Zadatak 141 (Luka, srednja škola)

Neka je u trokutu ABC razlika najdulje i najkraće stranice 2 cm i neka se sinusi kutova trokuta odnose kao 60 : 56 : 52. Nađi duljine stranica trokuta.

Rješenje 141

Ponovimo!

Poučak o sinusima (sinusov poučak)

U trokutu ABC vrijedi

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Neka je

$$a > b > c,$$

tada slijedi

$$a - c = 2.$$

Budući da je zadan omjer sinusa kutova trokuta, dobije se:

$$\left.\begin{matrix} \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 60 : 56 : 52 \\ a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow a : b : c = 60 : 56 : 52 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 60 \cdot k \\ b = 56 \cdot k \\ c = 52 \cdot k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{k} - \text{koeficijent} \\ \text{razmjernosti} \\ (\text{proporcionalnosti}) \end{bmatrix}.$$

Izračunamo k koeficijent razmjernosti (proporcionalnosti):

$$\left.\begin{matrix} a = 60 \cdot k \quad , \quad c = 52 \cdot k \\ a - c = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 60 \cdot k - 52 \cdot k = 2 \Rightarrow 8 \cdot k = 2 \; /:8 \Rightarrow k = \frac{2}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{4}.$$

Duljine stranica trokuta iznose:

$$\left.\begin{matrix} a = 60 \cdot k \\ b = 56 \cdot k \\ c = 52 \cdot k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 60 \cdot \frac{1}{4} \\ b = 56 \cdot \frac{1}{4} \\ c = 52 \cdot \frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 15 \; cm \\ b = 14 \; cm \\ c = 13 \; cm \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 141

Neka je u trokutu ABC razlika najdulje i najkraće stranice 2 cm i neka se sinusi kutova trokuta odnose kao 30 : 28 : 26. Nađi duljine stranica trokuta.

Rezultat: a = 15 cm , b = 14 cm , c = 13 cm.

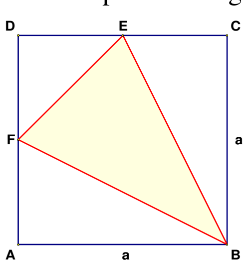
Zadatak 142 (Josip, gimnazija)

Kolika je površina trokuta BEF upisanog u kvadrat ABCD duljine stranice a pri čemu je E polovište stranice $\overline{CD}$, F polovište stranice $\overline{AD}$?

Rješenje 142

Ponovimo!

Površina pravokutnog trokuta duljine kateta a i b je:



$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a,$$

$$|CE| = |ED| = |DF| = |FA| = \frac{a}{2}.$$

Uoči da su trokuti ΔBCE i ΔABF sukladni pa su im jednake površine:

$$P_{BCE} = P_{ABF}.$$

Površina trokuta BEF jednaka je površini kvadrata ABCD umanjenoj za površine trokuta ΔBCE, ΔEDF i ΔABF.

$$P_{BEF} = P_{ABCD} - P_{BCE} - P_{EDF} - P_{ABF} \Rightarrow \left[P_{BCE} = P_{ABF} \right] \Rightarrow$$

$$P_{BEF} = P_{ABCD} - 2 \cdot P_{BCE} - P_{EDF} \Rightarrow P_{BEF} = a^2 - 2 \cdot \frac{|BC| \cdot |CE|}{2} - \frac{|ED| \cdot |DF|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{BEF} = a^2 - 2 \cdot \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} - \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} \Rightarrow P_{BEF} = a^2 - 2 \cdot \frac{\frac{a^2}{2}}{2} - \frac{\frac{a^2}{4}}{2} \Rightarrow P_{BEF} = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{BEF} = \frac{8 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 - a^2}{8} \Rightarrow P_{BEF} = \frac{3}{8} \cdot a^2.$$

Vježba 142

Kolika je površina trokuta BEF upisanog u kvadrat ABCD duljine stranice 2 pri čemu je E polovište stranice $\overline{CD}$, F polovište stranice $\overline{AD}$?

Rezultat: $\frac{3}{2}.$

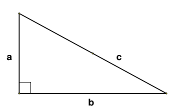
Zadatak 143 (Mirela, srednja škola)

Koliki je opseg trokuta ΔABC ako je a = 20 cm, t_a = 13 cm i v_a = 12 cm.

Rješenje 143

Ponovimo!

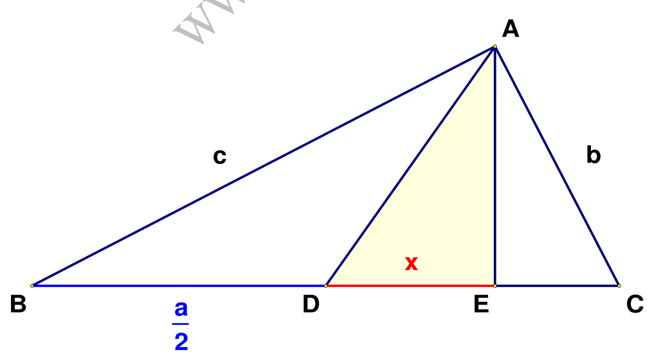
Pitagorin poučak



Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad , \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad , \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Sa slike vidi se:



$$|BC| = a = 20 \ , \ |AB| = c \ , \ |AC| = b \ , \ |AD| = t_a = 13 \ , \ |AE| = v_a = 12 \ , \ |DE| = x$$

$$|BD| = |DC| = \frac{a}{2} = 10 \ , \ |BE| = |BD| + |DE| = \frac{a}{2} + x = 10 + x \ , \ |EC| = |DC| - |DE| = \frac{a}{2} - x = 10 - x$$

Uočimo tri pravokutna trokuta: ΔDEA, ΔBEA i ΔECA.

Pomoću Pitagorina poučka dobije se:

- za trokut ΔDEA

$$|DE|^2 = |AD|^2 - |AE|^2 \Rightarrow x^2 = t_a^2 - v_a^2 \Rightarrow x^2 = 13^2 - 12^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x = \sqrt{25} \Rightarrow x = 5 \ cm.$$

- za trokut ΔBEA

$$|BA|^2 = |BE|^2 + |AE|^2 \Rightarrow c^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + v_a^2 \Rightarrow c^2 = (10+5)^2 + 12^2 \Rightarrow c^2 = 15^2 + 12^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 225 + 144 \Rightarrow c^2 = 369 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow c = \sqrt{369} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{array}\right] \Rightarrow c = \sqrt{9 \cdot 41} \Rightarrow c = 3 \cdot \sqrt{41} \; cm.$$

- za trokut ΔECA

$$|CA|^2 = |AE|^2 + |EC|^2 \Rightarrow b^2 = v_a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \Rightarrow b^2 = 12^2 + (10-5)^2 \Rightarrow b^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 144 + 25 \Rightarrow b^2 = 169 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow b = \sqrt{169} \Rightarrow b = 13 \; cm.$$

Opseg trokuta ABC iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 20 \; cm \; , \; b = 13 \; cm \; , \; c = 3 \cdot \sqrt{41} \; cm \\ O = a + b + c \end{array}\right\} \Rightarrow O = 20 \; cm + 13 \; cm + 3 \cdot \sqrt{41} \; cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = \left(33 + 3 \cdot \sqrt{41}\right) cm = 3 \cdot \left(11 + \sqrt{41}\right) cm.$$

Vježba 143

Koliki je opseg trokuta ΔABC ako je a = 40 cm, t_a = 26 cm i v_a = 24 cm.

Rezultat: $6 \cdot \left(11 + \sqrt{41}\right) cm.$

Zadatak 144 (Mirela, srednja škola)

Izračunaj opseg trokuta kojemu je stranica c = 16 cm, $v_c = 5 \cdot \sqrt{3}$ cm, α = 60°.

Rješenje 144

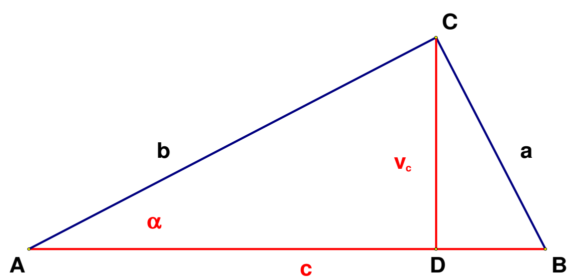
Ponovimo!

U pravokutnom trokutu je sinus šiljastog kuta jednak omjeru katete nasuprot tog kuta i hipotenuze.

Poučak o kosinusima (kosinusov poučak)

Za trokut ABC vrijedi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \; , \; |BC| = a \; , \; |CA| = b \; , \; |CD| = v_c \; , \; \angle \, CAB = \alpha$$

Uočimo pravokutan trokut ΔADC i pomoću funkcije sinus izračunamo duljinu stranice b:

$$\sin\alpha = \frac{|CD|}{|AC|} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v_c}{b} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v_c}{b} \; / \cdot \frac{b}{\sin\alpha} \Rightarrow b = \frac{v_c}{\sin\alpha} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sin 60^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow b = \frac{\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow b = 10 \ cm.$$

Iz trokuta ΔABC pomoću kosinusova poučka dobije se duljina stranice a:

$$|BC|^2 = |CA|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |CA| \cdot |AB| \cdot \cos \angle CAB \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \cos 60^0 \Rightarrow a^2 = 100 + 256 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 356 - 160 \Rightarrow a^2 = 196 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{196} \Rightarrow a = 14 \ cm.$$

Opseg trokuta ABC iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} a = 14 \ cm \ , \ b = 10 \ cm \ , \ c = 16 \ cm \\ O = a + b + c \end{array} \right\} \Rightarrow O = 14 \ cm + 10 \ cm + 16 \ cm \Rightarrow O = 40 \ cm.$$

Vježba 144

Izračunaj opseg trokuta kojemu je stranica c = 32 cm, $v_c = 10 \cdot \sqrt{3}$ cm, α = 60°.

Rezultat: 80 cm.

Zadatak 145 (Iva, srednja škola)

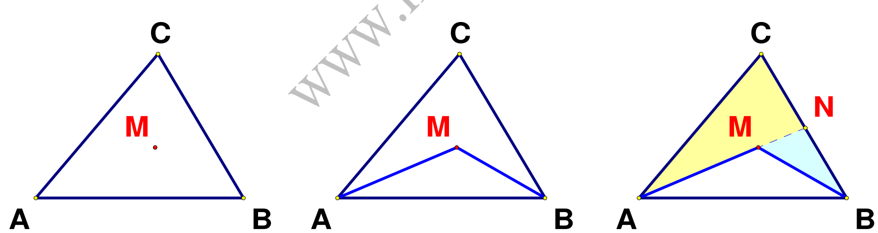
Ako je točka M u trokutu ABC, dokaži da je $|AM| + |MB| < |AC| + |CB|$.

Rješenje 145

Ponovimo!

Svaka stranica trokuta ABC manja je od zbroja preostalih dviju stranica:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$



Sa slika vidi se:

$$|AN| = |AM| + |MN| \quad , \quad |CB| = |CN| + |NB|$$

Nadopunili smo crtež do geometrijskog lika u kojemu su, osim zadanih, poznati još neki podaci.

Uočimo trokute ΔANC i ΔBNM. Tada vrijedi:

- za trokut ANC

$$|AN| < |AC| + |CN|$$

- za trokut BNM

$$|MB| < |MN| + |NB|.$$

Zbrajanjem dobivenih nejednakosti dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} |AN| < |AC| + |CN| \\ |MB| < |MN| + |NB| \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array} \right] \Rightarrow |AN| + |MB| < |AC| + |CN| + |MN| + |NB| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AN| + |MB| < |AC| + |MN| + \left(|CN| + |NB| \right) \Rightarrow \left[|CB| = |CN| + |NB| \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AN|+|MB|<|AC|+|MN|+|CB| \Rightarrow \left[\, |AN|=|AM|+|MN| \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AM|+|MN|+|MB|<|AC|+|MN|+|CB| \Rightarrow |AM|+|MN|+|MB|<|AC|+|MN|+|CB| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AM|+|MB|<|AC|+|CB|.$$

Vježba 145

Ako je točka M u trokutu ABC, dokaži da je $|BM|+|MC|<|AB|+|AC|$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 146 (Ljiljana, srednja škola)

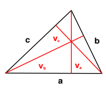
Točka M nalazi se unutar trokuta ABC. Njezine udaljenosti od stranica trokuta $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ neka su redom x, y, z. Označimo sa v_a, v_b, v_c duljine visina tog trokuta. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{x}{v_a}+\frac{y}{v_b}+\frac{z}{v_c}=1.$$

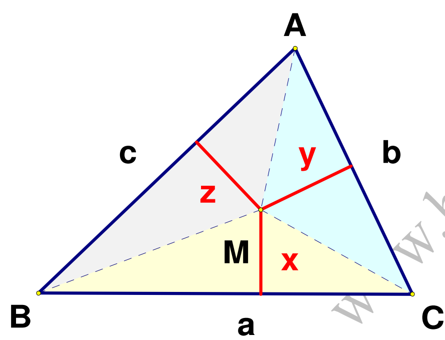
Rješenje 146

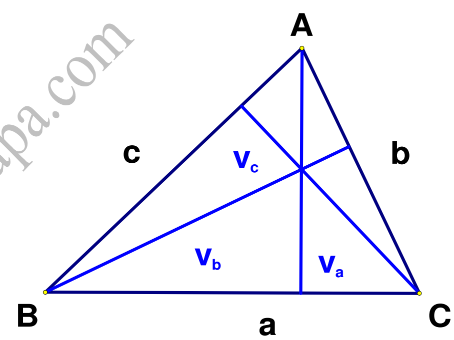
Ponovimo!

Površine trokuta



$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$





Sa slika vidi se:

$$|AB|=c \;,\; |BC|=a \;,\; |CA|=b$$

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \Rightarrow P=\frac{a\cdot v_a}{2} \;/\cdot \frac{2}{v_a} \Rightarrow a=\frac{2\cdot P}{v_a} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \Rightarrow P=\frac{b\cdot v_b}{2} \;/\cdot \frac{2}{v_b} \Rightarrow b=\frac{2\cdot P}{v_b}$$

$$P=\frac{c\cdot v_c}{2} \Rightarrow P=\frac{c\cdot v_c}{2} \;/\cdot \frac{2}{v_c} \Rightarrow c=\frac{2\cdot P}{v_c}.$$

Uočimo trokute ΔABM, ΔBCM i ΔCAM. Površina P trokuta ABC jednaka je zbroju površina trokuta ΔABM, ΔBCM i ΔCAM. Za površinu P trokuta ABC, dakle vrijedi:

$$P=P_{ABM}+P_{BCM}+P_{CAM} \Rightarrow P=\frac{c\cdot z}{2}+\frac{a\cdot x}{2}+\frac{b\cdot y}{2} \Rightarrow P=\frac{a\cdot x}{2}+\frac{b\cdot y}{2}+\frac{c\cdot z}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=2\cdot P.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{2\cdot P}{v_a} \;,\; b=\dfrac{2\cdot P}{v_b} \;,\; c=\dfrac{2\cdot P}{v_c} \\ a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=2\cdot P \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\cdot P}{v_a}\cdot x+\frac{2\cdot P}{v_b}\cdot y+\frac{2\cdot P}{v_c}\cdot z=2\cdot P \;/\cdot \frac{1}{2\cdot P} \Rightarrow \frac{x}{v_a}+\frac{y}{v_b}+\frac{z}{v_c}=1.$$

Vježba 146

Točka M središte je kružnice polumjera r upisane trokutu ABC. Označimo sa v_a, v_b, v_c duljine visina tog trokuta. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{1}{v_a}+\frac{1}{v_b}+\frac{1}{v_c}=\frac{1}{r}.$$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 147 (Željko, srednja škola)

Točka C(2, 2) je vrh trokuta ABC. Visina trokuta povučena iz vrha A leži na pravcu $2 \cdot x - 3 \cdot y + 12 = 0$, a težišnica povučena iz vrha A na pravcu $x + y = 0$. Nađi koordinate točke B.

Rješenje 147

Ponovimo!

Težišnica je spojnica vrha trokuta s polovištem nasuprotne stranice.

Ako je P(x, y) polovište dužine $\overline{AB}$, gdje je $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, onda je

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Koordinate polovišta aritmetičke su sredine koordinata krajnjih točaka.
Pravac kroz točku $T(x_1, y_1)$ s koeficijentom smjera k ima jednadžbu

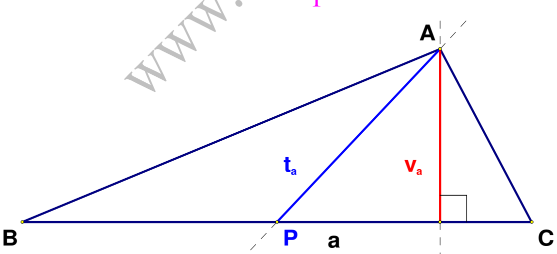
$$y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right).$$

Pravci

$$y=k_1\cdot x+l_1 \quad , \quad y=k_2\cdot x+l_2$$

su okomiti ako i samo ako su im koeficijenti smjerova suprotni i recipročni brojevi:

$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$



Odredimo koeficijent smjera k_1 pravca na kojem leži visina v_a trokuta povučena iz vrha A.

$$v_a \;\ldots\; 2\cdot x-3\cdot y+12=0 \;\Rightarrow\; -3\cdot y=-2\cdot x+12 \;/:(-3) \;\Rightarrow\; y=\frac{2}{3}\cdot x+4 \;\Rightarrow\; k_1=\frac{2}{3}.$$

Budući da je pravac BC, na kojemu leži stranica a, okomit na visinu v_a, njegov koeficijent smjera k_2 iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{2}{3} \\ k_2=-\dfrac{1}{k_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_2=-\frac{1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow k_2=-\frac{3}{2}.$$

Jednadžba pravca BC glasi:

$$\left.\begin{array}{l} C\left(x_1, y_1\right)=C(2, 2) \;,\; k_2=-\dfrac{3}{2} \\ y-y_1=k_2\cdot\left(x-x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=-\frac{3}{2}\cdot(x-2) \Rightarrow y-2=-\frac{3}{2}\cdot x+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y=-\frac{3}{2}\cdot x+3+2 \;\Rightarrow\; y=-\frac{3}{2}\cdot x+5.$$

Presjek pravca BC i pravca x + y = 0 na kojem leži težišnica t_a povučena iz vrha A je polovište P stranice $\overline{BC}$:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{3}{2}\cdot x+5 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow x-\frac{3}{2}\cdot x+5=0 \;/\cdot 2 \;\Rightarrow\; 2\cdot x-3\cdot x+10=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot x-3\cdot x=-10 \;\Rightarrow\; -x=-10 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; x=10 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x=10 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; 10+y=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y=-10 \;\Rightarrow\; P(x,\,y)=P(10,\,-10).$$

Koordinate točke B iznose:

$$\left.\begin{array}{l} C(x_1,\,y_1)=C(2,\,2) \\ P(x,\,y)=P(10,\,-10) \\ B(x_2,\,y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10=\frac{2+x_2}{2} \;/\cdot 2 \\ -10=\frac{2+y_2}{2} \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20=2+x_2 \\ -20=2+y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_2=2-20 \\ -y_2=2+20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_2=-18 \;/\cdot(-1) \\ -y_2=22 \;/\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=18 \\ y_2=-22 \end{array}\right\} \Rightarrow\; B(x_2,\,y_2)=B(18,\,-22).$$

Vježba 147

Točka B(18, – 22) je vrh trokuta ABC. Visina trokuta povučena iz vrha A leži na pravcu 2 · x – 3 · y + 12 = 0, a težišnica povučena iz vrha A na pravcu x + y = 0. Nađi koordinate točke C.

Rezultat: C(2, 2).

Zadatak 148 (Ana, gimnazija)

Ako je u trokutu a = 2 · b · cos γ, onda je b = c. Dokaži.

Rješenje 148

Ponovimo!

Poučak o kosinusima

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \quad , \quad \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} \quad , \quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a=2\cdot b\cdot\cos\gamma \\ \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow a=2\cdot b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b} \;\Rightarrow\; a=\cancel{2\cdot b}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{\cancel{2\cdot a\cdot b}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a=\frac{a^2+b^2-c^2}{a} \;/\cdot a \;\Rightarrow\; a^2=a^2+b^2-c^2 \;\Rightarrow\; \cancel{a^2}=\cancel{a^2}+b^2-c^2 \;\Rightarrow\; 0=b^2-c^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; c^2=b^2 \;/\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; c=b \;\Rightarrow\; b=c.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a=2\cdot b\cdot\cos\gamma \\ \cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=2\cdot b\cdot\cos\gamma \;/\cdot\dfrac{1}{2\cdot b} \\ \cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\gamma=\dfrac{a}{2\cdot b} \\ \cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a}{2\cdot b}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\;/\cdot 2\cdot a\cdot b \Rightarrow a^2=a^2+b^2-c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=a^2+b^2-c^2 \Rightarrow 0=b^2-c^2 \Rightarrow c^2=b^2\;/\sqrt{\;} \Rightarrow c=b \Rightarrow b=c.$$

Vježba 148

Ako je u trokutu b = 2 · c · cos α, onda je a = c. Dokaži.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 149 (Neno, gimnazija)

U trokutu ABC je zadano: stranica a = 3, suma kvadrata $b^2 + c^2 = 41$ stranica b i c i površina P = 6. Nađi tangens kuta nasuprot stranici a.

Rješenje 149

Ponovimo!

$$ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}\quad,\quad tg\,x\cdot ctg\,x=1\quad,\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Površina trokuta zadanog dvjema stranicama i kutom između njih

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma\quad,\quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha\quad,\quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\quad,\quad b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta\quad,\quad c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha \\ a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha\;/\cdot\dfrac{2}{\sin\alpha} \\ a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b\cdot c=\dfrac{2\cdot P}{\sin\alpha} \\ a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2\cdot\frac{2\cdot P}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha \Rightarrow a^2=b^2+c^2-4\cdot P\cdot ctg\,\alpha \Rightarrow 4\cdot P\cdot ctg\,\alpha=b^2+c^2-a^2\;/\cdot\frac{1}{4\cdot P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg\,\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\cdot P} \Rightarrow \frac{1}{tg\,\alpha}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\cdot P} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{4\cdot P}{b^2+c^2-a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{4\cdot 6}{41-3^2} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{24}{41-9} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{24}{32} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{3}{4} \Rightarrow tg\,\alpha=0.75.$$

Vježba 149

U trokutu ABC je zadano: stranica a = 5, suma kvadrata $b^2 + c^2 = 45$ stranica b i c i površina P = 5. Nađi tangens kuta nasuprot stranici a.

Rezultat: 1.

Zadatak 150 (Denis, ekonomska škola)

U trokutu je a + b = 27, P = 84 i r = 4. Nađite sin γ.

Rješenje 150

Ponovimo!

Površina trokuta glasi

$$P = r \cdot s,$$

gdje je r polumjer upisane kružnice trokutu, a s poluopseg trokuta

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Polumjer r upisane kružnice trokutu je

$$r = (s-c) \cdot tg\,\frac{\gamma}{2},$$

gdje je s poluopseg trokuta.
Funkcija polovičnog kuta:

$$tg\,x = \frac{2 \cdot tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg^2\,\frac{x}{2}}.$$

Osnovni trigonometrijski identitet:

$$\sin x = \frac{tg\,x}{\sqrt{1 + tg^2\,x}}.$$

Računamo duljinu stranice c:

$$P = r \cdot s \;\Rightarrow\; P = r \cdot s \;/\cdot \frac{1}{r} \;\Rightarrow\; s = \frac{P}{r} \;\Rightarrow\; s = \frac{84}{4} \;\Rightarrow\; s = 21 \;\Rightarrow\; \frac{a+b+c}{2} = 21 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{a+b+c}{2} = 21 \;/\cdot 2 \;\Rightarrow\; a+b+c = 42 \;\Rightarrow\; c = 42 - (a+b) \;\Rightarrow\; c = 42 - 27 \;\Rightarrow\; c = 15.$$

Iz formule za polumjer r upisane kružnice trokutu dobije se:

$$r = (s-c) \cdot tg\,\frac{\gamma}{2} \;\Rightarrow\; r = (s-c) \cdot tg\,\frac{\gamma}{2} \;/\cdot \frac{1}{s-c} \;\Rightarrow\; tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c} \;\Rightarrow\; tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{4}{21-15} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{4}{6} \;\Rightarrow\; tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{2}{3}.$$

Sada je:

$$tg\,\gamma = \frac{2 \cdot tg\,\frac{\gamma}{2}}{1 - tg^2\,\frac{\gamma}{2}} \;\Rightarrow\; tg\,\gamma = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \;\Rightarrow\; tg\,\gamma = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} \;\Rightarrow\; tg\,\gamma = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} \;\Rightarrow\; tg\,\gamma = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; tg\,\gamma = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{5}{3}} \;\Rightarrow\; tg\,\gamma = \frac{12}{5}.$$

Traženi sin γ iznosi:

$$\sin\gamma = \frac{tg\,\gamma}{\sqrt{1 + tg^2\,\gamma}} \;\Rightarrow\; \sin\gamma = \frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}} \;\Rightarrow\; \sin\gamma = \frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{1 + \frac{144}{25}}} \;\Rightarrow\; \sin\gamma = \frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{\frac{169}{25}}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\gamma = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{13}{5}} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{13}{5}} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{12}{13}.$$

Vježba 150

U trokutu je a + b = 27, P = 84 i r = 4. Nađite ctg γ.

Rezultat: $ctg\,\gamma = \frac{5}{12}.$

Zadatak 151 (Denis, ekonomska škola)

Ako su stranice trokuta a = 25, b = 52, c = 63, nađite r.

Rješenje 151

Ponovimo!

Formule za površinu trokuta glase

$$P = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \quad , \quad P = r\cdot s,$$

gdje je r polumjer upisane kružnice trokutu, a s poluopseg trokuta

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Najprije izračunamo poluopseg s trokuta:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \frac{25+52+63}{2} \Rightarrow s = \frac{140}{2} \Rightarrow s = 70.$$

Polumjer r upisane kružnice trokutu iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} P = r\cdot s \\ P = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow r\cdot s = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\cdot s = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \;/\cdot\frac{1}{s} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{70\cdot(70-25)\cdot(70-52)\cdot(70-63)}}{70} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{70\cdot45\cdot18\cdot7}}{70} \Rightarrow r = \frac{630}{70} \Rightarrow r = 9.$$

Vježba 151

Ako su stranice trokuta a = 50, b = 104, c = 126, nađite r.

Rezultat: 18.

Zadatak 152 (Denis, ekonomska škola)

Zbroj duljina stranica trokuta iznosi 15, a duljine visina spuštenih na te stranice jesu 4 i 6. Nađi površinu trokuta.

Rješenje 152

Ponovimo!

Površina trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

$$P = \frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Neka je

$$a + b = 15,$$

tada je prema uvjetu zadatka

$$v_a = 4 \quad , \quad v_b = 6.$$

Iz formula za površinu trokuta dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{a \cdot v_a}{2} \\ P = \dfrac{b \cdot v_b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P = \dfrac{a \cdot v_a}{2} \;/ \cdot \dfrac{2}{v_a} \\ P = \dfrac{b \cdot v_b}{2} \;/ \cdot \dfrac{2}{v_b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \dfrac{2 \cdot P}{v_a} \\ b = \dfrac{2 \cdot P}{v_b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a + b = 15 \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot P}{v_a} + \frac{2 \cdot P}{v_b} = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot P}{4} + \frac{2 \cdot P}{6} = 15 \Rightarrow \frac{P}{2} + \frac{P}{3} = 15 \;/ \cdot 6 \Rightarrow 3 \cdot P + 2 \cdot P = 90 \Rightarrow 5 \cdot P = 90 \;/ : 5 \Rightarrow P = 18.$$

Vježba 152

Zbroj duljina stranica trokuta iznosi 30, a duljine visina spuštenih na te stranice jesu 8 i 12. Nađi površinu trokuta.

Rezultat: 72.

Zadatak 153 (Denis, ekonomska škola)

Osnovica trokuta je 12, a visina 8. Trokutu je upisan pravokutnik kojemu jedna stranica leži na osnovici, a druga je duljine 6. Nađite površinu pravokutnika.

Rješenje 153

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

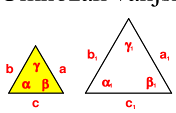
$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$\mathbf{a : b = c : d}.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$



Sličnost trokuta

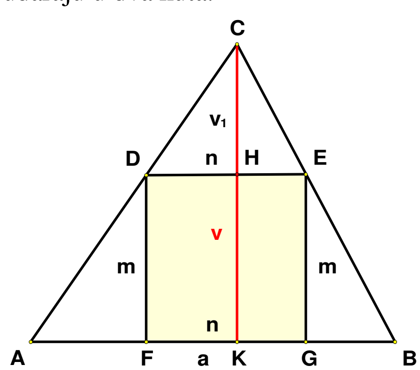
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.

Prvi teorem sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.



Sa slike vidi se:

$$a = |AB| = 12 \;,\; v = |KC| = 8 \;,\; m = |FD| = |KH| = |GE| = 6 \;,\; n = |DE| = |FG|$$

$$v_1 = |HC| = |KC| - |KH| = v - m = 8 - 6 = 2.$$

Uočimo trokute ΔABC i ΔDEC. Budući da se podudaraju u dva kuta, slični su pa vrijedi razmjer:

$$|AB|:|DE|=|KC|:|HC| \Rightarrow a:n=v:v_1 \Rightarrow 12:n=8:2 \Rightarrow 8\cdot n=12\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot n=24 \;/:8 \Rightarrow n=3.$$

Površina pravokutnika iznosi:

$$P=m\cdot n \Rightarrow P=6\cdot 3 \Rightarrow P=18.$$

Vježba 153

Osnovica trokuta je 24, a visina 16. Trokutu je upisan pravokutnik kojemu jedna stranica leži na osnovici, a druga je duljine 12. Nađite površinu pravokutnika.

Rezultat: 72.

Zadatak 154 (Denis, ekonomska škola)

Nađite a, b, c trokuta, ako je $v_a = 60$, $v_b = 28$, $v_c = 21$.

Rješenje 154

Ponovimo!

$$x\cdot y=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ili } y=0 \text{ ili } x=y=0.$$

Površina trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Površina trokuta sa duljinama stranica a, b i c glasi:

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$

gdje je s poluopseg trokuta

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Prikažimo, na primjer, duljine stranica b i c pomoću a.

- $$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{b\cdot v_b}{2} \\ P=\dfrac{a\cdot v_a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{a\cdot v_a}{2} \;/\cdot\frac{2}{v_b} \Rightarrow b=\frac{a\cdot v_a}{v_b} \Rightarrow b=\frac{a\cdot 60}{28} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{15}{7}\cdot a.$$

- $$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{c\cdot v_c}{2} \\ P=\dfrac{a\cdot v_a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{c\cdot v_c}{2}=\frac{a\cdot v_a}{2} \;/\cdot\frac{2}{v_c} \Rightarrow c=\frac{a\cdot v_a}{v_c} \Rightarrow b=\frac{a\cdot 60}{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\frac{20}{7}\cdot a.$$

Izračunamo duljinu poluopsega s trokuta:

$$s=\frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s=\frac{a+\frac{15}{7}\cdot a+\frac{20}{7}\cdot a}{2} \Rightarrow s=\frac{\frac{7\cdot a+15\cdot a+20\cdot a}{7}}{2} \Rightarrow s=\frac{\frac{42}{7}\cdot a}{2} \Rightarrow s=\frac{42}{14}\cdot a \Rightarrow s=3\cdot a.$$

Uporabom formula za površinu trokuta dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ P=\frac{a\cdot v_a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right] \Rightarrow \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}=\frac{a\cdot v_a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3\cdot a\cdot(3\cdot a-a)\cdot\left(3\cdot a-\frac{15}{7}\cdot a\right)\cdot\left(3\cdot a-\frac{20}{7}\cdot a\right)}=\frac{a\cdot 60}{2} \Rightarrow \sqrt{3\cdot a\cdot 2\cdot a\cdot\frac{6}{7}\cdot a\cdot\frac{1}{7}\cdot a}=30\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{36}{49}\cdot a^4}=30\cdot a \Rightarrow \frac{6}{7}\cdot a^2=30\cdot a \;/\cdot\frac{7}{6} \Rightarrow a^2=35\cdot a \Rightarrow a^2-35\cdot a=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{nepotpuna}\\ \text{kvadratna}\\ \text{jednadžba}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot(a-35)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ a-35=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=0 \;\text{ nije rješenje} \\ a_2=35 \;\text{ je rješenje} \end{array}\right\} \Rightarrow a=35.$$

Duljine stranica b i c iznose:

$$\left.\begin{array}{l} a=35 \\ b=\frac{15}{7}\cdot a \;,\; c=\frac{20}{7}\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\frac{15}{7}\cdot 35 \\ c=\frac{20}{7}\cdot 35 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=75 \\ c=100 \end{array}\right\}.$$

Vježba 154

Nađite a, b, c trokuta, ako je $v_a = 120$, $v_b = 56$, $v_c = 42$.

Rezultat: a = 70, b = 150, c = 200.

Zadatak 155 (Denis, ekonomska škola)

Duljine stranica trokuta odnose se kao 4 : 2 : 6. Koliki je opseg tog trokuta ako je umnožak prvih dviju stranica jednak zbroju svih triju stranica?

Rješenje 155

Ponovimo!

$$x\cdot y=0 \Leftrightarrow x=0 \;\text{ ili }\; y=0 \;\text{ ili }\; x=y=0.$$

Opseg trokuta sa duljinama stranica a, b i c glasi:

$$O=a+b+c.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a:b:c=4:2:6 \\ a\cdot b=a+b+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=4\cdot k \;,\; b=2\cdot k \;,\; c=6\cdot k \\ a\cdot b=a+b+c \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot k\cdot 2\cdot k=4\cdot k+2\cdot k+6\cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot k^2=12\cdot k \Rightarrow 8\cdot k^2-12\cdot k=0 \;/:4 \Rightarrow 2\cdot k^2-3\cdot k=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{nepotpuna}\\ \text{kvadratna}\\ \text{jednadžba}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\cdot(2\cdot k-3)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=0 \\ 2\cdot k-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=0 \;\text{ nije rješenje} \\ 2\cdot k=3 \;/:2 \end{array}\right\} \Rightarrow k=\frac{3}{2}.$$

Opseg trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} O=a+b+c \\ a=4\cdot k \;,\; b=2\cdot k \;,\; c=6\cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow O=4\cdot k+2\cdot k+6\cdot k \Rightarrow O=12\cdot k \Rightarrow O=12\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow O=18.$$

Vježba 155

Duljine stranica trokuta odnose se kao 2 : 1 : 3. Koliki je opseg tog trokuta ako je umnožak prvih dviju stranica jednak zbroju svih triju stranica?

Rezultat: 18.

Zadatak 156 (Marijana, srednja škola)

Duljine stranica trokuta su 4 cm, 7 cm i 6 cm. Njemu sličan trokut ima opseg 24 cm. Odredite duljine stranica tog trokuta.

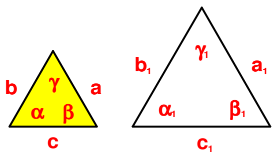
Rješenje 156

Ponovimo!

Opseg trokuta sa duljinama stranica a, b i c glasi:

$$O = a + b + c.$$

Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).
Opsezi sličnih trokuta odnose se kao duljine odgovarajućih stranica tih trokuta, tj. ako je

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k,$$

tada je

$$\frac{O_1}{O} = k.$$

Opseg trokuta čije su duljine stranica a = 4 cm, b = 7 cm i c = 6 cm iznosi:

$$O = a + b + c \ \Rightarrow \ O = 4 \ cm + 7 \ cm + 6 \ cm \ \Rightarrow \ O = 17 \ cm.$$

Njemu sličan trokut ima opseg

$$O_1 = 24 \ cm.$$

Iz podataka o opsezima sličnih trokuta lako izračunamo koeficijent sličnosti k:

$$\frac{O_1}{O} = k \ \Rightarrow \ \frac{24 \ cm}{17 \ cm} = k \ \Rightarrow \ k = \frac{24}{17}.$$

Računamo duljine stranica drugog trokuta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a} &= k \\ \frac{b_1}{b} &= k \\ \frac{c_1}{c} &= k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a} &= k \ / \cdot a \\ \frac{b_1}{b} &= k \ / \cdot b \\ \frac{c_1}{c} &= k \ / \cdot c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= k \cdot a \\ b_1 &= k \cdot b \\ c_1 &= k \cdot c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{24}{17} \cdot 4 \ cm \\ b_1 &= \frac{24}{17} \cdot 7 \ cm \\ c_1 &= \frac{24}{17} \cdot 6 \ cm \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{96}{17} \ cm \\ b_1 &= \frac{168}{17} \ cm \\ c_1 &= \frac{144}{17} \ cm \end{aligned}\right\}.$$

Vježba 156

Duljine stranica trokuta su 8 cm, 14 cm i 12 cm. Njemu sličan trokut ima opseg 48 cm. Odredite duljine stranica tog trokuta.

Rezultat: $a_1 = \frac{192}{17} \ cm \ , \ b_1 = \frac{336}{17} \ cm \ , \ c_1 = \frac{288}{17} \ cm.$

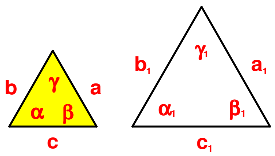
Zadatak 157 (Marijana, srednja škola)

Duljine stranica trokuta su 4 cm, 13 cm i 15 cm. Njemu sličan trokut ima površinu 6 cm^2. Odredite duljine stranica tog trokuta.

Rješenje 157

Ponovimo!

Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1 \ , \ \beta=\beta_1 \ , \ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).
Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina pripadnih stranica, tj. ako je

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k,$$

tada je

$$\frac{P_1}{P}=k^2.$$

Heronova formula za površinu trokuta:

Ako stranice trokuta imaju duljine a, b, c tada je površina tog trokuta dana sa

$$P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)},$$

gdje je s poluopseg trokuta, tj. $s=\frac{a+b+c}{2}$.

Površina trokuta čije su duljine stranica a = 4 cm, b = 13 cm i c = 15 cm iznosi:

$$s=\frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s=\frac{4+13+15}{2} \Rightarrow s=\frac{32}{2} \Rightarrow s=16 \Rightarrow \left[\ P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\sqrt{16\cdot(16-4)\cdot(16-13)\cdot(16-15)} \Rightarrow P=\sqrt{16\cdot12\cdot3\cdot1} \Rightarrow P=24\ cm^2.$$

Njemu sličan trokut ima površinu

$$P_1=6\ cm^2.$$

Iz podataka o površinama sličnih trokuta lako izračunamo koeficijent sličnosti k:

$$\frac{P_1}{P}=k^2 \Rightarrow \frac{6}{24}=k^2 \Rightarrow k^2=\frac{6}{24} \Rightarrow k^2=\frac{1}{4}\ /\sqrt{\ } \Rightarrow k=\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow k=\frac{1}{2}.$$

Računamo duljine stranica drugog trokuta:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a_1}{a}=k\\ \frac{b_1}{b}=k\\ \frac{c_1}{c}=k\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{a_1}{a}=k\ /\cdot a\\ \frac{b_1}{b}=k\ /\cdot b\\ \frac{c_1}{c}=k\ /\cdot c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1=k\cdot a\\ b_1=k\cdot b\\ c_1=k\cdot c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1=\frac{1}{2}\cdot4\ cm\\ b_1=\frac{1}{2}\cdot13\ cm\\ c_1=\frac{1}{2}\cdot15\ cm\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1=2\ cm\\ b_1=\frac{13}{2}\ cm\\ c_1=\frac{15}{2}\ cm\end{array}\right\}.$$

Vježba 157

Duljine stranica trokuta su 8 cm, 26 cm i 30 cm. Njemu sličan trokut ima površinu 12 cm². Odredite duljine stranica tog trokuta.

Rezultat: $a_1=4\ cm \ , \ b_1=13\ cm \ , \ c_1=15\ cm.$

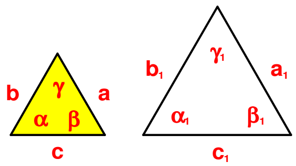
Zadatak 158 (Ivica, gimnazija)

Površine dvaju sličnih trokuta su P = 27 cm^2 i P$_1$ = 75 cm^2. Koliki je opseg većeg trokuta ako se opsezi razlikuju za 46?

Rješenje 158

Ponovimo!

Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).
Opsezi sličnih trokuta odnose se kao duljine odgovarajućih stranica tih trokuta, tj. ako je

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k,$$

tada je

$$\frac{O_1}{O} = k.$$

Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina pripadnih stranica, tj. ako je

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k,$$

tada je

$$\frac{P_1}{P} = k^2.$$

Iz podataka o površinama sličnih trokuta lako izračunamo koeficijent sličnosti k:

$$\frac{P_1}{P} = k^2 \Rightarrow \frac{75}{27} = k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{75}{27} \Rightarrow k^2 = \frac{25}{9} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow k = \frac{5}{3}.$$

Tada za opsege trokuta vrijedi:

$$\frac{O_1}{O} = k \Rightarrow \frac{O_1}{O} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5 \cdot O = 3 \cdot O_1.$$

Budući da je zadana razlika opsega trokuta, dobije se sustav jednadžbi iz kojega izračunamo veći opseg O$_1$:

$$\left.\begin{array}{l} O_1 - O = 46 \\ 5 \cdot O = 3 \cdot O_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O_1 - O = 46 \\ 5 \cdot O = 3 \cdot O_1 \;\; /:5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} O_1 - O = 46 \\ O = \frac{3}{5} \cdot O_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1 - \frac{3}{5} \cdot O_1 = 46 \Rightarrow \frac{2}{5} \cdot O_1 = 46 \;/\cdot \frac{5}{2} \Rightarrow O_1 = 46 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow O_1 = 115 \; cm.$$

Vježba 158

Opsezi sličnih trokuta su O = 36 cm i O$_1$ = 27 cm. Kolika je površina većeg trokuta ako se površine razlikuju za 63 cm^2?

Rezultat: P = 144 cm^2. Naputak: $k = \frac{O_1}{O} \Rightarrow k = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{P_1}{P} = \frac{9}{16}$ i $P - P_1 = 63.$

Zadatak 159 (Ksenija, gimnazija)

Stranice trokuta su 3 uzastopna prirodna broja. Izračunajte razliku odsječaka što ih čini (formira) visina trokuta na stranicu srednje duljine.

Rješenje 159

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad \frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c.$$

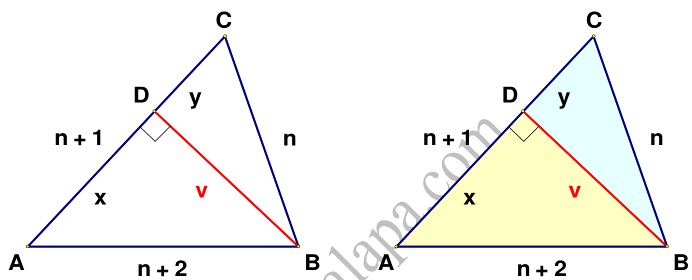
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Apsolutna vrijednost ili modul realnog broja x definira se formulama:

$$|x| = \begin{cases} x \ , & x \ge 0 \\ -x \ , & x < 0. \end{cases}$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.



Sa slika vidi se:

$$|AB| = n+2 \ , \ |BC| = n \ , \ |AC| = n+1 \ , \ |AD| = x \ , \ |DC| = y \ , \ |DB| = v$$

$$|AC| = |AD| + |DC| \ \Rightarrow \ n+1 = x+y.$$

1.inačica

Uočimo pravokutne trokute ΔABD i ΔBCD. Uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABD \ \ldots \ |BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 \\ \Delta BCD \ \ldots \ |BD|^2 = |BC|^2 - |DC|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v^2 = (n+2)^2 - x^2 \\ v^2 = n^2 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)^2 - x^2 = n^2 - y^2 \ \Rightarrow \ n^2 + 4 \cdot n + 4 - x^2 = n^2 - y^2 \ \Rightarrow \ n^2 + 4 \cdot n + 4 - x^2 = n^2 - y^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot n + 4 - x^2 = -y^2 \ \Rightarrow \ 4 \cdot n + 4 = x^2 - y^2 \ \Rightarrow \ x^2 - y^2 = 4 \cdot n + 4 \ \Rightarrow \ (x-y) \cdot (x+y) = 4 \cdot (n+1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x+y = n+1 \right] \ \Rightarrow \ (x-y) \cdot (n+1) = 4 \cdot (n+1) \ / \cdot \frac{1}{n+1} \ \Rightarrow \ x-y = 4 \ \Rightarrow \ |x-y| = 4.$$

Rezultat pišemo pod znakom apsolutne vrijednosti jer ne znamo, unaprijed, koji je odsječak veći: x ili y.

2.inačica

Uočimo pravokutne trokute ΔABD i ΔBCD. Uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABD \ \ldots \ |BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 \\ \Delta BCD \ \ldots \ |BD|^2 = |BC|^2 - |DC|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v^2 = (n+2)^2 - x^2 \\ v^2 = n^2 - y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)^2 - x^2 = n^2 - y^2 \Rightarrow n^2 + 4\cdot n + 4 - x^2 = n^2 - y^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x+y=n+1 \\ y=n+1-x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 4\cdot n + 4 - x^2 = n^2 - (n+1-x)^2 \Rightarrow n^2 + 4\cdot n + 4 - x^2 = n^2 - \left(n^2 + 1 + x^2 + 2\cdot n - 2\cdot n\cdot x - 2\cdot x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 4\cdot n + 4 - x^2 = n^2 - n^2 - 1 - x^2 - 2\cdot n + 2\cdot n\cdot x + 2\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 4\cdot n + 4 - x^2 = n^2 - n^2 - 1 - x^2 - 2\cdot n + 2\cdot n\cdot x + 2\cdot x \Rightarrow$$

$$n^2 + 4\cdot n + 4 = -1 - 2\cdot n + 2\cdot n\cdot x + 2\cdot x \Rightarrow n^2 + 4\cdot n + 4 + 1 + 2\cdot n = 2\cdot n\cdot x + 2\cdot x \Rightarrow$$

$$n^2 + 6\cdot n + 5 = 2\cdot x\cdot (n+1) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{rastavljanje} \\ \text{tročlanog izraza} \\ \text{na faktore} \end{bmatrix} \Rightarrow n^2 + n + 5\cdot n + 5 = 2\cdot x\cdot (n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot (n+1) + 5\cdot (n+1) = 2\cdot x\cdot (n+1) \Rightarrow (n+1)\cdot (n+5) = 2\cdot x\cdot (n+1) \;/\cdot \frac{1}{2\cdot (n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{n+5}{2}.$$

Duljina drugog odsječka y ima vrijednost:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= n+1 \\ x &= \frac{n+5}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y &= n+1-x \\ x &= \frac{n+5}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = n+1-\frac{n+5}{2} \Rightarrow y = \frac{2\cdot (n+1) - (n+5)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2\cdot n + 2 - n - 5}{2} \Rightarrow y = \frac{n-3}{2}.$$

Razlika odsječaka što ih čini visina trokuta na stranicu srednje duljine iznosi:

$$|x-y| = \left|\frac{n+5}{2} - \frac{n-3}{2}\right| = \left|\frac{n+5-(n-3)}{2}\right| = \left|\frac{n+5-n+3}{2}\right| = \left|\frac{n+5-n+3}{2}\right| = \left|\frac{8}{2}\right| = |4| = 4.$$

Vježba 159

Stranice trokuta su 3 uzastopna prirodna broja. Izračunati količnik duljina odsječaka što ih čini (formira) visina trokuta na stranicu srednje duljine.

Rezultat: $\frac{n+5}{n-3}$ ili $\frac{n-3}{n+5}$.

Zadatak 160 (Roby, gimnazija)

U pravokutnom trokutu je kateta $b = 3\cdot\sqrt{3}\ cm$, a simetrala kuta β dijeli katetu b u omjeru 1 : 2 od vrha C. Nađi duljine drugih dviju stranica.

Rješenje 160

Ponovimo!

$$(x\cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

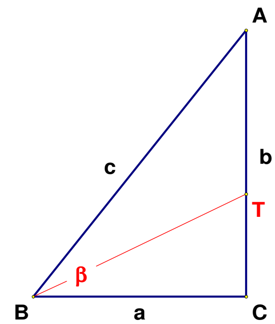
tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a\cdot d = b\cdot c.$$

Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije stranice.
Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \quad , \quad |BC| = a \quad , \quad |CA| = b.$$

Budući da simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije stranice, za simetralu kuta β vrijedi:

$$\left.\begin{array}{r} a : c = |CT| : |TA| \\ |CT| : |TA| = 1 : 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a : c = 1 : 2 \Rightarrow 1 \cdot c = 2 \cdot a \Rightarrow c = 2 \cdot a.$$

Uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$|BC|^2 = |AB|^2 - |CA|^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = (2 \cdot a)^2 - \left(3 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 4 \cdot a^2 - 3^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 4 \cdot a^2 - 9 \cdot 3 \Rightarrow a^2 = 4 \cdot a^2 - 27 \Rightarrow a^2 - 4 \cdot a^2 = -27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot a^2 = -27 \; /:(-3) \Rightarrow a^2 = 9 \; /\sqrt{\;} \Rightarrow a = \sqrt{9} \Rightarrow a = 3 \; cm \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3 \\ c = 2 \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 2 \cdot 3 \Rightarrow c = 6 \; cm.$$

Vježba 160

U pravokutnom trokutu je kateta $b = 3 \cdot \sqrt{3} \; cm,$ a simetrala kuta β dijeli katetu b u omjeru 2 : 4 od vrha C. Nađi duljine drugih dviju stranica.

Rezultat: a = 3 cm , c = 6 cm.