Zadatak 121 (Zoran, Luka, Jan, maturanti gimnazije)

Kružnici polumjera r = 5 opisan je pravokutan trokut hipotenuze c = 29. Nađite opseg trokuta.

Rješenje 121

1.inačica

$$r=\frac{a+b-c}{2} \Rightarrow r=\frac{a+b-c}{2} \; / \cdot 2 \Rightarrow 2\cdot r=a+b-c \Rightarrow a+b=2\cdot r+c.$$

Opseg trokuta iznosi:

$$O=a+b+c \Rightarrow O=(a+b)+c \Rightarrow O=2\cdot r+c+c \Rightarrow O=2\cdot r+2\cdot c \Rightarrow O=2\cdot(r+c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=2\cdot(5+29) \Rightarrow O=68.$$

2.inačica

$$r=\frac{a+b-c}{2} \Rightarrow r=\frac{a+b-c}{2} \; / \cdot 2 \Rightarrow 2\cdot r=a+b-c \; / +2\cdot c \Rightarrow 2\cdot r+2\cdot c=a+b+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot r+2\cdot c=O \Rightarrow O=2\cdot(r+c) \Rightarrow O=2\cdot(5+29) \Rightarrow O=68.$$

Vježba 121

Kružnici polumjera r = 4 opisan je pravokutan trokut hipotenuze c = 30. Nađite opseg trokuta.

Rezultat: 68.

Zadatak 122 (Zoran, Luka, Jan, maturanti gimnazije)

U trokutu s kraćim stranicama 30 i 40, središte opisane kružnice leži na jednoj od stranica. Nađite polumjer r.

Rješenje 122

Ponovimo!

Talesov poučak:

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Budući da središte opisane kružnice leži na jednoj od stranica, jedini takav trokut je pravokutan. Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} a=30 \;,\; b=40 \\ \text{Pitagorin poučak} \\ c^2=a^2+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2=30^2+40^2 \Rightarrow c^2=900+1600 \Rightarrow c^2=2500 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow c=50.$$

Polumjer iznosi:

$$r=\frac{a+b-c}{2} \Rightarrow r=\frac{30+40-50}{2} \Rightarrow r=\frac{20}{2} \Rightarrow r=10.$$

Vježba 122

U trokutu s kraćim stranicama 3 i 4, središte opisane kružnice leži na jednoj od stranica. Nađite polumjer r.

Rezultat: r = 1.

Zadatak 123 (Lidia, opća gimnazija)

Točka A(1, 3) je vrh trokuta ABC. Težišnice trokuta su $x-2\cdot y+1=0$ i $y-1=0$. Nađite koordinate vrhova B i C.

Rješenje 123

Ponovimo!

Težišnica trokuta je spojnica vrha trokuta sa polovištem nasuprotne stranice. Sve tri težišnice trokuta sijeku se u točki T zvanoj težište. Ako su dani vrhovi $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ trokuta ABC koordinate težišta T glase:

$$T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

Najprije uvjerimo se da vrh A ne pripada zadanim težišnicama. Koordinate točke A uvrstimo redom u jednadžbe težišnica (pravaca):

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(1,\ 3) \\ x-2\cdot y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-2\cdot 3+1=0 \Rightarrow -4\neq 0 \text{ točka } A \text{ ne pripada pravcu,}$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(1,\ 3) \\ y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3-1=0 \Rightarrow 2\neq 0 \text{ točka } A \text{ ne pripada pravcu.}$$

Težište T je presjek težišnica. Dobije se rješavanjem sustava dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{array}{l} x-2\cdot y+1=0 \\ y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2\cdot y=-1 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x-2\cdot 1=-1 \Rightarrow x-2=-1 \Rightarrow x=-1+2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow T(1,\ 1) \text{ težište.}$$

Tražimo koordinate vrhova B i C:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(1,\ 3) \\ B(x_2,\ y_2)\ ,\ C(x_3,\ y_3) \\ T(x,\ y)=T(1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1=\dfrac{1+x_2+x_3}{3}\ /\cdot 3 \\ 1=\dfrac{3+y_2+y_3}{3}\ /\cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3=1+x_2+x_3 \\ 3=3+y_2+y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2+x_3=3-1 \\ y_2+y_3=3-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2+x_3=2 \\ y_2+y_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=2-x_2 \\ y_3=-y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(x_2,\ y_2) \\ C(2-x_2,\ -y_2) \end{array}\right\}.$$

Uočimo težišnici y – 1 = 0. Ako pretpostavimo da točka C leži na njoj, dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} y-1=0 \\ C(x,\ y)=C(2-x_2,\ -y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1 \\ C(x,\ y)=C(2-x_2,\ -y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow -y_2=1 \Rightarrow y_2=-1.$$

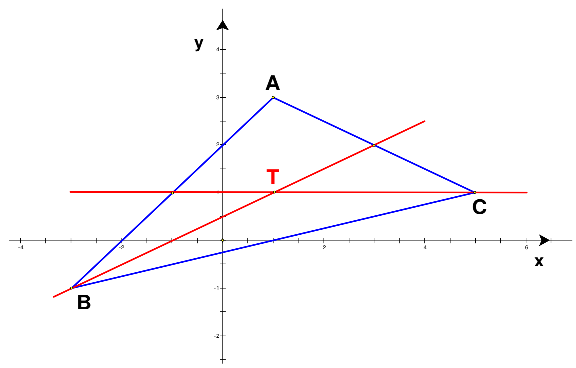
Ordinate točaka B i C su:

$$B(x_2,-1)\quad ,\quad C(2-x_2,1).$$

Budući da točka B mora pripadati drugoj težišnici, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x-2\cdot y+1=0 \\ B(x,\ y)=B(x_2,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow x_2-2\cdot(-1)+1=0 \Rightarrow x_2+2+1=0 \Rightarrow x_2+3=0 \Rightarrow x_2=-3.$$

Koordinate vrhova su: $B(-3,-1),\ C(5,1)$.



Vježba 123

Točka A(1, 3) je vrh trokuta ABC. Težišnice trokuta su 2 · x – 4 · y + 2 = 0 i 3 · y – 3 = 0. Nađite koordinate vrhova B i C.

Rezultat: $B(-3,-1),\ C(5,1)$.

Zadatak 124 (Silvija, srednja škola)

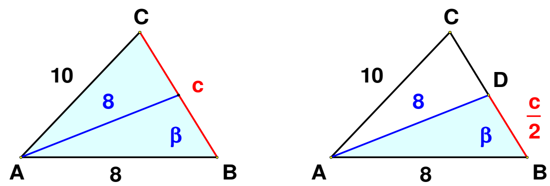
Dvije stranice trokuta imaju duljine 8 cm i 10 cm, a duljina težišnice treće stranice je 8 cm. Nađi duljinu treće stranice trokuta.

Rješenje 124

Ponovimo!

Kosinusov poučak:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\quad,\quad \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\quad,\quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$



Uporabimo kosinusov poučak za kut β u trokutima ΔABC i ΔABD:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\beta=\dfrac{8^2+c^2-10^2}{2\cdot 8\cdot c}\\[2ex] \cos\beta=\dfrac{8^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)^2-8^2}{2\cdot 8\cdot\dfrac{c}{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{8^2+c^2-10^2}{2\cdot 8\cdot c}=\frac{8^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-8^2}{2\cdot 8\cdot\frac{c}{2}}\Rightarrow\frac{64+c^2-100}{16\cdot c}=\frac{\frac{c^2}{4}}{8\cdot c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{c^2-36}{16\cdot c}=\frac{c^2}{32\cdot c}\ /\cdot 32\cdot c\Rightarrow 2\cdot\left(c^2-36\right)=c^2\Rightarrow 2\cdot c^2-72=c^2\Rightarrow 2\cdot c^2-c^2=72\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=72\ /\sqrt{\ }\Rightarrow c=\sqrt{72}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{array}\right]\Rightarrow c=\sqrt{36\cdot 2}\Rightarrow c=6\cdot\sqrt{2}\ cm.$$

Vježba 124

Dvije stranice trokuta imaju duljine 8 cm i 10 cm, a duljina težišnice treće stranice je 8 cm. Nađi opseg trokuta.

Rezultat: $\left(18+6\cdot\sqrt{2}\right)\ cm.$

Zadatak 125 (Zoran, gimnazija)

Stranice pravokutnog trokuta čine geometrijski niz. Koliko iznosi tangens najmanjeg kuta u trokutu?

Rješenje 125

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član počevši od drugog jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q\neq 0$, tj.

$$a_n=a_{n-1}\cdot q,\ n\geq 2.$$

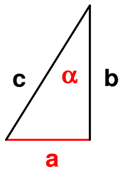
Broj q zovemo kvocijent (količnik) geometrijskog niza.

Pitagorin poučak:

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

U svakom trokutu vrijedi da nasuprot manjoj stranici leži manji kut.

Budući da stranice pravokutnog trokuta čine geometrijski niz, slijedi:



$$\left.\begin{array}{l} a=a \\ b=a\cdot q \\ c=a\cdot q^{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Pitagorin poučak} \\ c^{2}=a^{2}+b^{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left(a\cdot q^{2}\right)^{2}=a^{2}+(a\cdot q)^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{2}\cdot q^{4}=a^{2}+a^{2}\cdot q^{2} \ /:a^{2} \Rightarrow q^{4}=1+q^{2} \Rightarrow q^{4}-q^{2}-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{bikvadratna jednadžba} \\ \text{supstitucija} \\ q^{2}=t \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^{2}-t-1=0 \\ a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-1 \\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_{1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \ \text{nema smisla, negativno je} \\ t_{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se na supstituciju:

$$\left.\begin{array}{l} q^{2}=t \\ t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow q^{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow q_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_{1}=-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \ \text{nema smisla, negativno je} \\ q_{2}=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{array}\right\}.$$

Budući da nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut, slijedi da je α najmanji kut (jer je a < b):

$$\left.\begin{array}{l} a=a \\ b=a\cdot\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{a}{b} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{a}{a\cdot\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} \Rightarrow tg\,\alpha=\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}.$$

Vježba 125

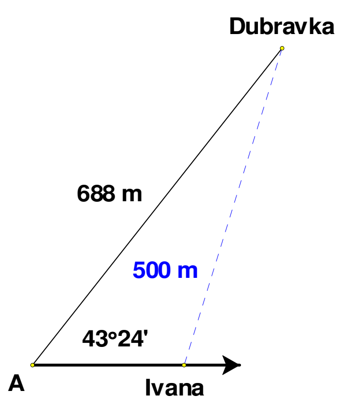
Stranice pravokutnog trokuta čine geometrijski niz. Koliko iznosi tangens srednjeg kuta u trokutu?

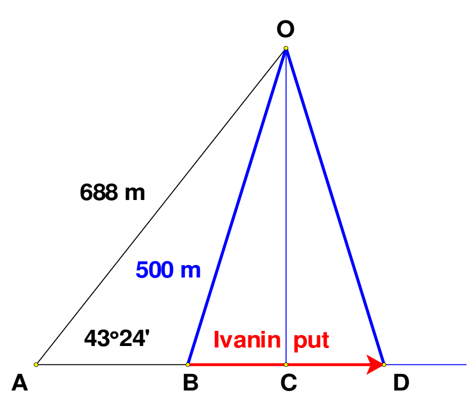
Rezultat: $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}.$

Zadatak 126 (Vedrana, Marija, srednja škola)

Dubravka i Ivana komuniciraju elektronskim uređajem dometa 500 m. Dubravka stoji na mjestu, a Ivana hoda kako je prikazano na slici. Koliko metara Ivana može hodati od trenutka uspostavljanja do trenutka prekida komunikacije?

Rješenje 126





Uočimo pravokutan trokut ACO i uporabom funkcije sinus izračunamo $|CO|$:

$$\sin 43^0 24' = \frac{|CO|}{|AO|} \Rightarrow |CO| = |AO| \cdot \sin 43^0 24' \Rightarrow |CO| = 688\ m \cdot \sin 43^0 24' \Rightarrow |CO| = 472.72\ m.$$

Iz pravokutnog trokuta BCO pomoću Pitagorina poučka odredimo $|BC|$:

$$|BC|^2 = |BO|^2 - |CO|^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow |BC| = \sqrt{|BO|^2 - |CO|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC| = \sqrt{500^2 - 472.72^2} \Rightarrow |BC| = 162.90\ m.$$

Budući da je trokut BDO jednakokračan, dužina $\overline{OC}$ je njegova visina na osnovicu (visina raspolavlja osnovicu) pa vrijedi:

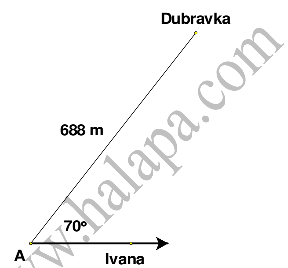
$$|BC| = |CD|.$$

Duljina puta kojim Ivana može hodati od trenutka uspostavljanja do trenutka prekida komunikacije iznosi:

$$|BD| = |BC| + |CD| \Rightarrow |BD| = 2 \cdot |BC| \Rightarrow |BD| = 2 \cdot 162.90\ m \Rightarrow |BD| = 325.80\ m.$$

Vježba 126

Dubravka i Ivana komuniciraju elektronskim uređajem dometa 500 m. Dubravka stoji na mjestu, a Ivana hoda kako je prikazano na slici. Koliko metara Ivana može hodati od trenutka uspostavljanja do trenutka prekida komunikacije?



Rezultat: Neće biti komunikacije.

Zadatak 127 (Haris, srednja škola)

Osnovica jednakokračnog trokuta ABC je 10 cm, a krak b i visina h na osnovicu razlikuju se za 1 cm. Izračunati površinu trokuta.

Rješenje 127

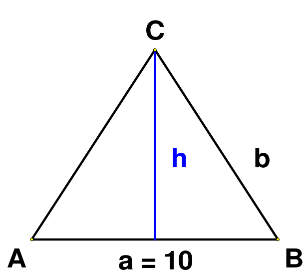
Ponovimo!

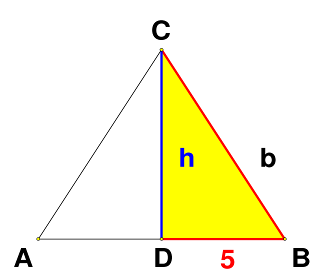
$$(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2.$$

Površina trokuta glasi:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Pitagorin poučak:
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.





Budući da se krak b i visina h razlikuju za 1 cm, pišemo:

$$b-h=1.$$

Sa slike vidi se da je trokut DBC pravokutan pa vrijedi Pitagorin poučak:

$$b^2=h^2+5^2.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se duljina visine h:

$$\left.\begin{array}{l} b-h=1 \\ b^2=h^2+5^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda zamjene,} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=1+h \\ b^2=h^2+5^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1+h)^2=h^2+5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2\cdot h+h^2=h^2+25 \Rightarrow 1+2\cdot h+h^2=h^2+25 \Rightarrow 1+2\cdot h=25 \Rightarrow 2\cdot h=25-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot h=24 \;/:2 \Rightarrow h=12\ cm.$$

Površina trokuta ABC iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a=10\ cm\ ,\ h=12\ cm \\ P=\dfrac{a\cdot h}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{10\ cm\cdot 12\ cm}{2}=60\ cm^2.$$

Vježba 127

Osnovica jednakokračnog trokuta ABC je 10 cm, a krak b i visina h na osnovicu razlikuju se za 1 cm. Izračunati opseg trokuta.

Rezultat: 36 cm.

Zadatak 128 (Mario, gimnazija)

Duljine stranica trokuta odnose se kao 2 : 1 : 3. Koliki je opseg tog trokuta ako je umnožak duljina prvih dviju stranica jednak dvostrukoj sumi duljina svih triju stranica?

Rješenje 128

Ponovimo!

$$x\cdot y=0 \Rightarrow x=0 \text{ ili } y=0 \text{ ili } x=y=0.$$

Poučak o stranicama trokuta

Svaka stranica trokuta manja je od zbroja preostalih dviju stranica:

$$a<b+c \quad , \quad b<a+c \quad , \quad c<a+b.$$

$$\left.\begin{array}{l} a:b:c=2:1:3 \\ a\cdot b=2\cdot(a+b+c) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=2\cdot k\ ,\ b=k\ ,\ c=3\cdot k \\ a\cdot b=2\cdot(a+b+c) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot k\cdot k=2\cdot(2\cdot k+k+3\cdot k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot k^2=2\cdot 6\cdot k \Rightarrow 2\cdot k^2=12\cdot k \;/:2 \Rightarrow k^2=6\cdot k \Rightarrow k^2-6\cdot k=0 \Rightarrow k\cdot(k-6)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=0 \\ k-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=0 \text{ nije rješenje} \\ k_2=6 \text{ je rješenje} \end{array}\right\}.$$

Duljine stranica iznose:

$$\left.\begin{array}{l} a=2\cdot k \\ b=k \\ c=3\cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow [k=6] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=2\cdot 6 \\ b=6 \\ c=3\cdot 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=12 \\ b=6 \\ c=18 \end{array}\right\}.$$

Uočimo da je

$$c=a+b \quad , \quad (18=12+6)$$

pa ne postoji takav trokut.

Vježba 128

Duljine stranica trokuta odnose se kao 4 : 2 : 6. Koliki je opseg tog trokuta ako je umnožak duljina prvih dviju stranica jednak dvostrukoj sumi duljina svih triju stranica?

Rezultat: c = a + b, ne postoji takav trokut.

Zadatak 129 (Matej, gimnazija)

Ako u trokutu ABC vrijedi $\beta = 2 \cdot \alpha$, onda je $b^2 = a^2 + a \cdot c$. Dokaži!

Rješenje 129

Ponovimo!

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog trokuta vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

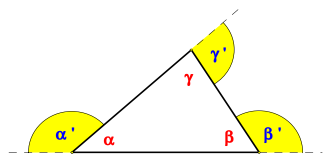
Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

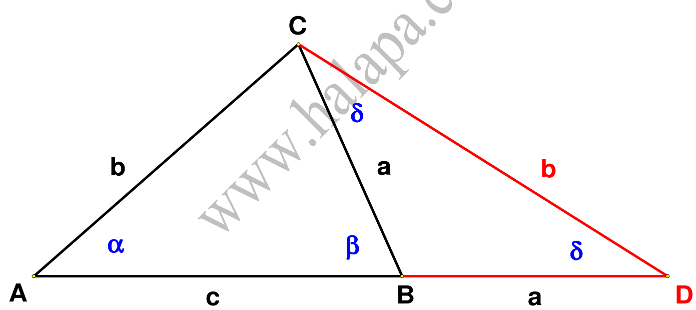
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

Vanjski kut trokuta jednak je zbroju ostalih dvaju unutarnjih kutova trokuta:



$$\alpha' = \beta + \gamma$$
$$\beta' = \alpha + \gamma$$
$$\gamma' = \alpha + \beta.$$

Gledaj sliku!



Produžimo stranicu $\overline{AB}$ preko vrha B za duljinu stranice a:

$$|BC| = |BD|.$$

Nasuprot jednakim stranicama trokuta leže jednaki kutovi:

$$|BC| = |BD| \;\Rightarrow\; \angle DCB = \angle BDC = \delta.$$

Budući da je trokut BDC jednakokračan, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \beta = 2 \cdot \delta \;\; \text{vanjski kut} \\ \beta = 2 \cdot \alpha \;\; \text{uvjet} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot \delta = 2 \cdot \alpha \;/:2 \;\Rightarrow\; \delta = \alpha \;\Rightarrow\; \left|\overline{DC}\right| = b.$$

Trokuti ΔADC i ΔBDC su slični (prvi poučak sličnosti) pa vrijedi razmjer:

$$|AD| : |AC| = |DC| : |BC| \;\Rightarrow\; (a + c) : b = b : a \;\Rightarrow\; a \cdot (a + c) = b^2 \;\Rightarrow\; a^2 + a \cdot c = b^2 \;\Rightarrow\; b^2 = a^2 + a \cdot c.$$

Vježba 129

Ako u trokutu ABC vrijedi $\gamma = 2 \cdot \alpha$, onda je $c^2 = a^2 + a \cdot b$. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 130 (Natalija, gimnazija)

Izračunaj kut α trokuta ABC, ako njegove stranice zadovoljavaju relaciju $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c}{a-b}$.

Rješenje 130

Ponovimo!

Poučak o kosinusima:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad , \quad b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \quad , \quad c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

$$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y).$$

Iz zadane relacije dobije se:

$$\frac{a+b}{b+c}=\frac{c}{a-b} \Rightarrow (a+b)\cdot(a-b)=c\cdot(b+c) \Rightarrow a^2-b^2=b\cdot c+c^2 \Rightarrow a^2=b^2+c^2+b\cdot c.$$

Prema kosinusovom poučku je:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha.$$

Oduzmemo drugu relaciju od prve:

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2+b\cdot c \\ a^2&=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2-a^2=b^2+c^2+b\cdot c-b^2-c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-a^2=b^2+c^2+b\cdot c-b^2-c^2+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow 0=b\cdot c+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\cdot c+2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha=0 \;/\cdot\frac{1}{b\cdot c} \Rightarrow 1+2\cdot\cos\alpha=0 \Rightarrow 2\cdot\cos\alpha=-1 \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha=120^0.$$

Vježba 130

Izračunaj kut α trokuta ABC, ako njegove stranice zadovoljavaju relaciju $\frac{a-b}{c}=\frac{b+c}{a+b}$.

Rezultat: 120º.

Zadatak 131 (Neven, srednja škola)

Izračunaj α – γ ako za kutove trokuta vrijedi α – β = 3 · γ.

Rješenje 131

Ponovimo!

Zbroj kutova u trokutu je 180^0:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

1.inačica

$$\left.\begin{aligned} \alpha-\beta&=3\cdot\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma&=180^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha-\beta&=3\cdot\gamma \\ \beta&=180^0-\alpha-\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha-\left(180^0-\alpha-\gamma\right)=3\cdot\gamma \Rightarrow \alpha-180^0+\alpha+\gamma=3\cdot\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\alpha+\gamma-3\cdot\gamma=180^0 \Rightarrow 2\cdot\alpha-2\cdot\gamma=180^0 \;/:2 \Rightarrow \alpha-\gamma=90^0.$$

2.inačica

$$\left.\begin{aligned} \alpha-\beta&=3\cdot\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma&=180^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow \alpha-\beta+\alpha+\beta+\gamma=3\cdot\gamma+180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha-\beta+\alpha+\beta+\gamma=3\cdot\gamma+180^0 \Rightarrow \alpha+\alpha+\gamma=3\cdot\gamma+180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\alpha+\gamma-3\cdot\gamma=180^0 \Rightarrow 2\cdot\alpha-2\cdot\gamma=180^0 \;/:2 \Rightarrow \alpha-\gamma=90^0.$$

Vježba 131

Izračunaj α – β ako za kutove trokuta vrijedi α – γ = 3 · β.

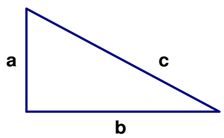
Rezultat: 90º.

Zadatak 132 (Iva, srednja škola)

Duljine kateta pravokutnog trokuta su a = 80 cm i b = 18 cm. Odredite duljinu visine h na hipotenuzu.

Rješenje 132

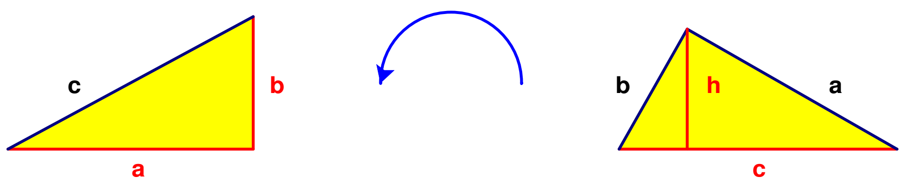
Ponovimo!



Pitagorin poučak: Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Površina pravokutnog trokuta:



$$P = \frac{a \cdot b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot h}{2}.$$

Pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu hipotenuze c pravokutnog trokuta:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c = \sqrt{(80\ cm)^2 + (18\ cm)^2} \Rightarrow c = 82\ cm.$$

Iz formula za površinu pravokutnog trokuta dobije se duljina visine h na hipotenuzu:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{c \cdot h}{2} \\ P &= \frac{a \cdot b}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \;/ \cdot \frac{2}{c} \Rightarrow h = \frac{a \cdot b}{c} \Rightarrow h = \frac{80\ cm \cdot 18\ cm}{82\ cm} \Rightarrow h = 17.56\ cm.$$

Vježba 132

Duljine kateta pravokutnog trokuta su a = 160 cm i b = 36 cm. Odredite duljinu visine h na hipotenuzu.

Rezultat: 35.12 cm.

Zadatak 133 (Kornelija, gimnazija)

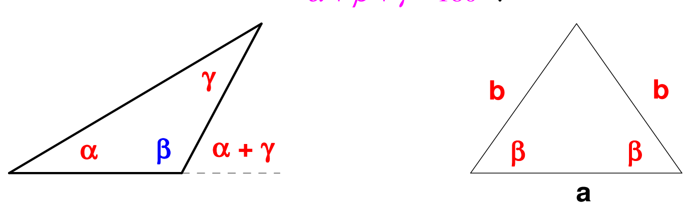
Konstruiraj trokut ako je zadano: a + b, α, β.

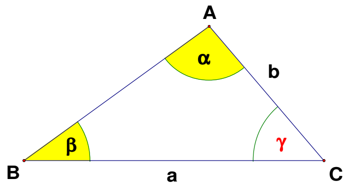
Rješenje 133

Ponovimo!

Zbroj kutova u trokutu je 180°:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

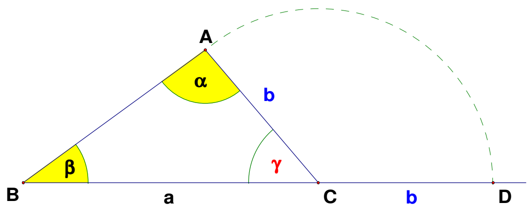


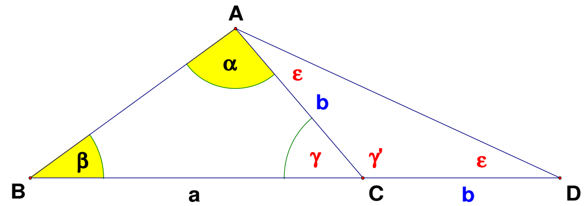


Kut γ iznosi:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta).$$

Na produžetku stranice $\overline{BC}$ preko vrha C odredimo točku D tako da je |CD| = |CA| = b





Kut γ ' iznosi:

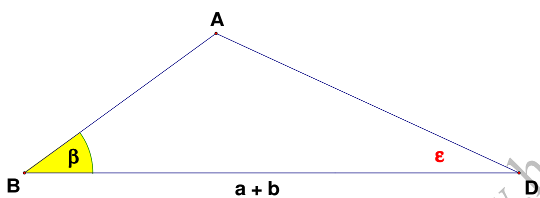
$$\gamma' = \alpha + \beta.$$

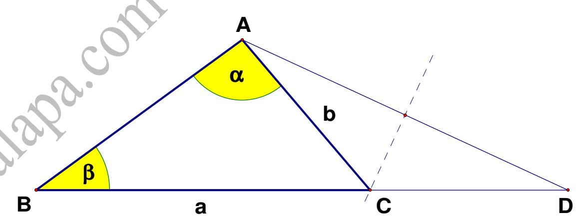
Budući da je trokut ACD jednakokračan, ima dva jednaka kuta, slijedi:

$$\angle CDA = \angle CAD = \varepsilon \;\Rightarrow\; 2 \cdot \varepsilon + \gamma' = 180^0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot \varepsilon + \alpha + \beta = 180^0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 \cdot \varepsilon = 180^0 - (\alpha + \beta) \;/:2 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Tada su u trokutu ABD poznati ovi elementi: a + b, β i ε, tj. trokut je moguće konstruirati.
Trokut ACD je jednakokračan, pa će se vrh C dobiti presjekom simetrale dužine $\overline{AD}$ i dužine $\overline{BD}$





Vježba 133

Konstruiraj trokut ako je zadano: a + c, α, γ.

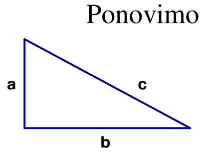
Rezultat: Analogna konstrukcija.

Zadatak 134 (Aleksandar, gimnazija)

Brod je privezan za obalu zategnutim konopom duljine 2.5 m. Jedan kraj konopa učvršćen je na obali na visini 1.4 m iznad razine mora, a drugi kraj na pramcu broda 2.9 m iznad razine mora. Ako konop potegnemo te se on skrati za 80 cm za koliko se brod približi obali?

Rješenje 134

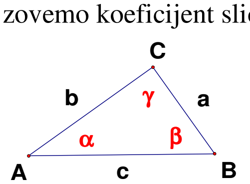
Ponovimo!

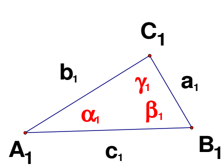


Pitagorin poučak: Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

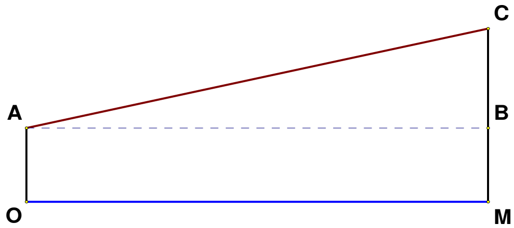
$$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne. Omjer stranica sličnih trokuta zovemo koeficijent sličnosti k.





$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \\ \dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = \dfrac{c_1}{c} = k \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

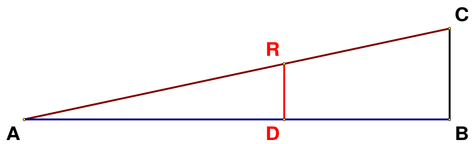


Sa slike vidi se: $|AC| = 2.5$ m,
$|AO| = |BM| = 1.4$ m,
$|CM| = 2.9$ m,
$|BC| = |CM| - |BM| =$
$= 2.9$ m $- 1.4$ m $= 1.5$ m.

Udaljenost broda od obale $|AB|$ izračunamo pomoću Pitagorina poučka:

$$|AB|^2 = |AC|^2 - |BC|^2 \Rightarrow |AB| = \sqrt{|AC|^2 - |BC|^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(2.5\ m)^2 - (1.5\ m)^2} = 2\ m.$$

Računamo koliko će se brod približiti obali, ako se konop skrati za 80 cm.



Sa slike vidi se:
$|AC| = 2.5$ m,
$|RC| = 80$ cm $= 0.8$ m,
$|AB| = 2$ m.

Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔADR dobije se iznos $|DB|$ za koliko se brod približi obali:

$$\frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|RC|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{|RC|}{|AC|} \ / \cdot |AB| \Rightarrow |DB| = \frac{|RC|}{|AC|} \cdot |AB| \Rightarrow |DB| = \frac{0.8\ m}{2.5\ m} \cdot 2\ m = 0.64\ m.$$

Vježba 134

Brod je privezan za obalu zategnutim konopom duljine 2.5 m. Jedan kraj konopa učvršćen je na obali na visini 1.4 m iznad razine mora, a drugi kraj na pramcu broda 2.9 m iznad razine mora. Ako konop potegnemo te se on skrati za 80 cm koliko je brod udaljen od obale?

Rezultat: 1.36 m.

Zadatak 135 (Slavko, srednja škola)

Izračunaj duljinu stranice jednakostraničnog trokuta ako je duljina visine 8 cm.

Rješenje 135

Ponovimo!

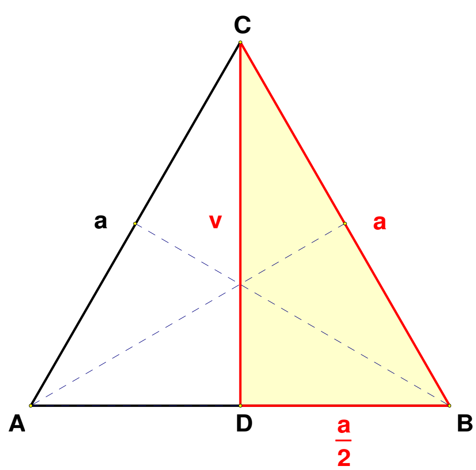
Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti
a) raznostraničan,
b) jednakokračan,
c) jednakostraničan.

Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake. Visina jednakostraničnog trokuta iznosi:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

1.inačica

Sa slike vidi se:



$$|BC| = a \quad , \quad |DB| = \frac{a}{2} \quad , \quad |CD| = v.$$

Budući da je trokut DBC pravokutan, vrijedi Pitagorin poučak:

$$|BC|^2 = |DB|^2 + |DC|^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 \Rightarrow a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = v^2 \Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot a^2 - a^2}{4} = v^2 \Rightarrow \frac{3 \cdot a^2}{4} = v^2 \; / \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3} \cdot v^2 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = v \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow a = v \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = v \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow a = v \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = v \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 8 \; cm \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{16}{3} \cdot \sqrt{3} \; cm.$$

2.inačica

Iz formule za visinu jednakostraničnog trokuta dobije se duljina stranice:

$$v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \; / \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = v \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow a = v \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = v \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = 8 \; cm \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{16}{3} \cdot \sqrt{3} \; cm.$$

Vježba 135

Izračunaj duljinu stranice jednakostraničnog trokuta ako je duljina visine 6 cm.

Rezultat: $4 \cdot \sqrt{3} \; cm.$

Zadatak 136 (Marija, srednja škola)

U trokutu ABC je b – a = 3 cm, c = 7 cm i γ = 60°. Izračunaj duljine stranica a i b.

Rješenje 136

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kosinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \; , \; b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \; , \; c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Uporabom kosinusova poučka za stranicu c dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} b - a = 3 \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b - a = 3 \\ 7^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b - a = 3 \\ 49 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b - a = 3 \\ 49 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b - a = 3 \\ 49 = a^2 + b^2 - a \cdot b \end{array}\right\}.$$

Dobiveni sustav jednadžbi riješimo metodom zamjene (supstitucije):

$$\left.\begin{array}{l} b - a = 3 \\ 49 = a^2 + b^2 - a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b - a = 3 \\ a^2 + b^2 - a \cdot b = 49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = a + 3 \\ a^2 + b^2 - a \cdot b = 49 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2+(a+3)^2-a\cdot(a+3)=49\ \Rightarrow\ a^2+a^2+6\cdot a+9-a^2-3\cdot a=49\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2+a^2+6\cdot a+9-a^2-3\cdot a=49\ \Rightarrow\ a^2+3\cdot a+9-49=0\ \Rightarrow\ a^2+3\cdot a-40=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a^2+3\cdot a-40=0 \\ a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=-40 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=-40 \\ a_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-40)}}{2\cdot1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{2}\ \Rightarrow\ a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{2}\ \Rightarrow\ a_{1,2}=\frac{-3\pm13}{2}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{-3+13}{2} \\ a_2=\dfrac{-3-13}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{10}{2} \\ a_2=\dfrac{-16}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a_1=5 \\ a_2=-8\ \text{nema smisla} \end{array}\right\}.$$

Duljina stranice a iznosi a = 5 cm, a duljina stranice b je:

$$\left.\begin{array}{l} b-a=3 \\ a=5 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ b-5=3\ \Rightarrow\ b=3+5\ \Rightarrow\ b=8\ cm.$$

Vježba 136

U trokutu ABC je b – a = 6 cm, c = 14 cm i γ = 60°. Izračunaj duljine stranica a i b.

Rezultat: a = 10 cm, b = 16 cm.

Zadatak 137 (Marija, srednja škola)

Stranice trokuta čine aritmetički niz s razlikom d = 2, a najveći kut trokuta je 120°. Odredi duljine stranica trokuta.

Rješenje 137

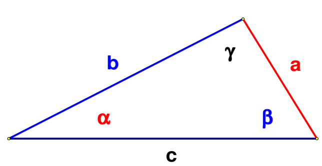
Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a\cdot b=0\ \Rightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

Kosinusov poučak:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\ ,\ b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta\ ,\ c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$



$a<b\Rightarrow\alpha<\beta$

$a<c\Rightarrow\alpha<\gamma$

$b<c\Rightarrow\beta<\gamma$

Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut. Budući da duljine stranica trokuta čine aritmetički niz s razlikom 2, možemo pisati:

a = x – 2 , b = x , c = x + 2.

Uočimo da vrijedi:

$$a<b<c\ \Rightarrow\ \alpha<\beta<\gamma.$$

Uporabom kosinusova poučka za stranicu c dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} a=x-2\ ,\ b=x\ ,\ c=x+2\ ,\ \gamma=120^0 \\ c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ (x+2)^2=(x-2)^2+x^2-2\cdot(x-2)\cdot x\cdot\cos120^0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+4\cdot x+4=x^2-4\cdot x+4+x^2-2\cdot(x-2)\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+4\cdot x+4=x^2-4\cdot x+4+x^2-2\cdot(x-2)\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+4\cdot x+4=x^2-4\cdot x+4+x^2+(x-2)\cdot x\Rightarrow x^2+4\cdot x+4=x^2-4\cdot x+4+x^2+x^2-2\cdot x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+4\cdot x+4=x^2-4\cdot x+4+x^2+x^2-2\cdot x\Rightarrow 4\cdot x=-4\cdot x+x^2+x^2-2\cdot x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x+4\cdot x-x^2-x^2+2\cdot x=0\Rightarrow -2\cdot x^2+10\cdot x=0\ /:(-2)\Rightarrow x^2-5\cdot x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{nepotpuna}\\ \text{kvadratna}\\ \text{jednadžba}\end{bmatrix}\Rightarrow x\cdot(x-5)=0\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=0\\ x-5=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=0\ \text{nema smisla}\\ x_2=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=5.$$

Duljine stranica trokuta iznose:

$$\left.\begin{matrix}a=x-2\\ b=x\\ c=x+2\\ x=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=5-2\\ b=5\\ c=5+2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=3\ cm\\ b=5\ cm\\ c=7\ cm\end{matrix}\right\}.$$

Vježba 137

Stranice trokuta čine aritmetički niz s razlikom d = 4, a najveći kut trokuta je 120°. Odredi duljine stranica trokuta.

Rezultat: a = 6 cm, b = 10 cm, c = 14 cm.

Zadatak 138 (Berislav, gimnazija)

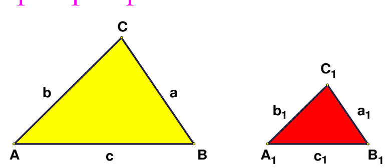
Katete pravokutnog trokuta su 4 cm i 6 cm. Koliki je polumjer kružnice kojoj je središte na hipotenuzi tog trokuta i koja dodiruje obje njegove katete?

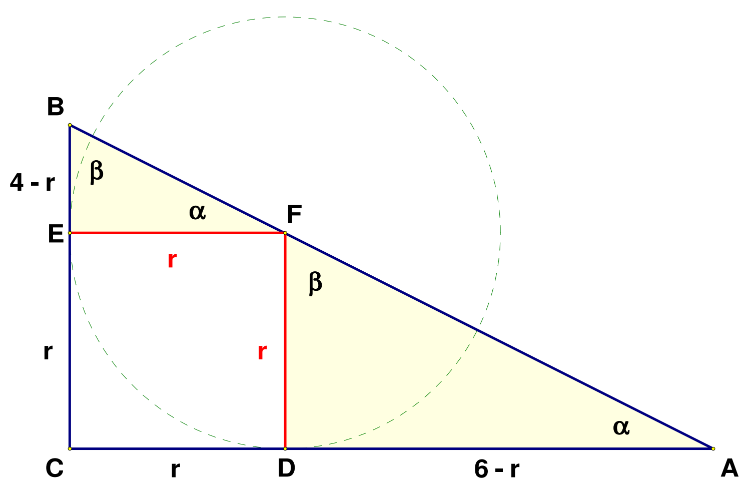
Rješenje 138

Ponovimo!

Za dva slična trokuta ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ vrijedi da su im odgovarajuće (homologne) stranice proporcionalne (razmjerne):

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k\ ,\ \text{k je koeficijent sličnosti}.$$





Sa slike vidi se:

$$|BC|=4 \quad , \quad |DF|=|CE|=r \quad , \quad |BE|=|BC|-|CE|=4-r,$$

$$|CA|=6 \quad , \quad |EF|=|CD|=r \quad , \quad |DA|=|CA|-|CD|=6-r.$$

Pravokutni trokuti ΔBEF i ΔFDA slični su jer imaju iste kutove pa vrijedi razmjer:

$$|BE|:|EF|=|FD|:|DA| \Rightarrow (4-r):r=r:(6-r) \Rightarrow r\cdot r=(4-r)\cdot(6-r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2=24-4\cdot r-6\cdot r+r^2 \Rightarrow r^2=24-4\cdot r-6\cdot r+r^2 \Rightarrow 0=24-4\cdot r-6\cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot r+6\cdot r=24 \Rightarrow 10\cdot r=24 \;/:10 \Rightarrow r=2.4\ cm.$$

Vježba 138

Katete pravokutnog trokuta su 8 cm i 12 cm. Koliki je polumjer kružnice kojoj je središte na hipotenuzi tog trokuta i koja dodiruje obje njegove katete?

Rezultat: 4.8 cm.

Zadatak 139 (Željko, gimnazija)

Ako je u trokutu a = 2 · b · cos γ, onda je b = c. Dokaži!

Rješenje 139

Ponovimo!

$$\sqrt{x^2}=x \text{ za } x\geq 0.$$

Kosinusov poučak:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \quad , \quad \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} \quad , \quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$

$$\left.\begin{matrix}\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\\ a=2\cdot b\cdot\cos\gamma\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\\ a=2\cdot b\cdot\cos\gamma \;/\cdot\dfrac{1}{2\cdot b}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\\ \cos\gamma=\dfrac{a}{2\cdot b}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}=\frac{a}{2\cdot b} \Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}=\frac{a}{2\cdot b} \;/\cdot 2\cdot a\cdot b \Rightarrow a^2+b^2-c^2=a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=a^2 \Rightarrow b^2-c^2=0 \Rightarrow b^2=c^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{b^2}=\sqrt{c^2} \Rightarrow b=c. \text{ Dokaz gotov.}$$

Vježba 139

Ako je u trokutu b = 2 · c · cos α, onda je c = a. Dokaži!

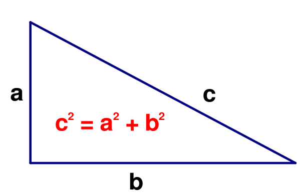
Rezultat: Dokaz analogan.

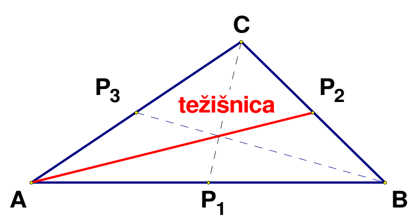
Zadatak 140 (Lidija, gimnazija)

Kolika je hipotenuza pravokutnog trokuta kojem su duljine težišnica povučenih iz vrhova šiljastih kutova 7 cm i 4 cm?

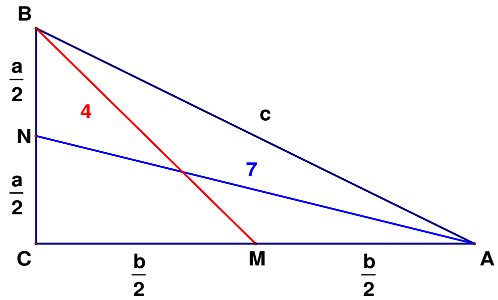
Rješenje 140

Ponovimo!





Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama. Težišnica trokuta je spojnica vrha trokuta sa polovištem nasuprotne stranice.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \;,\; |BC| = a \;,\; |CA| = b \;,\; |CM| = \frac{b}{2} \;,\; |NC| = \frac{a}{2} \;,\; |BM| = 4 \;,\; |AN| = 7.$$

Uočimo pravokutne trokute ΔCAN i ΔCMB i uporabimo Pitagorin poučak:

$$\left.\begin{array}{l} |NC|^2 + |CA|^2 = |AN|^2 \\ |BC|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = 7^2 \\ a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a^2}{4} + b^2 = 49 \\ a^2 + \frac{b^2}{4} = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 + a^2 + \frac{b^2}{4} = 49 + 16 \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot a^2 + \frac{5}{4} \cdot b^2 = 65 \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot \left(a^2 + b^2\right) = 65 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a^2 + b^2 = c^2\right] \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot c^2 = 65 \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot c^2 = 65 \;/ \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow c^2 = 52 \Rightarrow c^2 = 52 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{52} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] c = \sqrt{4 \cdot 13} \Rightarrow c = 2 \cdot \sqrt{13} \; cm.$$

Vježba 140

Kolika je hipotenuza pravokutnog trokuta kojem su duljine težišnica povučenih iz vrhova šiljastih kutova 7 cm i 4 cm?

Rezultat: $4 \cdot \sqrt{13} \; cm.$