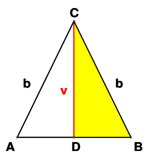
Zadatak 101 (Rea, gimnazija)

Visina jednakokračnog trokuta iznosi 20 cm, a osnovica se prema kraku odnosi kao 4 : 3. Koliki je polumjer tom trokutu upisane kružnice?

Rješenje 101



Sa slike vidi se:

$$v = |DC| = 20 \quad , \quad a = |AB| \quad , \quad b = |BC| = |AC| \quad , \quad \frac{a}{2} = |DB|$$

Uočimo pravokutan trokut DBC. Pomoću zadanog omjera i Pitagorina poučka dobije se sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} |AB|:|BC| = 4:3 \\ |BC|^2 = |CD|^2 + |DB|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a:b = 4:3 \\ b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot a = 4\cdot b \;/:3 \\ b^2 = 20^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \frac{4}{3}\cdot b \\ b^2 = 400 + \left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 400 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot b\right)^2 \Rightarrow b^2 = 400 + \left(\frac{2}{3}\cdot b\right)^2 \Rightarrow b^2 = 400 + \frac{4}{9}\cdot b^2 \Rightarrow b^2 - \frac{4}{9}\cdot b^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}\cdot b^2 = 400 \;/\cdot\frac{9}{5} \Rightarrow b^2 = 720 \;/\sqrt{} \Rightarrow b = \sqrt{720} \Rightarrow b = \sqrt{144\cdot 5} \Rightarrow b = 12\cdot\sqrt{5}.$$

Iz formula za površinu trokuta dobije se polumjer upisane kružnice:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{a\cdot v}{2} \\ P = \rho\cdot s \end{array}\right\} \Rightarrow \rho\cdot s = \frac{a\cdot v}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{poluopseg trokuta} \\ s = \frac{a+2\cdot b}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \rho\cdot\frac{a+2\cdot b}{2} = \frac{a\cdot v}{2} \;/\cdot\frac{2}{a+2\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{a\cdot v}{a+2\cdot b} \Rightarrow \rho = \frac{16\cdot\sqrt{5}\cdot 20}{16\cdot\sqrt{5}+2\cdot 12\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \rho = \frac{16\cdot\sqrt{5}\cdot 20}{40\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \rho = 8\ cm.$$

Vježba 101

Visina jednakokračnog trokuta iznosi 20 cm, a osnovica se prema kraku odnosi kao 4 : 3. Koliki je opseg trokuta?

Rezultat: $40\cdot\sqrt{5}\ cm.$

Zadatak 102 (Rea, gimnazija)

Zbroj duljina stranica a i b trokuta iznosi 15, a duljine visina spuštenih na te stranice jesu 4 i 6. Nađite površinu trokuta.

Rješenje 102

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{a\cdot v_a}{2} \\ P = \frac{b\cdot v_b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \frac{2\cdot P}{v_a} \\ b = \frac{2\cdot P}{v_b} \end{array}\right\} \Rightarrow a+b = \frac{2\cdot P}{v_a} + \frac{2\cdot P}{v_b} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=15 \\ v_a = 4 \\ v_b = 6 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{2\cdot P}{4} + \frac{2\cdot P}{6} = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2} + \frac{P}{3} = 15 \;/\cdot 6 \Rightarrow 3\cdot P + 2\cdot P = 90 \Rightarrow 5\cdot P = 90 \;/:5 \Rightarrow P = 18.$$

Vježba 102

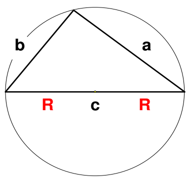
Zbroj duljina stranica a i b trokuta iznosi 20, a duljine visina spuštenih na te stranice jesu 4 i 6. Nađite površinu trokuta.

Rezultat: 24.

Zadatak 103 (Rea, gimnazija)

Kružnici polumjera R = 1.25 upisan je pravokutan trokut površine P = 1.25. Nađite a + b.

Rješenje 103



$$c=2\cdot R=2\cdot 1.25=2.5 \quad , \quad P=\frac{a\cdot b}{2} \Rightarrow a\cdot b=2\cdot P=2\cdot 1.25=2.5$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow a+b=\sqrt{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a^2+b^2=c^2\right] \Rightarrow a+b=\sqrt{c^2+2\cdot a\cdot b} \Rightarrow a+b=\sqrt{2.5^2+2\cdot 2.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b=\sqrt{6.25+5} \Rightarrow a+b=\sqrt{11.25} \Rightarrow a+b=\sqrt{\frac{1125}{100}} \Rightarrow a+b=\sqrt{\frac{45}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b=\sqrt{\frac{9\cdot 5}{4}} \Rightarrow a+b=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{5}.$$

Vježba 103

Kružnici polumjera R = 1.25 upisan je pravokutan trokut površine P = 1.25. Nađite a + b + c.

Rezultat: $\frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{2}.$

Zadatak 104 (Goran, srednja škola)

U trokutu je a + b = 27, P = 84 i ρ = 4. Nađite sin γ.

Rješenje 104

Ponovimo!

$$P=\rho\cdot s \quad , \quad 2\cdot s=a+b+c \quad , \quad \rho=(s-c)\cdot tg\frac{\gamma}{2} \quad , \quad tg\,\gamma=\frac{2\cdot tg\frac{\gamma}{2}}{1-tg^2\frac{\gamma}{2}} \quad , \quad \sin\gamma=\frac{tg\,\gamma}{\sqrt{1+tg^2\gamma}}.$$

Računamo duljinu stranice c:

$$P=\rho\cdot s \Rightarrow s=\frac{P}{\rho} \Rightarrow s=\frac{84}{4} \Rightarrow s=21 \Rightarrow c=2\cdot s-(a+b) \Rightarrow c=2\cdot 21-27 \Rightarrow c=42-27 \Rightarrow c=15.$$

Tražimo vrijednost sin γ:

$$\rho=(s-c)\cdot tg\frac{\gamma}{2} \Rightarrow tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\rho}{s-c} \Rightarrow tg\frac{\gamma}{2}=\frac{4}{21-15} \Rightarrow tg\frac{\gamma}{2}=\frac{4}{6} \Rightarrow tg\frac{\gamma}{2}=\frac{2}{3}.$$

$$tg\,\gamma=\frac{2\cdot tg\frac{\gamma}{2}}{1-tg^2\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow tg\,\gamma=\frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow tg\,\gamma=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} \Rightarrow tg\,\gamma=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} \Rightarrow tg\,\gamma=\frac{\frac{4}{1}}{\frac{5}{3}} \Rightarrow tg\,\gamma=\frac{12}{5}.$$

$$\sin\gamma=\frac{tg\,\gamma}{\sqrt{1+tg^2\gamma}} \Rightarrow \sin\gamma=\frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{1+\left(\frac{12}{5}\right)^2}} \Rightarrow \sin\gamma=\frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{1+\frac{144}{25}}} \Rightarrow \sin\gamma=\frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{\frac{169}{25}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\gamma=\frac{\frac{12}{5}}{\sqrt{\frac{169}{25}}} \Rightarrow \sin\gamma=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{13}{5}} \Rightarrow \sin\gamma=\frac{12}{13}.$$

Vježba 104

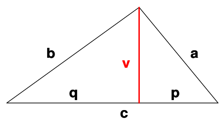
U trokutu je a + b = 27, P = 84 i ρ = 4. Nađite cos γ.

Rezultat: $\cos\gamma = \frac{5}{13}.$

Zadatak 105 (Dado, maturant)

U pravokutnom trokutu p = 2, q = 4. Nađite površinu trokuta.

Rješenje 105



Sa slike vidi se:

$$v^2 = p\cdot q \;/\sqrt{\;} \Rightarrow v = \sqrt{p\cdot q} \quad , \quad c = p + q.$$

Površina trokuta iznosi:

$$P = \frac{c\cdot v}{2} \Rightarrow P = \frac{(p+q)\cdot\sqrt{p\cdot q}}{2} \Rightarrow P = \frac{(2+4)\cdot\sqrt{2\cdot 4}}{2} \Rightarrow P = \frac{6\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P = 6\cdot\sqrt{2}.$$

Vježba 105

U pravokutnom trokutu p = 8, q = 2. Nađite površinu trokuta.

Rezultat: 20.

Zadatak 106 (Dado, maturant)

Kateta a odnosi se prema hipotenuzi c pravokutnog trokuta kao 3 : 5. Opseg tog trokuta je 48 cm. Nađite površinu trokuta.

Rješenje 106

$$\left.\begin{array}{l} a : c = 3 : 5 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3\cdot k \; , \; c = 5\cdot k \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (3\cdot k)^2 + b^2 = (5\cdot k)^2 \Rightarrow 9\cdot k^2 + b^2 = 25\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 25\cdot k^2 - 9\cdot k^2 \Rightarrow b^2 = 16\cdot k^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow b = 4\cdot k.$$

Budući da je zadan opseg trokuta, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O = a + b + c \; , \; O = 48 \\ a = 3\cdot k \; , \; b = 4\cdot k \; , \; c = 5\cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot k + 4\cdot k + 5\cdot k = 48 \Rightarrow 12\cdot k = 48 \;/:12 \Rightarrow k = 4.$$

Površina trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 3\cdot k = 3\cdot 4 = 12 \\ b = 4\cdot k = 4\cdot 4 = 16 \\ P = \frac{a\cdot b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{12\cdot 16}{2} \Rightarrow P = 96\ cm^2.$$

Vježba 106

Kateta a odnosi se prema hipotenuzi c pravokutnog trokuta kao 3 : 5. Opseg tog trokuta je 48 cm. Nađite hipotenuzu.

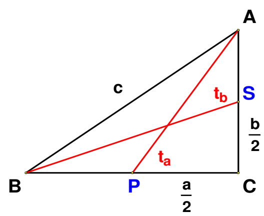
Rezultat: c = 20 cm.

Zadatak 107 (Dado, maturant)

Duljine težišnica povučenih iz vrhova šiljastih kutova pravokutnog trokuta iznose 7 cm i 4 cm. Koliko iznosi duljina hipotenuze pravokutnog trokuta?

Rješenje 107

Težišnica je spojnica vrha trokuta sa polovištem nasuprotne stranice.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \;,\; |BC| = a \;,\; |CA| = b \;,\; |PC| = \frac{a}{2} \;,\; |CS| = \frac{b}{2}$$

$$|AP| = t_a \;,\; |BS| = t_b$$

Uočimo tri pravokutna trokuta: ΔABC, ΔBCS i ΔPCA.Za svaki od njih napišemo Pitagorin poučak:

$$\left.\begin{array}{l} |AP|^2 = |PC|^2 + |CA|^2 \\ |BS|^2 = |BC|^2 + |CS|^2 \\ |AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \\ t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 \\ t_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 \;\; /\cdot 4 \\ t_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} \;\; /\cdot 4 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot t_a^2 = a^2 + 4\cdot b^2 \\ 4\cdot t_b^2 = 4\cdot a^2 + b^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo prve} \\ \text{dvije jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot t_a^2 + 4\cdot t_b^2 = 5\cdot a^2 + 5\cdot b^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot\left(t_a^2 + t_b^2\right) = 5\cdot\left(a^2 + b^2\right) \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot\left(t_a^2 + t_b^2\right) = 5\cdot c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{4\cdot\left(t_a^2 + t_b^2\right)}{5} \Rightarrow c^2 = \frac{4\cdot\left(7^2 + 4^2\right)}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{4\cdot(49+16)}{5} \Rightarrow c^2 = \frac{4\cdot 65}{5} \Rightarrow c^2 = 52 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow c = \sqrt{52} \Rightarrow c = \sqrt{4\cdot 13} \Rightarrow c = 2\cdot\sqrt{13}\ cm.$$

Vježba 107

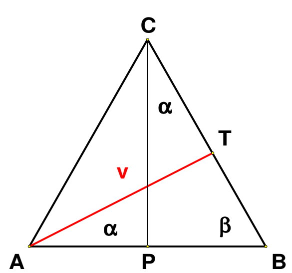
Duljine težišnica povučenih iz vrhova šiljastih kutova pravokutnog trokuta iznose 4 cm i 3 cm. Koliko iznosi duljina hipotenuze pravokutnog trokuta?

Rezultat: $c = 2\cdot\sqrt{5}\ cm.$

Zadatak 108 (Željka, gimnazija)

Osnovica jednakokračnog trokuta iznosi 30 cm, a visina 20 cm. Nađite duljinu visine spuštene na krak.

Rješenje 108



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 30 \;,\; |PC| = 20 \;,\; v = |AT| = 30 \;,\; |PB| = \frac{1}{2}\cdot|AB| = 15.$$

Uočimo pravokutan trokut PBC i pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu kraka $|BC|$:

$$|BC|^2 = |PC|^2 + |PB|^2 \Rightarrow |BC|^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow |BC|^2 = 400 + 225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC|^2 = 625 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |BC| = 25\ cm.$$

1.inačica

Budući da su trokuti ΔABT i ΔPBC slični (imaju iste kutove), slijedi razmjer:

$$|PC| : |BC| = |AT| : |AB| \Rightarrow 20 : 25 = v : 30 \Rightarrow 25\cdot v = 20\cdot 30 \Rightarrow v = \frac{20\cdot 30}{25} \Rightarrow v = 24\ cm.$$

2.inačica

Površina trokuta ABC može se izraziti na dva načina:

$$\frac{|AB| \cdot |PC|}{2} = \frac{|BC| : |AT|}{2} \Rightarrow \frac{30 \cdot 20}{2} = \frac{25 \cdot v}{2} \; / \cdot \frac{2}{25} \Rightarrow v = \frac{30 \cdot 20}{25} \Rightarrow v = 24 \; cm.$$

Vježba 108

Osnovica jednakokračnog trokuta iznosi 120 cm, a visina 80 cm. Nađite duljinu visine spuštene na krak.

Rezultat: 96 cm.

Zadatak 109 (Ivan, pomorska škola)

Vrhovi trokuta su točke A(1, 2), B(– 2, 3) i C(– 4 , – 1). Nađite jednadžbu pravca na kojem je težišnica trokuta iz vrha A.

Rješenje 109

Ponovimo!

Težišnica trokuta je spojnica polovišta stranice sa suprotnim vrhom trokuta.

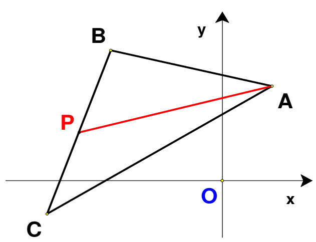
Ako točka P(x, y) raspolavlja dužinu $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, tada je:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Jednadžba pravca točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ glasi:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Neka je točka P polovište dužine $\overline{BC}$. Koordinate točke P iznose:



$$\left.\begin{array}{l} B(-2, 3) = B(x_1, y_1) \\ C(-4, -1) = C(x_2, y_2) \\ P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\frac{-2-4}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = P(-3, 1).$$

Jednadžba pravca AP, na kojem je težišnica trokuta iz vrha A, glasi

$$\left.\begin{array}{l} A(1, 2) = A(x_1, y_1) \\ P(-3, 1) = P(x_2, y_2) \\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 2 = \frac{1-2}{-3-1} \cdot (x-1) \Rightarrow y - 2 = \frac{-1}{-4} \cdot (x-1) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4} \cdot (x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot x - \frac{1}{4} + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{7}{4}.$$

Vježba 109

Vrhovi trokuta su točke A(2, 4), B(– 4, 6), C(– 8 , – 2). Nađite jednadžbu pravca na kojem je težišnica trokuta iz vrha A.

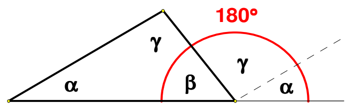
Rezultat: $y = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{7}{2}.$

Zadatak 110 (Marija, maturantica)

Koliki su kutovi trokuta ako se odnose kao 1 : 3 : 5?

Rješenje 110

Ponovimo!



Zbroj kutova u trokutu je 180°:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Budući da je zadan odnos među kutovima, slijedi:

$$\left.\begin{matrix}\alpha:\beta:\gamma=1:3:5\\ \alpha+\beta+\gamma=180^0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha=x\ ,\ \beta=3\cdot x\ ,\ \gamma=5\cdot x\\ \alpha+\beta+\gamma=180^0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x+3\cdot x+5\cdot x=180^0\Rightarrow 9\cdot x=180^0\ /:9\Rightarrow x=20^0.$$

Kutovi trokuta iznose:

$$\left.\begin{matrix}\alpha=x\\ \beta=3\cdot x\\ \gamma=5\cdot x\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha=20^0\\ \beta=3\cdot 20^0\\ \gamma=5\cdot 20^0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha=20^0\\ \beta=60^0\\ \gamma=100^0\end{matrix}\right\}.$$

Vježba 110

Koliki su kutovi trokuta ako se odnose kao 2 : 2 : 5?

Rezultat: $\alpha=40^0\ ,\ \beta=40^0\ ,\ \gamma=100^0.$

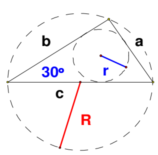
Zadatak 111 (Marija, maturantica)

Jedan kut pravokutnog trokuta iznosi 30°. Koliki je omjer polumjera opisane i upisane kružnice tom trokutu?

Rješenje 111

Ponovimo!

U pravokutnom trokutu kateta a i b te hipotenuze c, polumjer:



- opisane kružnice glasi: $R=\frac{c}{2}$
- upisane kružnice glasi: $r=\frac{a\cdot b}{a+b+c}$.

Budući da je jedan šiljasti kut 30°, slijedi:

$$\left.\begin{matrix}\sin 30^0=\frac{a}{c}\\ \cos 30^0=\frac{b}{c}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=c\cdot\sin 30^0\\ b=c\cdot\cos 30^0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=\frac{1}{2}\cdot c\\ b=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c\end{matrix}\right\}.$$

Računamo omjer polumjera opisane i upisane kružnice:

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{a\cdot b}{a+b+c}}\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{c\cdot(a+b+c)}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{c\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot c+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c+c\right)}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c}\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{c^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}+2}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{matrix}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{3\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{3\cdot\sqrt{3}+3}{3} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{3\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{3} \Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{\sqrt{3}+1}{1}.$$

Vježba 111

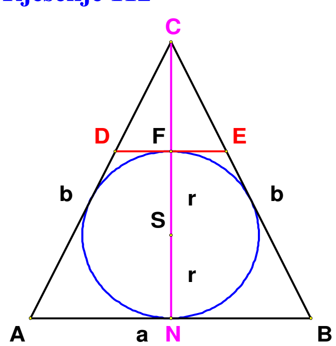
Jedan kut pravokutnog trokuta iznosi 60°. Koliki je omjer polumjera opisane i upisane kružnice tom trokutu?

Rezultat: $\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{3}+1}{1}.$

Zadatak 112 (Marija, maturantica)

U jednakokračan trokut osnovice 12 cm i kraka 10 cm upisana je kružnica. Koliki je odrezak tangente kružnice paralelne s osnovicom između krakova trokuta?

Rješenje 112



Sa slike vidi se:

$$a=|AB|=12\ cm\ ,\ b=|BC|=|AC|=10\ cm\ ,\ |NB|=6\ cm$$

$$|NF|=2\cdot r\ ,\ |NC|=v\ ,\ |FC|=v-2\cdot r.$$

Najprije odredimo duljinu visine v = |NC| trokuta ABC. Iz pravokutnog trokuta NBC i pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$|NC|^2=|BC|^2-|NB|^2 \Rightarrow v^2=10^2-6^2 \Rightarrow v^2=100-36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2=64\ /\sqrt{\ } \Rightarrow v=8\ cm.$$

Da bismo našli polumjer upisane kružnice trokutu ABC, uporabit ćemo dvije formule za njegovu površinu:

$$\left.\begin{array}{l} P=r\cdot s\ ,\ s=\frac{a+2\cdot b}{2} \\ P=\frac{a\cdot v}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=r\cdot\frac{a+2\cdot b}{2} \\ P=\frac{a\cdot v}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow r\cdot\frac{a+2\cdot b}{2}=\frac{a\cdot v}{2}\ /\cdot\frac{2}{a+2\cdot b} \Rightarrow r=\frac{a\cdot v}{a+2\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{12\cdot 8}{12+2\cdot 10} \Rightarrow r=\frac{96}{32} \Rightarrow r=3\ cm.$$

Budući da su trokuti ΔABC i ΔDEC slični (jer imaju iste kutove), vrijedi omjer iz kojeg dobijemo duljinu odreska |DE| tangente.

$$|AB|:|DE|=|NC|:|FC| \Rightarrow a:|DE|=v:(v-2\cdot r) \Rightarrow |DE|\cdot v=a\cdot(v-2\cdot r) \Rightarrow |DE|=\frac{a\cdot(v-2\cdot r)}{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DE|=\frac{12\cdot(8-2\cdot 3)}{8} \Rightarrow |DE|=\frac{12\cdot 2}{8} \Rightarrow |DE|=3\ cm.$$

Vježba 112

U jednakokračan trokut osnovice 12 cm i kraka 10 cm upisana je kružnica. Kolika je njezina površina?

Rezultat: $P = 9\cdot\pi\ cm^2$.

Zadatak 113 (Anamarija, maturantica TUPŠ)

Pravokutan trokut ima površinu 24 cm^2 i hipotenuzu duljine 10 cm. Nađite opseg trokuta.

Rješenje 113

1.inačica

$$P=\frac{a\cdot b}{2} \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2}=24\ /\cdot 24 \Rightarrow a\cdot b=48.$$

Promatramo formulu za kvadrat zbroja duljina kateta:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow a+b = \sqrt{a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Pitagorin poučak} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{bmatrix} \Rightarrow a+b = \sqrt{c^2 + 2\cdot a\cdot b} \Rightarrow a+b = \sqrt{10^2 + 2\cdot 48} \Rightarrow a+b = \sqrt{100+96} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b = \sqrt{196} \Rightarrow a+b = 14\ cm.$$

Opseg pravokutnog trokuta iznosi:

$$O = a+b+c \Rightarrow O = (a+b)+c \Rightarrow O = 14\ cm + 10\ cm \Rightarrow O = 24\ cm.$$

2.inačica

$$P = \frac{a\cdot b}{2} \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2} = 24 \ /\cdot 24 \Rightarrow a\cdot b = 48.$$

Uporabom Pitagorina poučka postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} a^2 + b^2 = c^2 \\ a\cdot b = 48 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 + b^2 = 10^2 \\ a\cdot b = 48 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 + b^2 = 100 \\ b = \frac{48}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 + \left(\frac{48}{a}\right)^2 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{2304}{a^2} = 100 \ /\cdot a^2 \Rightarrow a^4 + 2304 = 100\cdot a^2 \Rightarrow a^4 - 100\cdot a^2 + 2304 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{bikvadratna jednadžba,} \\ \text{supstitucija}: a^2 = t \end{bmatrix} \Rightarrow t^2 - 100\cdot t + 2304 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} t^2 - 100\cdot t + 2304 = 0 \\ a = 1\ ,\ b = -100\ ,\ c = 2304 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1\ ,\ b = -100\ ,\ c = 2304 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 4\cdot 1\cdot 2304}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 9216}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{784}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{100 \pm 28}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \frac{100+28}{2} \\ t_2 = \frac{100-28}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \frac{128}{2} \\ t_2 = \frac{72}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = 64 \\ t_2 = 36 \end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se na supstituciju:

$$\left.\begin{matrix} t = 64 \\ a^2 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 = 64 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 8 \\ a_2 = -8 \ \text{nema smisla} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 8 \\ b = \frac{48}{8} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 8\ cm \\ b = 6\ cm \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b = 14\ cm.$$

$$\left.\begin{matrix} t = 36 \\ a^2 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 = 36 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 6 \\ a_2 = -6 \ \text{nema smisla} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 6 \\ b = \frac{48}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 6\ cm \\ b = 8\ cm \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b = 14\ cm.$$

Opseg pravokutnog trokuta iznosi:

$$O = a+b+c \Rightarrow O = (a+b)+c \Rightarrow O = 14\ cm + 10\ cm \Rightarrow O = 24\ cm.$$

Vježba 113

Pravokutan trokut ima površinu 24 cm^2 i hipotenuzu duljine 10 cm. Nađite duljinu visine na hipotenuzu.

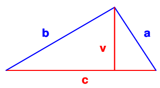
Rezultat: $v_c = 4.8$ cm.

Zadatak 114 (Anamarija, maturantica TUPŠ)

U pravokutnom trokutu omjer kateta je a : b = $\sqrt{3}$, a visina na hipotenuzu je v = 3 cm. Nađi hipotenuzu.

Rješenje 114

Ponovimo!



$$\text{Pitagorin poučak}: a^2 + b^2 = c^2 \quad , \quad a \cdot b = c \cdot v$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0 \quad , \quad a = \left(\sqrt{a}\right)^2 .$$

Prikažimo katetu b kao funkciju hipotenuze c:

$$\left.\begin{array}{l} a : b = \sqrt{3} \\ a \cdot b = c \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} = \sqrt{3} \\ a \cdot b = c \cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \sqrt{3} \cdot b \\ a \cdot b = 3 \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot b \cdot b = 3 \cdot c \Rightarrow \sqrt{3} \cdot b^2 = 3 \cdot c \;/ : \sqrt{3} \Rightarrow b^2 = \sqrt{3} \cdot c.$$

Prikažimo katetu a kao funkciju hipotenuze c:

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{3} \cdot b \\ b^2 = \sqrt{3} \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \sqrt{3} \cdot b \;/^2 \\ b^2 = \sqrt{3} \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 3 \cdot b^2 \\ b^2 = \sqrt{3} \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c.$$

Uporabom Pitagorina poučka dobije se duljina hipotenuze c:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c \\ b^2 = \sqrt{3} \cdot c \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c + \sqrt{3} \cdot c = c^2 \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{3} \cdot c = c^2 \Rightarrow 4 \cdot \sqrt{3} \cdot c - c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \cdot \left(4 \cdot \sqrt{3} - c\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 0 \text{ nema smisla} \\ 4 \cdot \sqrt{3} - c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 4 \cdot \sqrt{3} \; cm.$$

Vježba 114

U pravokutnom trokutu omjer kateta je a : b = $\sqrt{3}$, a visina na hipotenuzu je v = 1 cm. Nađi hipotenuzu.

Rezultat: $c = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} \; cm.$

Zadatak 115 (Vlatka, srednja škola)

Nađi udaljenost od vrha A do težišta T trokuta zadanog sa A(0, 2), B(4, 0), C(2, 8).

Rješenje 115

Ponovimo!

Trokut koji je određen točkama A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) i C(x_3, y_3) ima težište:

$$T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

Međusobna udaljenost točaka A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2) je:

$$|AB| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

Odredimo težište trokuta kojemu su zadani vrhovi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1) = A(0,\ 2) \\ B(x_2,\ y_2) = B(4,\ 0) \\ C(x_3,\ y_3) = C(2,\ 8) \end{array}\right\} \Rightarrow T\left(\frac{0+4+2}{3}, \frac{2+0+8}{3}\right) \Rightarrow T\left(\frac{6}{3}, \frac{10}{3}\right) \Rightarrow T\left(2, \frac{10}{3}\right).$$

Udaljenost od vrha A do težišta T iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1) = A(0,\ 2) \\ T(x_2,\ y_2) = T\left(2,\ \frac{10}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ |AT| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ \right] \Rightarrow |AT| = \sqrt{(2-0)^2 + \left(\frac{10}{3} - 2\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} \Rightarrow |AT| = \sqrt{4 + \frac{16}{9}} \Rightarrow |AT| = \sqrt{\frac{36+16}{9}} \Rightarrow |AT| = \sqrt{\frac{52}{9}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT| = \sqrt{\frac{4 \cdot 13}{9}} \Rightarrow |AT| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{13}.$$

Vježba 115

Nađi udaljenost od vrha A do težišta T trokuta zadanog sa A(2, 2), B(2, 0), C(2, 8).

Rezultat: $\frac{4}{3}.$

Zadatak 116 (Anamarija, Sanela, maturantice gimnazije)

Zadani su vrhovi jednakostraničnog trokuta A(1, 2), B(3, 1). Nađi jednadžbu pravca na kojem leži vrh C.

Rješenje 116

Ponovimo!

Koeficijent smjera pravca točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Polovište dužine određene točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ je:

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

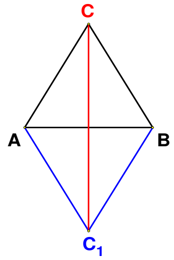
Uvjet okomitosti pravaca $y = k_1 \cdot x + l_1$ i $y = k_2 \cdot x + l_2$:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Jednadžba pravca točkom $A(x_1, y_1)$ kojemu je zadan koeficijent smjera k:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Točka C leži na pravcu kojem pripada visina jednakostraničnog trokuta ABC. Najprije odredimo koeficijent smjera pravca AB:



$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1) = A(1,\ 2) \\ B(x_2,\ y_2) = B(3,\ 1) \\ k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{1-2}{3-1} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Nađemo polovište P dužine $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1, 2) \\ B(x_2, y_2) = B(3, 1) \\ P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+1}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{4}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow P\left(2, \frac{3}{2}\right).$$

Budući da je traženi pravac okomit na pravac AB i prolazi točkom P, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = -\frac{1}{2}\ ,\ k_2 = -\frac{1}{k_1} \\ P(x_1, y_1) = P\left(2, \frac{3}{2}\right) \\ y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k = k_2 = 2 \\ P(x_1, y_1) = P\left(2, \frac{3}{2}\right) \\ y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = 2 \cdot x - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot x - 4 + \frac{3}{2} \Rightarrow y = 2 \cdot x - \frac{5}{2}\ / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot y = 4 \cdot x - 5 \Rightarrow 4 \cdot x - 2 \cdot y - 5 = 0.$$

Sa slike vidi se da postoje dva rješenja, tj. dva jednakostranična trokuta: ΔABC i ΔABC_1.

Vježba 116

Zadani su vrhovi jednakostraničnog trokuta B(1, 2), C(3, 1). Nađi jednadžbu pravca na kojem leži vrh A.

Rezultat: $4 \cdot x - 2 \cdot y - 5 = 0.$

Zadatak 117 (Anamarija, maturantica TUPŠ)

Kolika je površina trokuta koji određuju koordinatne osi i tangenta na kružnicu $x^2 + y^2 = 4$ s diralištem $T\left(1, \sqrt{3}\right)$?

Rješenje 117

Ponovimo!

Ako je zadana središnja jednadžba kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, jednadžba tangente u točki $D(x_1, y_1)$ je:

$$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = r^2.$$

Ako je zadan segmentni oblik jednadžbe pravca $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, površina trokuta koji određuju koordinatne osi i pravac glasi:

$$P = \frac{|m \cdot n|}{2}.$$

Jednadžba tangente glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_1, y_1) = T\left(1, \sqrt{3}\right) \\ x^2 + y^2 = 4 \\ x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y = 4 \Rightarrow x + \sqrt{3} \cdot y = 4\ /:4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot y}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = 1.$$

Površina trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{\frac{4}{\sqrt{3}}}=1\ ,\ m=4\ ,\ n=\dfrac{4}{\sqrt{3}} \\ P=\dfrac{|m\cdot n|}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\dfrac{\left|4\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right|}{2} \Rightarrow P=2\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow P=\dfrac{8}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow P=\frac{8\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

Vježba 117

Kolika je površina trokuta koji određuju koordinatne osi i tangenta na kružnicu $x^2 + y^2 = 4$ s diralištem $T\left(\sqrt{3}, 1\right)$?

Rezultat: $\dfrac{8\cdot\sqrt{3}}{3}.$

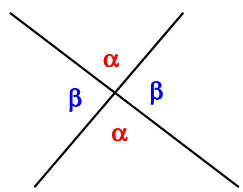
Zadatak 118 (Zoran, Luka, Jan, maturanti gimnazije)

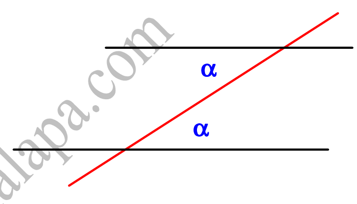
Pod kojim se kutom iz ortocentra (presjek visina) vidi stranica $\overline{AC}$, ako je kut $\beta = 40°$?

Rješenje 118

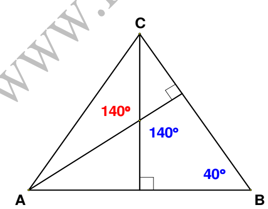
Ponovimo!

Zbroj kutova u trokutu je 180°. Zbroj kutova u četverokutu je 360°.



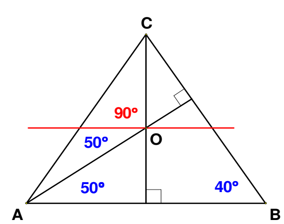


1.inačica



Traženi kut je 140°.

2.inačica (Jan Toth, maturant gimnazije)



Traženi kut AOC je 50° + 90° = 140°.

Vježba 118

Pod kojim se kutom iz ortocentra (presjek visina) vidi stranica $\overline{AC}$, ako je kut $\beta = 50°$?

Rezultat: 130°.

Zadatak 119 (Zoran, Luka, Jan, maturanti gimnazije)

Za duljine stranica a, b, c i poluopseg s trokuta vrijedi 4 · s · (s – a) = 3 · b · c. Nađite kut α.

Rješenje 119

Ponovimo!

Poučak o kosinusima:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\quad,\quad \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\quad,\quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}.$$

Poluopseg trokuta:

$$s=\frac{a+b+c}{2}\ ,\ a,\ b,\ c \text{ duljine stranica trokuta.}$$

$$(x-y)\cdot(x+y)=x^2-y^2.$$

Računamo kut α:

$$4\cdot s\cdot(s-a)=3\cdot b\cdot c\ \Rightarrow\ 4\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)=3\cdot b\cdot c\ \Rightarrow\ 2\cdot(a+b+c)\cdot\frac{a+b+c-2\cdot a}{2}=3\cdot b\cdot c\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (a+b+c)\cdot(b+c-a)=3\cdot b\cdot c\ \Rightarrow\ (b+c+a)\cdot(b+c-a)=3\cdot b\cdot c\ \Rightarrow\ (b+c)^2-a^2=3\cdot b\cdot c\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b^2+2\cdot b\cdot c+c^2-a^2=3\cdot b\cdot c\ \Rightarrow\ b^2+c^2-a^2=3\cdot b\cdot c-2\cdot b\cdot c\ \Rightarrow\ b^2+c^2-a^2=b\cdot c\ /\cdot\frac{1}{2\cdot b\cdot c}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ \alpha=60^0.$$

Vježba 119

Za duljine stranica a, b, c i poluopseg s trokuta vrijedi 4 · s · (s – a) = 2 · b · c. Nađite kut α.

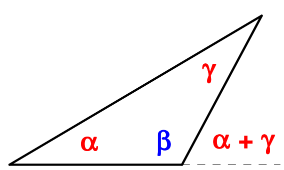
Rezultat: 90°.

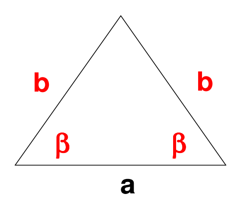
Zadatak 120 (Zoran, Luka, Jan, maturanti gimnazije)

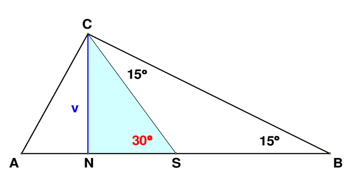
U pravokutnom trokutu udaljenost središta S opisane kružnice od nožišta N visine na hipotenuzu iznosi 6. Ako je kut β = 15°, kolika je površina trokuta?

Rješenje 120

Ponovimo!







Sa slike vidi se:

$$|AB|=c\quad,\quad |SB|=|SC|=\frac{1}{2}\cdot c\quad,\quad |NS|=6$$

$$\angle NSC=30^0\quad,\quad |CN|=v.$$

Uočimo pravokutan trokut NSC i pomoću funkcija tangens i kosinus izračunamo duljinu visine v i hipotenuze c:

$$tg\,30^0=\frac{|CN|}{|NS|}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{v}{6}\ /\cdot 6\ \Rightarrow\ v=2\cdot\sqrt{3}.$$

$$\cos 30^0 = \frac{|NS|}{|CS|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{\frac{c}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{c} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot c = 24 \Rightarrow c = \frac{24}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{24 \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow c = 8 \cdot \sqrt{3}.$$

Površina trokuta iznosi:

$$P = \frac{c \cdot v}{2} \Rightarrow P = \frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow P = 8 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow P = 8 \cdot 3 \Rightarrow P = 24.$$

Vježba 120

U pravokutnom trokutu udaljenost središta S opisane kružnice od nožišta visine na hipotenuzu iznosi 3 Ako je kut β = 15°, kolika je površina trokuta?

Rezultat: 6.