visoka 8 m baca sjenu dugu 20 m. Ako je sjena cijelog drveta 30 m, onda je visina stabla

$A.\ 40\ dm \qquad B.\ 0.4\ m \qquad C.\ 30\ m \qquad D.\ 5\ m \qquad E.\ 0.2\ km$

Rezultat: A.

Zadatak 233 (Kolačić, gimnazija)

Omjer duljina katete i hipotenuze pravokutnog trokuta je 4 : 5. Izračunajte površinu trokuta ako je njegov opseg 36 cm.

Rješenje 233

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ako su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta ABC, onda je formula za:

- opseg

$$O = a + b + c$$

- površinu

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Iz omjera duljine katete (a ili b) i hipotenuze c dobije se:

$$a : c = 4 : 5 \Rightarrow 4 \cdot c = 5 \cdot a \Rightarrow 4 \cdot c = 5 \cdot a \;/ : 4 \Rightarrow c = \frac{5}{4} \cdot a.$$

Pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu katete b kao funkciju duljine katete a.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = c^2 \\ c = \frac{5}{4} \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = \left(\frac{5}{4} \cdot a\right)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{16} \cdot a^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{16} \cdot a^2 \;/ \cdot 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot a^2 + 16 \cdot b^2 = 25 \cdot a^2 \Rightarrow 16 \cdot b^2 = 25 \cdot a^2 - 16 \cdot a^2 \Rightarrow 16 \cdot b^2 = 9 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot b^2 = 9 \cdot a^2 \;/ : 16 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16} \cdot a^2 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16} \cdot a^2 \;/ \sqrt{} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{9}{16} \cdot a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{4} \cdot a.$$

Računamo duljinu katete a.

$$\left.\begin{array}{l} b = \frac{3}{4} \cdot a \;\; , \;\; c = \frac{5}{4} \cdot a \\ a + b + c = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow a + \frac{3}{4} \cdot a + \frac{5}{4} \cdot a = 36 \Rightarrow a + \frac{3}{4} \cdot a + \frac{5}{4} \cdot a = 36 \;/ \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot a + 3 \cdot a + 5 \cdot a = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot a = 144 \Rightarrow 12 \cdot a = 144 \;/ : 12 \Rightarrow a = 12.$$

Računamo duljinu katete b.

$$\left.\begin{array}{l} b = \frac{3}{4} \cdot a \\ a = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{3}{4} \cdot 12 \Rightarrow b = \frac{36}{4} \Rightarrow b = 9.$$

Površina trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 12 \;\; , \;\; b = 9 \\ P = \frac{a \cdot b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{12 \cdot 9}{2} \Rightarrow P = \frac{12 \cdot 9}{2} \Rightarrow P = 6 \cdot 9 \Rightarrow P = 54 \; cm^2.$$

Vježba 233

Omjer duljina katete i hipotenuze pravokutnog trokuta je 8 : 10. Izračunajte površinu trokuta ako je njegov opseg 36 cm.

Rezultat: 54 cm^2.

Zadatak 234 (Ivan, gimnazija)

Zadan je trokut ABC čiji kutovi zadovoljavaju relaciju

$$\alpha - \beta = \gamma.$$

Dokažite da je α pravi kut.

Rješenje 234

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c=b+d.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Vrste kutova:

- šiljasti kut – 0º do 90º
- pravi kut – 90º
- tupi kut – 90º do 180º
- ispruženi kut – 180º
- izbočeni kut – 180º do 360º
- puni kut – 360º

Iz sustava jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=180^{0} \\ \alpha-\beta=\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=180^{0} \\ \alpha-\beta-\gamma=0^{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\alpha-\beta-\gamma=180^{0}+0^{0} \Rightarrow \alpha+\cancel{\beta}+\cancel{\gamma}+\alpha-\cancel{\beta}-\cancel{\gamma}=180^{0}+0^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\alpha=180^{0} \Rightarrow 2\cdot\alpha=180^{0} \quad /:2 \Rightarrow \alpha=90^{0}.$$

Kut α je pravi kut.

Vježba 234

Zadan je trokut ABC čiji kutovi zadovoljavaju relaciju

$$\alpha-\beta=\frac{\gamma}{2}.$$

Dokažite da je α šiljasti kut.

Rezultat: Dokaz analogan: $\alpha=90^{0}-\frac{\gamma}{4}.$

Zadatak 235 (Pat, srednja škola)

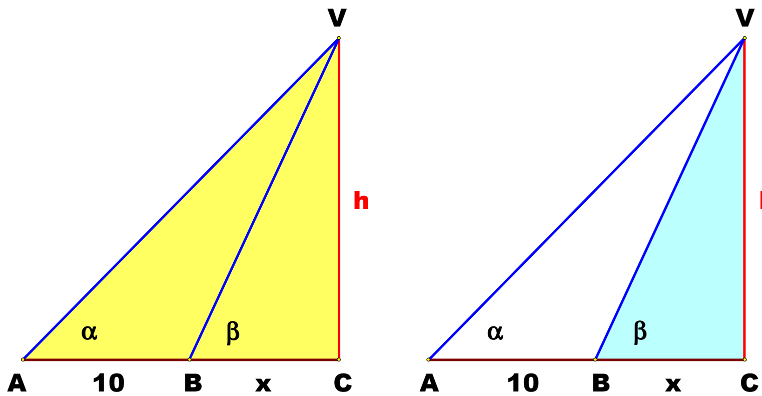
Potrebno je izračunati visinu drveta. Određene su dvije točke i izmjerena njihova udaljenost 10 m. Teodolitom su izmjereni kutovi (35º 25' i 46º 26') pod kojim se iz svake od točaka vidi vrh drveta.

Rješenje 235

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$



Sa slika vidi se:

$$|AB| = 10 \ , \ |BC| = x \ , \ |AC| = |AB| + |BC| = 10 + x \ , \ \angle CAV = \alpha = 35^{0} 25'$$

$$\angle CBV = \beta = 46^{0} 26' \ , \ |VC| = h$$

Uočimo pravokutan trokut ACV. Tada je:

$$tg\,\alpha = \frac{|VC|}{|AC|} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{h}{10+x} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{h}{10+x} \ / \cdot \frac{10+x}{tg\,\alpha} \Rightarrow 10 + x = \frac{h}{tg\,\alpha} \Rightarrow x = \frac{h}{tg\,\alpha} - 10.$$

Uočimo pravokutan trokut BCV. Tada je:

$$tg\,\beta = \frac{|VC|}{|BC|} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{h}{x} \ / \cdot \frac{x}{tg\,\beta} \Rightarrow x = \frac{h}{tg\,\beta}.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo visinu drveta h.

$$\left. \begin{matrix} x = \dfrac{h}{tg\,\alpha} - 10 \\ x = \dfrac{h}{tg\,\beta} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{matrix} \right] \Rightarrow \frac{h}{tg\,\alpha} - 10 = \frac{h}{tg\,\beta} \Rightarrow \frac{h}{tg\,\alpha} - \frac{h}{tg\,\beta} = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \cdot \left(\frac{1}{tg\,\alpha} - \frac{1}{tg\,\beta} \right) = 10 \Rightarrow h \cdot \left(\frac{1}{tg\,\alpha} - \frac{1}{tg\,\beta} \right) = 10 \ / \cdot \frac{1}{\frac{1}{tg\,\alpha} - \frac{1}{tg\,\beta}} \Rightarrow h = \frac{10}{\frac{1}{tg\,\alpha} - \frac{1}{tg\,\beta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{10}{\frac{1}{tg\,35^{0} 25'} - \frac{1}{tg\,46^{0} 26'}} \Rightarrow h = 21.97.$$

Visina drveta je 21.97 m.

Vježba 235

Potrebno je izračunati visinu drveta. Određene su dvije točke i izmjerena njihova udaljenost 20 m. Teodolitom su izmjereni kutovi (35º 25' i 46º 26') pod kojim se iz svake od točaka vidi vrh drveta.

Rezultat: 43.95 m.

Zadatak 236 (Matija, srednja škola)

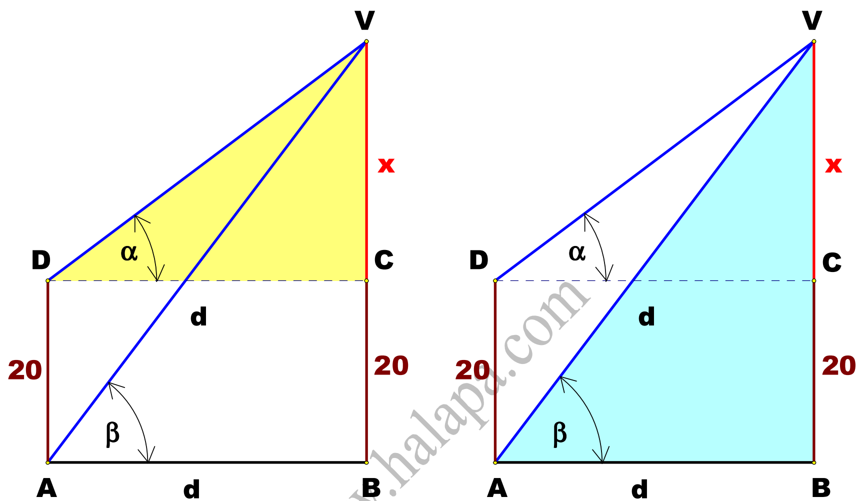
Sa prozora visokog 20 m vrh susjedne zgrade vidi se pod kutom od 12º, a sa zemlje (točno ispod prozora) pod kutom od 58º. Koliko je visoka zgrada?

Rješenje 236

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$



Sa slika vidi se:

$$|DA| = |CB| = 20 \ , \ |DC| = |AB| = d \ , \ |VC| = x \ , \ |VB| = h = |VC| + |CB| = x + 20$$

$$\angle CDV = \alpha = 12^{0} \ , \ \angle BAV = \beta = 58^{0}$$

Uočimo pravokutan trokut DCV. Tada je:

$$tg\,\alpha = \frac{|VC|}{|DC|} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{x}{d} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{x}{d} \ / \cdot \frac{d}{tg\,\alpha} \Rightarrow d = \frac{x}{tg\,\alpha}.$$

Uočimo pravokutan trokut ABV. Tada je:

$$tg\,\beta = \frac{|VB|}{|AB|} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{x+20}{d} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{x+20}{d} \ / \cdot \frac{d}{tg\,\beta} \Rightarrow d = \frac{x+20}{tg\,\beta}.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo veličinu x.

$$\left.\begin{array}{l} d = \dfrac{x}{tg\,\alpha} \\ d = \dfrac{x+20}{tg\,\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{x}{tg\,\alpha} = \frac{x+20}{tg\,\beta} \Rightarrow x \cdot tg\,\beta = tg\,\alpha \cdot (x+20) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot tg\,\beta = x \cdot tg\,\alpha + 20 \cdot tg\,\alpha \Rightarrow x \cdot tg\,\beta - x \cdot tg\,\alpha = 20 \cdot tg\,\alpha \Rightarrow x \cdot (tg\,\beta - tg\,\alpha) = 20 \cdot tg\,\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x\cdot(tg\,\beta - tg\,\alpha) = 20\cdot tg\,\alpha \; /\cdot\frac{1}{tg\,\beta - tg\,\alpha} \;\Rightarrow\; x = \frac{20\cdot tg\,\alpha}{tg\,\beta - tg\,\alpha} \;\Rightarrow\; x = \frac{20\cdot tg\,12^0}{tg\,58^0 - tg\,12^0} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x = 3.06.$$

Visina zgrade iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} |VB| = |VC| + |CB| \\ h = x + 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \; h = 3.06 + 20 \;\Rightarrow\; h = 23.06 \; m.$$

Vježba 236

Sa prozora visokog 40 m vrh susjedne zgrade vidi se pod kutom od 12º, a sa zemlje (točno ispod prozora) pod kutom od 58º. Koliko je visoka zgrada?

Rezultat: 46.13 m.

Zadatak 237 (Anđelka, Katarina, Marijana, TUPŠ)

Duljine stranica trokuta su 13 cm, 14 cm i 15 cm. Kolika je najkraća visina trokuta?

Rješenje 237

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \;,\; a \ge 0.$$

$$\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visina je okomica spuštena iz vrha trokuta na suprotnu stranicu. Najkraća visina spuštena je na najdulju stranicu trokuta. Najdulja visina spuštena je na najkraću stranicu trokuta. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, a v_a, v_b, v_c duljine visina, tada vrijedi:

$$a < b < c \Rightarrow v_a > v_b > v_c.$$

Ploština trokuta izračunava se po formuli

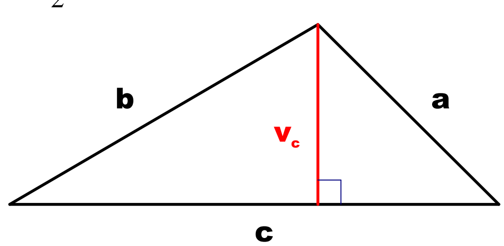
$$P = \frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Heronova formula
Površina trokuta čije su stranice a, b i c računa se po formuli

$$P = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \quad , \quad s = \frac{a+b+c}{2},$$

gdje je s poluopseg trokuta
Budući da su zadane stranice trokuta, njegovu površinu izračunamo pomoću Heronove formule.

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad , \quad P = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}.$$



Stranica c je najdulja stranica trokuta pa je visina v_c najkraća. Tada je:

$$P=\frac{c\cdot v_c}{2}\ \Rightarrow\ P=\frac{c\cdot v_c}{2}\ /\cdot\frac{2}{c}\ \Rightarrow\ v_c=\frac{2\cdot P}{c}.$$

Računamo visinu v_c.

$$\left.\begin{array}{l} v_c=\frac{2\cdot P}{c} \\ P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ s=\frac{a+b+c}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_c=\frac{2\cdot\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}{c} \\ s=\frac{a+b+c}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{bmatrix} a=13 \\ b=14 \\ c=15 \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_c=\frac{2\cdot\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}{c} \\ s=\frac{13+14+15}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_c=\frac{2\cdot\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}{c} \\ s=\frac{42}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_c=\frac{2\cdot\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}{c} \\ s=21 \end{array}\right\}\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}}{15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}}{15}\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot\sqrt{3\cdot 7\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3}}{15}\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot\sqrt{3^2\cdot 7^2\cdot 2^4}}{15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{2^4}}{15}\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot 3\cdot 7\cdot 2^2}{15}\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot 3\cdot 7\cdot 4}{15}\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot 3\cdot 7\cdot 4}{15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_c=\frac{2\cdot 7\cdot 4}{5}\Rightarrow v_c=\frac{56}{5}\Rightarrow v_c=11.2\ cm.$$

Vježba 237

Duljine stranica trokuta su 26 cm, 28 cm i 30 cm. Kolika je najkraća visina trokuta?

Rezultat: 22.4 cm.

Zadatak 238 (Anđelka, Katarina, Marijana, TUPŠ)

Ako su duljine stranica trokuta 9 cm, 12 cm i 15 cm, kolika je površina trokuta čiji su vrhovi polovišta duljina stranica trokuta?

Rješenje 238

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad \sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

$$\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}=\sqrt[n]{a^m}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Heronova formula

Površina trokuta čije su stranice a, b i c računa se po formuli

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\quad,\quad s=\frac{a+b+c}{2},$$

gdje je s poluopseg trokuta

Kažemo da su dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ slična ako se podudaraju u svim trima kutovima:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\alpha_1\\ \beta=\beta_1\\ \gamma=\gamma_1\end{array}\right\} \Rightarrow \ \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

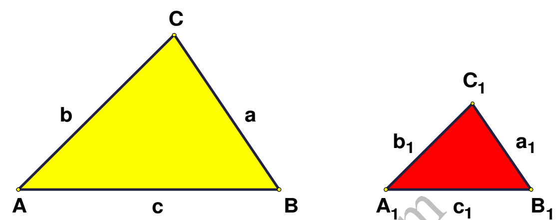
Omjer duljina stranica sličnih trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$

$$k=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$$

zove se koeficijent sličnosti.
Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica.

$$\frac{P}{P_1}=k^2 \quad , \quad \frac{P}{P_1}=\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \quad , \quad \frac{P}{P_1}=\left(\frac{b}{b_1}\right)^2 \quad , \quad \frac{P}{P_1}=\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 .$$

Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

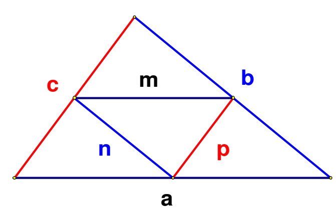
$$\alpha=\alpha_1 \ , \ \beta=\beta_1 \ , \ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).
pri čemu vrijedi:

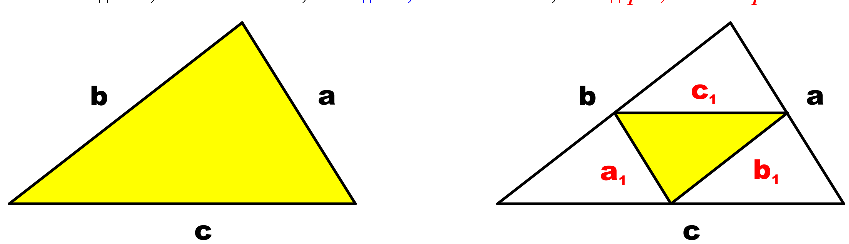
$$\frac{a_1}{a}=k \quad , \quad \frac{b_1}{b}=k \quad , \quad \frac{c_1}{c}=k.$$

Srednjice trokuta

Dužine koje spajaju polovišta stranica trokuta zovu se srednjice trokuta. Svaki trokut ima tri srednjice. Svaka srednjica trokuta usporedna je sa suprotnom stranicom trokuta, a duljina joj je jednaka polovici duljine te stranice.



$$a \,||\, m \ , \ a=2\cdot m \quad , \quad b \,||\, n \ , \ b=2\cdot n \quad , \quad c \,||\, p \ , \ c=2\cdot p.$$



1.inačica

Stranice trokuta čiji su vrhovi polovišta duljina stranica zadanog trokuta srednjice su stranica zadanog trokuta i iznose:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\cdot a \\ b_1 &= \frac{1}{2}\cdot b \\ c_1 &= \frac{1}{2}\cdot c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a=9 \\ b=12 \\ c=15 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\cdot 9 \\ b_1 &= \frac{1}{2}\cdot 12 \\ c_1 &= \frac{1}{2}\cdot 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 4.5 \\ b_1 &= 6 \\ c_1 &= 7.5 \end{aligned}\right\}.$$

Računamo površinu P_1 trokuta čije su stranice a_1, b_1 i c_1.

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{s\cdot(s-a_1)\cdot(s-b_1)\cdot(s-c_1)} \\ s &= \frac{a_1+b_1+c_1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1=4.5 \\ b_1=6 \\ c_1=7.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{s\cdot(s-a_1)\cdot(s-b_1)\cdot(s-c_1)} \\ s &= \frac{4.5+6+7.5}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{s\cdot(s-a_1)\cdot(s-b_1)\cdot(s-c_1)} \\ s &= \frac{18}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{s\cdot(s-a_1)\cdot(s-b_1)\cdot(s-c_1)} \\ s &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{9\cdot(9-4.5)\cdot(9-6)\cdot(9-7.5)} \Rightarrow P_1 = \sqrt{9\cdot 4.5\cdot 3\cdot 1.5} \Rightarrow P_1 = \sqrt{3^2\cdot 3\cdot 1.5\cdot 3\cdot 1.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \sqrt{3^4\cdot 1.5^2} \Rightarrow P_1 = \sqrt{3^4}\cdot\sqrt{1.5^2} \Rightarrow P_1 = 3^2\cdot 1.5 \Rightarrow P_1 = 9\cdot 1.5 \Rightarrow P_1 = 13.5\ cm^2.$$

2.inačica

Izračunamo površinu P zadanog trokuta čije su stranice a, b i c.

$$\left.\begin{aligned} P &= \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ s &= \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a=9 \\ b=12 \\ c=15 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} P &= \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ s &= \frac{9+12+15}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} P &= \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ s &= \frac{36}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} P &= \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ s &= 18 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{18\cdot(18-9)\cdot(18-12)\cdot(18-15)} \Rightarrow P = \sqrt{18\cdot 9\cdot 6\cdot 3} \Rightarrow P = \sqrt{2\cdot 3\cdot 3\cdot 3^2\cdot 2\cdot 3\cdot 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{2^2\cdot 3^6} \Rightarrow P = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3^6} \Rightarrow P = 2\cdot 3^3 \Rightarrow P = 2\cdot 27 \Rightarrow P = 54\ cm^2.$$

Budući da je trokut sa stranicama a_1, b_1 i c_1 sličan trokutu sa stranicama a, b i c, koeficijent sličnosti k iznosi:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\cdot a \\ b_1 &= \frac{1}{2}\cdot b \\ c_1 &= \frac{1}{2}\cdot c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}\cdot a\ /\cdot\frac{1}{a} \\ b_1 &= \frac{1}{2}\cdot b\ /\cdot\frac{1}{b} \\ c_1 &= \frac{1}{2}\cdot c\ /\cdot\frac{1}{c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a} &= \frac{1}{2} = k \\ \frac{b_1}{b} &= \frac{1}{2} = k \\ \frac{c_1}{c} &= \frac{1}{2} = k \end{aligned}\right\}.$$

Tada za površine P_1 i P sličnih trokuta vrijedi:

$$\frac{P_1}{P}=k^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P}=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{P_1}{P}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P_1}{P}=\frac{1}{4} \;/\cdot P \Rightarrow P_1=\frac{1}{4}\cdot P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1=\frac{1}{4}\cdot 54\ cm^2 \Rightarrow P_1=13.5\ cm^2.$$

Vježba 238

Ako su duljine stranica trokuta 18 cm, 24 cm i 30 cm, kolika je površina trokuta čiji su vrhovi polovišta duljina stranica trokuta?

Rezultat: 22.4 cm.

Zadatak 239 (Željko, gimnazija)

Ako za stranice pravokutnog trokuta vrijedi a + c = 4 · b, koliki su kutovi trokuta?

Rješenje 239

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad 1^0=60'.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za pravokutan trokut vrijedi:

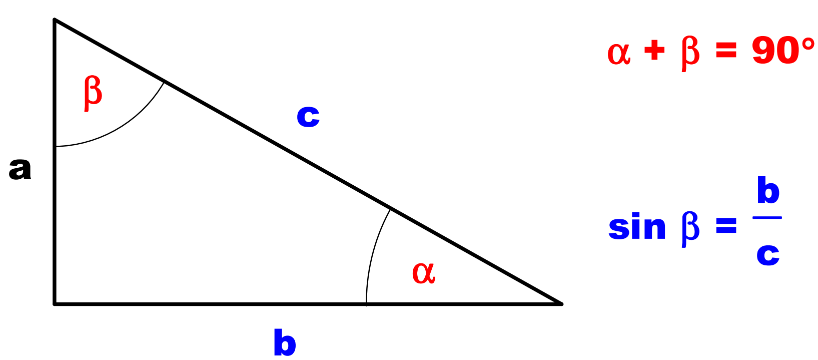
$$\alpha+\beta=90^0.$$

Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2=a^2+b^2 \quad , \quad a^2=c^2-b^2 \quad , \quad b^2=c^2-a^2.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$



Napišimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{matrix} a+c=4\cdot b \\ a^2+b^2=c^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=4\cdot b-c \\ a^2+b^2=c^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow (4\cdot b-c)^2+b^2=c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot b^2 - 8 \cdot b \cdot c + c^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 16 \cdot b^2 - 8 \cdot b \cdot c + c^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 16 \cdot b^2 - 8 \cdot b \cdot c + b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17 \cdot b^2 - 8 \cdot b \cdot c = 0 \Rightarrow b \cdot (17 \cdot b - 8 \cdot c) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 0 \text{ nema smisla} \\ 17 \cdot b - 8 \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 17 \cdot b - 8 \cdot c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17 \cdot b = 8 \cdot c \Rightarrow 17 \cdot b = 8 \cdot c \ / \cdot \frac{1}{17 \cdot c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{8}{17} \Rightarrow \left[\sin \beta = \frac{b}{c}\right] \Rightarrow \sin \beta = \frac{8}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) \Rightarrow \beta = 28^0 4'.$$

Računamo kut α.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 90^0 \\ \beta = 28^0 4' \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + 28^0 4' = 90^0 \Rightarrow \alpha = 90^0 - 28^0 4' \Rightarrow \alpha = 89^0 60' - 28^0 4' \Rightarrow \alpha = 61^0 56'.$$

Vježba 239

Ako za stranice pravokutnog trokuta vrijedi b = 2 · (c – a), koliki su kutovi trokuta?

Rezultat: Analogno radimo. α = 36° 52', β = 53° 8'.

Zadatak 240 (Miran, srednja škola)

Kakav je trokut za čije šiljaste kutove vrijedi jednakost $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$?

Rješenje 240

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za pravokutan trokut vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^0.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad \sin x = \cos\left(90^0 - x\right) \quad , \quad \cos x = \sin\left(90^0 - x\right).$$

Transformiramo zadanu jednakost.

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \beta.$$

Budući da su kutovi α i β po pretpostavci šiljasti kutovi, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \sin \alpha > 0 \\ \cos \beta > 0 \end{array}\right\}.$$

Tada je:

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta \Rightarrow \sin^2 \alpha = \cos^2 \beta \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin\left(90^0 - \beta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^0 - \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^0.$$

Trokut je pravokutan.

Vježba 240

Kakav je trokut za čije šiljaste kutove vrijedi jednakost $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$?

Rezultat: Trokut je pravokutan.