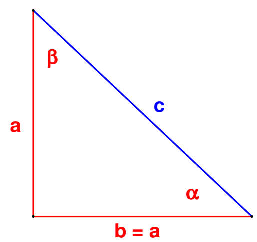
Zadatak 061 (Vedrana, gimnazija)

Ako u pravokutnom trokutu vrijedi a + b + c = 15, β = 45º, koliko je $\frac{a}{b} \cdot c$?

Rješenje 061



Sa slike se vidi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=90^{0} \\ \beta=45^{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=90^{0}-\beta=45^{0}.$$

Trokut je jednakokračan i pravokutan pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}a=b \\ c=a \cdot \sqrt{2}\end{array}\right\} \Rightarrow a=b=\frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}a+b+c=15 \\ a=b=c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2 \cdot a+c=15 \\ a=c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}+c=15 \Rightarrow c \cdot \sqrt{2}+c=15 \Rightarrow c \cdot(\sqrt{2}+1)=15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\frac{15}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow c=\frac{15 \cdot(\sqrt{2}-1)}{2-1}=15 \cdot(\sqrt{2}-1).$$

Zato je:

$$\frac{a}{b} \cdot c=\frac{a}{a} \cdot c=c=15 \cdot(\sqrt{2}-1).$$

Vježba 061

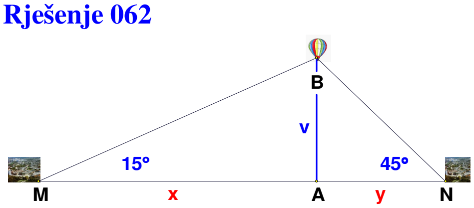
Ako u pravokutnom trokutu vrijedi a + b + c = 15, β = 45º, koliko je $\frac{a}{15} \cdot c$?

Rezultat: $\sqrt{2}-1.$

Zadatak 062 (Vedrana, gimnazija)

Meteorološki balon se nalazi iznad jezera na visini 500 m. Iz dvaju mjesta M i N na suprotnim stranama jezera vidi se pod kutovima 15º, odnosno 45º. Koliko su udaljena mjesta M i N?

Rješenje 062



Trokut ANB je pravokutan i jednakokračan pa vrijedi:

y = v.

Iz pravokutnog trokuta MAB slijedi:

$$ctg\, 15^{0}=\frac{x}{v} \Rightarrow x=v \cdot ctg\, 15^{0}.$$

Udaljenost mjesta M i N iznosi:

$$|MN|=x+y=v \cdot ctg\, 15^{0}+v=v \cdot\left(ctg\, 15^{0}+1\right)=500\ m \cdot\left(ctg\, 15^{0}+1\right)=2366\ m.$$

Vježba 062

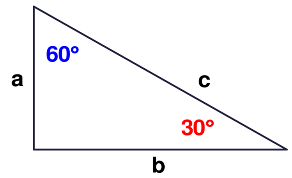
Meteorološki balon se nalazi iznad jezera na visini 400 m. Iz dvaju mjesta M i N na suprotnim stranama jezera vidi se pod kutovima 15º, odnosno 45º. Koliko su udaljena mjesta M i N?

Rezultat: 1893 m.

Zadatak 063 (Gregor, gimnazija)

Jedan kut pravokutnog trokuta iznosi 30º. Koliki je omjer duljina polumjera upisane i opisane kružnice u tom trokutu?

Rješenje 063



Sa slike se vidi:

$$\sin 30^0=\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{1}{2},$$

$$\sin 60^0=\frac{b}{c}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Za svaki pravokutan trokut vrijedi da je:

- polumjer upisane kružnice $r=\frac{a+b-c}{2}$
- polumjer opisane kružnice $R=\frac{c}{2}$.

Omjer duljina polumjera upisane i opisane kružnice iznosi:

$$\frac{r}{R}=\frac{\frac{a+b-c}{2}}{\frac{c}{2}}\Rightarrow\frac{r}{R}=\frac{a+b-c}{c}\Rightarrow\frac{r}{R}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-\frac{c}{c}\Rightarrow\frac{r}{R}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\Rightarrow\frac{r}{R}=\sin 30^0+\sin 60^0-1=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{1+\sqrt{3}-2}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=0.366.$$

Vježba 063

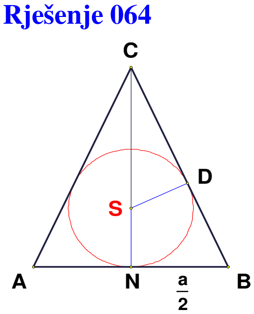
Jedan kut pravokutnog trokuta iznosi 60º. Koliki je omjer duljina polumjera upisane i opisane kružnice u tom trokutu?

Rezultat: $\frac{\sqrt{3}-1}{2}=0.366.$

Zadatak 064 (Gregor, gimnazija)

Središte jednakokračnom trokutu upisane kružnice dijeli visinu u omjeru 12 : 5. Ako je duljina kraka 60 cm, kolika je duljina osnovice (baze)?

Rješenje 064



Sa slike se vidi:

$$|AC|=|BC|=60\ ,\ |SN|=|SD|\ ,\ |AB|=a\ ,\ |NB|=\frac{a}{2}$$

Središte jednakokračnom trokutu upisane kružnice dijeli visinu $\overline{CN}$ u omjeru 12 : 5 pa slijedi:

$$|CS|:|SN|=12:5.$$

Budući da su pravokutni trokuti ΔSDC i ΔNBC slični, vrijedi razmjer:

$$|CS|:|SD|=|BC|:|NB|\Rightarrow\left[\,|SD|=|SN|\,\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|CS|:|SN|=|BC|:|NB|\Rightarrow 12:5=60:\frac{a}{2}\Rightarrow 12\cdot\frac{a}{2}=5\cdot 60\Rightarrow 6\cdot a=300\ /:6\Rightarrow a=50\ cm.$$

Vježba 064

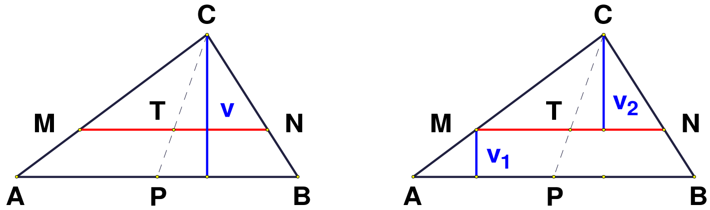
Središte jednakokračnom trokutu upisane kružnice dijeli visinu u omjeru 12 : 5. Ako je duljina kraka 90 cm, kolika je duljina osnovice (baze)?

Rezultat: 75.

Zadatak 065 (Gregor, gimnazija)

Težištem trokuta ABC povučen je pravac usporedan (paralelan) sa stranicom AB, koji stranicu AC siječe u točki M, a stranicu BC u točki N. Koliki je omjer površina trokuta MNC i trapeza ABNM?

Rješenje 065



Težišnica spaja vrh trokuta s polovištem suprotne stranice. Težište je točka u kojoj se sijeku težišnice. Težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha. Zbog svojstva težišta vrijedi:

$$v_1 = \frac{1}{3} \cdot v \quad , \quad v_2 = \frac{2}{3} \cdot v.$$

Površina trokuta MNC iznosi:

$$P_{MNC} = \frac{|MN| \cdot v_2}{2} \Rightarrow P_{MNC} = \frac{|MN| \cdot \frac{2}{3} \cdot v}{2} \Rightarrow P_{MNC} = \frac{|MN| \cdot v}{3}.$$

Trokuti ΔABC i ΔMNC su slični pa je valjan razmjer:

$$|AB| : |MN| = v : v_2 \Rightarrow |AB| \cdot v_2 = |MN| \cdot v \Rightarrow |AB| \cdot \frac{2}{3} \cdot v = |MN| \cdot v \;/ \cdot \frac{3}{2 \cdot v} \Rightarrow |AB| = \frac{3}{2} \cdot |MN|.$$

Površina trapeza ABNM je:

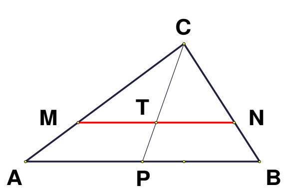
$$P_{ABNM} = \frac{\left(|AB| + |MN|\right) \cdot v_1}{2} \Rightarrow P_{ABNM} = \frac{\left(\frac{3}{2} \cdot |MN| + |MN|\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot v}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABNM} = \frac{\frac{5}{2} \cdot |MN| \cdot \frac{1}{3} \cdot v}{2} \Rightarrow P_{ABNM} = \frac{5 \cdot |MN| \cdot v}{12}.$$

Omjer ploština trokuta MNC i trapeza ABNM iznosi:

$$\frac{P_{MNC}}{P_{ABNM}} = \frac{\frac{|MN| \cdot v}{3}}{\frac{5 \cdot |MN| \cdot v}{12}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow P_{MNC} : P_{ABNM} = 4 : 5.$$

2.inačica



Težišnica spaja vrh trokuta s polovištem suprotne stranice. Težište je točka u kojoj se sijeku težišnice. Težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha. Sa slike se vidi:

$$|CP| = t \quad , \quad |CT| = \frac{2}{3} \cdot t \quad , \quad |TP| = \frac{1}{3} \cdot t$$

Ponovimo!

Dva su trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Za površine sličnih trokuta vrijedi:

$$\frac{P}{P_1} = k^2.$$

Budući da su trokuti ΔMNC i ΔABC slični, za njihove površine vrijedi razmjer:

$$\frac{P_{MNC}}{P_{ABC}} = \frac{\left(|CT|\right)^2}{\left(|CP|\right)^2} \Rightarrow \frac{P_{MNC}}{P_{ABC}} = \left(\frac{|CT|}{|CP|}\right)^2 \Rightarrow \frac{P_{MNC}}{P_{ABC}} = \left(\frac{\frac{2}{3}\cdot t}{t}\right)^2 \Rightarrow \frac{P_{MNC}}{P_{ABC}} = \frac{4}{9}.$$

Omjer ploština trokuta MNC i trapeza ABNM iznosi:

$$\frac{P_{MNC}}{P_{ABNM}} = \frac{P_{MNC}}{P_{ABC} - P_{MNC}} = \frac{\frac{P_{MNC}}{P_{ABC}}}{\frac{P_{ABC}}{P_{ABC}} - \frac{P_{MNC}}{P_{ABC}}} = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5} \Rightarrow P_{MNC} : P_{ABNM} = 4:5.$$

Vježba 065

Težištem trokuta ABC povučen je pravac usporedan sa stranicom AB, koji stranicu AC siječe u točki M, a stranicu BC u točki N. Koliki je omjer površina trapeza ABNM i trokuta MNC?

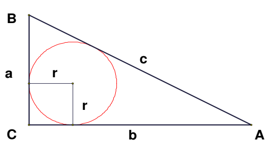
Rezultat: 5 : 4.

Zadatak 066 (Mira, gimnazija)

U pravokutnom trokutu s katetama a = 5, b = 12 nađi polumjer upisane kružnice.

Rješenje 066

1.inačica



Pomoću Pitagorina poučka dobije se hipotenuza c:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} =$$
$$= \sqrt{169} = 13.$$

Uporabit ćemo formulu za polumjer r upisane kružnice pravokutnom trokutu:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{5 + 12 - 13}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

2.inačica

Pomoću dviju formula za površinu pravokutnog trokuta izračuna se polumjer r upisane kružnice:

$$\left.\begin{array}{l} P_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} \\ P_{ABC} = \frac{O \cdot r}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{O \cdot r}{2} = \frac{a \cdot b}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow O \cdot r = a \cdot b \Rightarrow r = \frac{a \cdot b}{O} \Rightarrow r = \frac{a \cdot b}{a + b + c} = \frac{5 \cdot 12}{5 + 12 + 13} = \frac{60}{30} = 2.$$

Vježba 066

U pravokutnom trokutu s katetama a = 6, b = 8 nađi polumjer upisane kružnice.

Rezultat: 2.

Zadatak 067 (Vedrana, gimnazija)

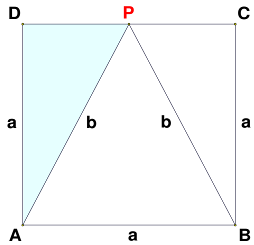
U kvadratu ABCD vrhovi A i B spojeni su s polovištem P stranice CD. Na taj smo način dobili jednakokračan trokut ABP. U kojem omjeru stoje polumjeri opisanog i upisanog kruga trokuta ABP?

Rješenje 067

Iz pravokutnog trokuta APD uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow b^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 \Rightarrow b^2 = \frac{5 \cdot a^2}{4} \;/\sqrt{} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{5 \cdot a^2}{4}} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2}.$$

Površina trokuta ABP iznosi: $P_{ABP} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{1}{2} \cdot a^2.$



Ponovimo!
Polumjer opisane kružnice trokutu je

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot P},$$

a polumjer upisane kružnice trokutu iznosi

$$r = \frac{P}{s},$$

gdje je P površina trokuta, s poluopseg trokuta: $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Gledamo omjer polumjera opisanog i upisanog kruga jednakokračnom trokutu ABP:

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{a \cdot b^2}{4 \cdot P_{ABP}}}{\frac{P_{ABP}}{s}} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{a \cdot b^2 \cdot s}{4 \cdot P_{ABP}^2} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{a \cdot b^2 \cdot \frac{a+2 \cdot b}{2}}{4 \cdot P_{ABP}^2} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{a \cdot b^2 \cdot (a + 2 \cdot b)}{8 \cdot P_{ABP}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{a \cdot \left(\frac{a \cdot \sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \left(a + 2 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2}\right)}{8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a^2\right)^2} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{a \cdot \frac{5 \cdot a^2}{4} \cdot \left(a + a \cdot \sqrt{5}\right)}{8 \cdot \frac{1}{4} \cdot a^4} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{5 \cdot a^3 \cdot \left(a + a \cdot \sqrt{5}\right)}{8 \cdot a^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{5 \cdot a^4 \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)}{8 \cdot a^4} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{5 \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right)}{8}.$$

Vježba 067

U kvadratu ABCD vrhovi A i B spojeni su s polovištem P stranice CD. Na taj smo način dobili jednakokračan trokut ABP. U kojem omjeru stoje polumjeri upisanog i opisanog kruga trokuta ABP?

Rezultat: $\frac{r}{R} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)}{5}.$

Zadatak 068 (Vedrana, gimnazija)

Omjer kateta u pravokutnom trokutu je 5 : 12. Kolika je veća kateta, ako je polumjer trokutu upisane kružnice jednak 3?

Rješenje 068

$$a : b = 5 : 12 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 5 \cdot t \\ b = 12 \cdot t \end{array}\right\}.$$

Uporabom Pitagorina poučka za hipotenuzu c vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = (5 \cdot t)^2 + (12 \cdot t)^2 \Rightarrow c^2 = 25 \cdot t^2 + 144 \cdot t^2 \Rightarrow c^2 = 169 \cdot t^2 \; / \sqrt{} \Rightarrow c = 13 \cdot t.$$

Pomoću formula za površinu trokuta dobije se traženo rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{a \cdot b}{2} \\ P = r \cdot s \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{2} = r \cdot s \Rightarrow \frac{a \cdot b}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} \; / \cdot 2 \Rightarrow a \cdot b = r \cdot (a + b + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot t \cdot 12 \cdot t = 3 \cdot (5 \cdot t + 12 \cdot t + 13 \cdot t) \Rightarrow 60 \cdot t^2 = 3 \cdot 30 \cdot t \; /:30 \Rightarrow 2 \cdot t^2 - 3 \cdot t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\cdot(2\cdot t-3)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=0 \ (\text{nema smisla}) \\ 2\cdot t-3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t_2=\frac{3}{2}.$$

Veća kateta iznosi:

$$b=12\cdot t=12\cdot\frac{3}{2}=18.$$

Vježba 068

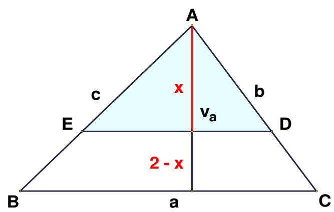
Omjer kateta u pravokutnom trokutu je 5 : 12. Kolika je manja kateta, ako je polumjer trokutu upisane kružnice jednak 3?

Rezultat: a = 7.5.

Zadatak 069 (Vedrana, gimnazija)

Visina trokuta na stranicu a iznosi v_a = 2. Na kojoj udaljenosti od stranice a treba povući pravac paralelan sa stranicom a tako da trokut bude podijeljen na dva dijela jednakih površina?

Rješenje 069



Neka pravac paralelan s bazom siječe stranice b i c u točkama D i E.

Ponovimo!

Ako su dva trokuta ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ slični, tada za njihove pripadne visine i površine vrijedi:

$$\frac{v}{v_1}=k \Rightarrow \frac{P}{P_1}=k^2.$$

Budući da su trokuti ΔBCA i ΔEDA slični, valjan je omjer:

$$\frac{P_{BCA}}{P_{EDA}}=2 \Rightarrow k^2=2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow k=\sqrt{2}.$$

Za duljine pripadnih visina je:

$$\frac{v_a}{x}=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{x}=\sqrt{2} \Rightarrow x\cdot\sqrt{2}=2 \;/:\sqrt{2} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Udaljenost od stranice a iznosi: $2-x=2-\sqrt{2}.$

Vježba 069

Visina trokuta na stranicu a iznosi v_a = 4. Na kojoj udaljenosti od stranice a treba povući pravac paralelan sa stranicom a tako da trokut bude podijeljen na dva dijela jednakih površina?

Rezultat: $4-2\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 070 (Vedrana, gimnazija)

Ako je omjer duljina stranica u trokutu 2 : 5 : 4, koliki je omjer duljina pripadnih visina?

Rješenje 070

Ponovimo!

$$\text{razmjer} \quad a:b=c:d \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c \quad , \quad \begin{matrix}\text{produženi} \\ \text{omjer}\end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} a:b=\alpha:\beta \\ b:c=\beta:\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow a:b:c=\alpha:\beta\,\gamma$$

1.inačica

Iz formula za površinu trokuta dobiju se razmjeri između duljina stranica i duljina pripadnih visina:

- $$\left.\begin{matrix} P=\dfrac{a\cdot v_a}{2} \\ P=\dfrac{b\cdot v_b}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2} \;/\cdot\frac{2}{a\cdot b} \Rightarrow \frac{v_a}{b}=\frac{v_b}{a} \Rightarrow \frac{1}{a}:\frac{1}{b}=v_a:v_b.$$

- $$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{b\cdot v_b}{2} \\ P=\dfrac{c\cdot v_c}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2} \;/\cdot\frac{2}{b\cdot c} \Rightarrow \frac{v_b}{c}=\frac{v_c}{b} \Rightarrow \frac{1}{b}:\frac{1}{c}=v_b:v_c.$$

Produženi omjer glasi:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}=v_a:v_b \\ \dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}=v_b:v_c\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=v_a:v_b:v_c.$$

Ako je

$$a:b:c=2:5:4,$$

onda je

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=\frac{1}{2}:\frac{1}{5}:\frac{1}{4} \Rightarrow v_a:v_b:v_c=\frac{1}{2}:\frac{1}{5}:\frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{proširimo članove} \\ \text{brojem 20}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_a:v_b:v_c=\left(\frac{1}{2}\cdot 20\right):\left(\frac{1}{5}\cdot 20\right):\left(\frac{1}{4}\cdot 20\right) \Rightarrow v_a:v_b:v_c=10:4:5.$$

2.inačica

Ako je $a:b:c=2:5:4$, onda je $a=2\cdot t,\ b=5\cdot t,\ c=4\cdot t.$

Iz formula za površinu trokuta dobiju se razmjeri između duljina visina i duljina pripadnih stranica:

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{a\cdot v_a}{2} \\ P=\dfrac{b\cdot v_b}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2} \;/\cdot\frac{2}{a\cdot v_b} \Rightarrow v_a:v_b=b:a \Rightarrow v_a:v_b=(5\cdot t):(2\cdot t) \Rightarrow v_a:v_b=5:2,$$

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{b\cdot v_b}{2} \\ P=\dfrac{c\cdot v_c}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2} \;/\cdot\frac{2}{b\cdot v_c} \Rightarrow v_b:v_c=c:b \Rightarrow v_b:v_c=(4\cdot t):(5\cdot t) \Rightarrow v_b:v_c=4:5.$$

Produženi omjer gliznosi:

$$\left.\begin{array}{l} v_a:v_b=5:2 \\ v_b:v_c=4:5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_a:v_b=(5\cdot 2):(2\cdot 2) \\ v_b:v_c=4:5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_a:v_b=10:4 \\ v_b:v_c=4:5\end{array}\right\} \Rightarrow v_a:v_b:v_c=10:4:5.$$

Vježba 070

Ako je omjer duljina visina u trokutu 10 : 4 : 5, koliki je omjer duljina pripadnih stranica?

Rezultat: 2 : 5 : 4.

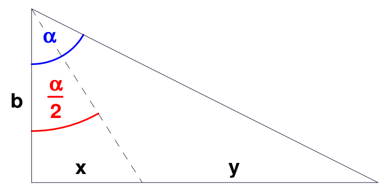
Zadatak 071 (Vedrana, gimnazija)

U pravokutnom trokutu simetrala kuta α dijeli suprotnu katetu na dva segmenta. Nađi omjer duljine većeg od njih prema duljini manjeg.

Rješenje 071

Ponovimo!

$$tg\,\alpha=\frac{2\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}} \quad , \quad \cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1 \quad , \quad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$$



Neka simetrala kuta α dijeli katetu a na x i y, x + y = a. Iz pravokutnih trokuta slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{b} \\ tg\,\alpha=\frac{x+y}{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{b}\ /\cdot b \\ tg\,\alpha=\frac{x+y}{b}\ /\cdot b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2} \\ x+y=b\cdot tg\,\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}+y=b\cdot tg\,\alpha \Rightarrow y=b\cdot tg\,\alpha-b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2} \Rightarrow y=b\cdot\left[tg\,\alpha-tg\,\frac{\alpha}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=b\cdot\left[\frac{2\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}}-tg\,\frac{\alpha}{2}\right] \Rightarrow y=b\cdot\frac{2\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}-tg\,\frac{\alpha}{2}+tg^3\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow y=b\cdot\frac{tg\,\frac{\alpha}{2}+tg^3\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=b\cdot tg\,\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1+tg^2\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow y=x\cdot\frac{1+tg^2\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}}\ /\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1+tg^2\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\,\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1+\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Vježba 071

U pravokutnom trokutu simetrala kuta α dijeli suprotnu katetu na dva segmenta. Nađi omjer duljine manjeg od njih prema duljini većeg.

Rezultat: cos α.

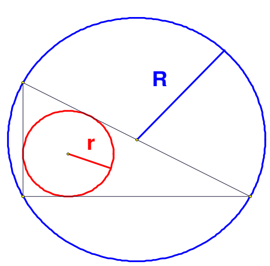
Zadatak 072 (Vedrana, gimnazija)

U svakom pravokutnom trokutu zbroj duljina polumjera upisane i opisane kružnice je aritmetička sredina duljina kateta. Dokažite!

Rješenje 072

Treba dokazati da je:

$$r+R=\frac{a+b}{2}.$$



Iz formula za polumjere upisane i opisane kružnice trokutu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} r=\frac{P}{s} \\ R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot P}\end{array}\right\} \Rightarrow r+R=\frac{P}{s}+\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot P}=\left[\begin{array}{l} s=\frac{a+b+c}{2} \\ P=\frac{a\cdot b}{2}\end{array}\right]=\frac{\frac{a\cdot b}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}+\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot\frac{a\cdot b}{2}}=$$

$$=\frac{a\cdot b}{a+b+c}+\frac{c}{2}=\frac{2\cdot a\cdot b+c\cdot(a+b+c)}{2\cdot(a+b+c)}=\frac{2\cdot a\cdot b+c\cdot(a+b)+c^2}{2\cdot(a+b+c)}=$$

$$=\begin{bmatrix} \text{Pitagorin poučak} \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot a \cdot b + c \cdot (a+b) + a^2 + b^2}{2 \cdot (a+b+c)} = \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + c \cdot (a+b)}{2 \cdot (a+b+c)} =$$

$$= \frac{(a+b)^2 + c \cdot (a+b)}{2 \cdot (a+b+c)} = \frac{(a+b) \cdot (a+b+c)}{2 \cdot (a+b+c)} = \frac{a+b}{2}.$$

Vježba 072

U svakom pravokutnom trokutu zbroj duljina polumjera upisane i opisane kružnice je aritmetička sredina duljina kateta. Provjerite za katete a = 6 cm i b = 8 cm.

Rezultat: 7 = 7.

Zadatak 073 (Vedrana, gimnazija)

Duljina hipotenuze c i duljina katete a pravokutnog trokuta su dva uzastopna prirodna broja. Nađi koliko iznosi kvadrat duljine katete b.

Rješenje 073

$$\left.\begin{aligned} a &= n \\ c &= n+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = (n+1)^2 - n^2 \Rightarrow b^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 \Rightarrow b^2 = 2 \cdot n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = n + (n+1) \Rightarrow b^2 = a + c.$$

Vježba 073

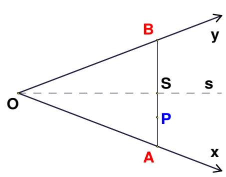
Duljina hipotenuze c i duljina katete a pravokutnog trokuta su dva uzastopna neparna broja. Nađi koliko iznosi kvadrat duljine katete b.

Rezultat: 2 · (a + c).

Zadatak 074 (Ivan, strojarska škola)

U unutrašnjosti kuta xOy odaberi po volji točku P. Točkom P povuci pravac koji će presjeći krakove u točkama A i B tako da je | OA | = | OB |.

Rješenje 074



1. Konstruiramo simetralu s kuta xOy.
2. Iz točke P povučemo okomicu na simetralu s.
3. Pravac ove okomice siječe krakove kuta u točkama A i B.
4. Trokuti ΔOAS i ΔOSB sukladni su pa slijedi jednakost:

| OA | = | OB |.

Vježba 074

Izvan kuta xOy uz jedan krak odaberi po volji točku P. Točkom P povuci pravac koji će presjeći krakove u točkama A i B tako da je | OA | = | OB |.

Rezultat: Radimo analogno.

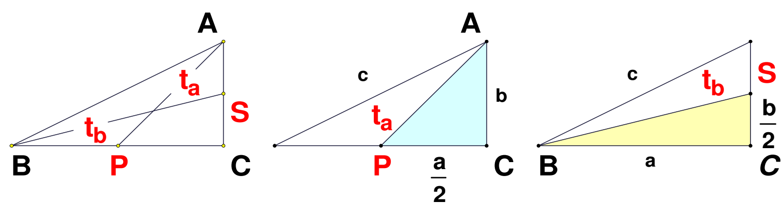
Zadatak 075 (Mario, elektrotehnička škola)

Duljine težišnica povučenih iz vrhova šiljastih kutova pravokutnog trokuta iznose 7 cm i 4 cm. Nađite duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta.

Rješenje 075

Ponovimo!

Težišnica je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem suprotne stranice.



Uočimo da svaka težišnica dijeli trokut ABC na dva trokuta od kojih je jedan pravokutni. Za pravokutni trokut APC Pitagorin poučak glasi:

$$t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \Rightarrow t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2.$$

Za pravokutni trokut BCS Pitagorin poučak glasi:

$$t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow t_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 \\ t_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow t_a^2 + t_b^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 + b^2 + \frac{b^2}{4} \Rightarrow t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}\cdot a^2 + \frac{5}{4}\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}\cdot\left(a^2 + b^2\right) \Rightarrow \left[c^2 = a^2 + b^2\right] \Rightarrow t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}\cdot c^2 \;/\cdot\frac{4}{5} \Rightarrow c^2 = \frac{4}{5}\cdot\left(t_a^2 + t_b^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{4}{5}\cdot\left(t_a^2 + t_b^2\right) \;/\sqrt{} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{4}{5}\cdot\left(t_a^2 + t_b^2\right)} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{4}{5}\cdot\left(7^2 + 4^2\right)} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{4}{5}\cdot 65} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{52} \Rightarrow c = \sqrt{4\cdot 13} \Rightarrow c = 2\cdot\sqrt{13}\ cm.$$

Vježba 075

Duljine težišnica povučenih iz vrhova šiljastih kutova pravokutnog trokuta iznose 4 cm i 3 cm. Nađite duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta.

Rezultat: $2\cdot\sqrt{5}\ cm.$

Zadatak 076 (Mira, gimnazija)

Stranica trokuta iznosi $a = 4\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}$ cm, a kutovi su mu jednaki β = 30° i γ = 45°. Nađite površinu trokuta.

Rješenje 076

Ponovimo!

Zbroj kutova u trokutu: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, sinusov poučak: $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$,

površina trokuta: $P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$, sinus zbroja: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta.$

Najprije izračunamo kut α:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \Rightarrow \alpha = 180^0 - (\beta+\gamma) \Rightarrow \alpha = 180^0 - \left(30^0 + 45^0\right) \Rightarrow \alpha = 105^0.$$

Površina trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a : b = \sin\alpha : \sin\beta \\ P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha \\ P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha} \\ P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma \Rightarrow P = \frac{1}{2}\cdot\left(4\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{\sin 30^0}{\sin 105^0}\cdot\sin 45^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\sin\left(60^0+45^0\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P=8\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sin 60^0\cdot\cos 45^0+\cos 60^0\cdot\sin 45^0}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\ \Rightarrow\ P=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}\ \Rightarrow\ P=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ P=8\ cm^2.$$

Vježba 076

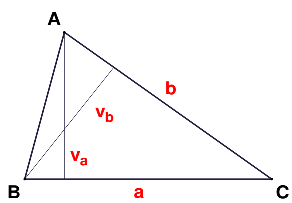
Stranica trokuta iznosi $a=2\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}$ cm, a kutovi su mu jednaki β = 30° i γ = 45°. Nađite površinu trokuta.

Rezultat: 2 cm^2.

Zadatak 077 (Petra, gimnazija)

Zbroj duljina dviju stranica trokuta iznosi 15 cm, a duljine visina na te stranice iznose 4 cm, odnosno 6 cm. Kolika je površina trokuta?

Rješenje 077



Pretpostavimo da je:

$a + b = 15,\ v_a = 4,\ v_b = 6.$

Za površinu trokuta ABC vrijedi:

$$P_{ABC}=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}.$$

Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=15 \\ \frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a+b=15 \\ \frac{a\cdot 4}{2}=\frac{b\cdot 6}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a+b=15 \\ 2\cdot a=3\cdot b\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} b=15-a \\ 2\cdot a=3\cdot b\end{array}\right\}\Rightarrow\ 2\cdot a=3\cdot\left(15-a\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a=45-3\cdot a\ \Rightarrow\ 2\cdot a+3\cdot a=45\ \Rightarrow\ 5\cdot a=45\ /:5\ \Rightarrow\ a=9\ cm.$$

Površina trokuta ABC iznosi:

$$P_{ABC}=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{9\ cm\cdot 4\ cm}{2}=18\ cm^2.$$

Vježba 077

Zbroj duljina dviju stranica trokuta iznosi 30 cm, a duljine visina na te stranice iznose 8 cm, odnosno 12 cm. Kolika je površina trokuta?

Rezultat: 72 cm^2.

Zadatak 078 (Petra, gimnazija)

U pravokutnom trokutu je zbroj duljina kateta 11, a duljina hipotenuze 7. Površina trokuta je:

A. 15 B. ne postoji C. 21 D. 25 E. 20

Rješenje 078

Ponovimo!

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad P=\frac{a\cdot b}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=11 \\ c=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Pitagorin} \\ \text{poučak} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=11 \\ a^2+b^2=c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=11 \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=11-a \\ a^2+b^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+(11-a)^2=49 \Rightarrow a^2+121-22\cdot a+a^2=49 \Rightarrow 2\cdot a^2-22\cdot a+121-49=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2-22\cdot a+72=0 \;/:2 \Rightarrow a^2-11\cdot a+36=0.$$

Računamo diskriminantu kvadratne jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} a^2-11\cdot a+36=0 \\ a=1,\ b=-11,\ c=36 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[D=b^2-4\cdot a\cdot c\right] \Rightarrow (-11)^2-4\cdot 1\cdot 36=121-144=-23<0.$$

Budući da je diskriminanta kvadratne jednadžbe negativan broj, ne proizlaze realne vrijednosti za a odnosno b. Odgovor je pod B.

⚠ Zanemarimo li kompleksnost rješenja (duljine kateta su konjugirano kompleksni brojevi) površina pravokutnog trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=11 \\ c=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=11 \;/^2 \\ c=7 \;/^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=121 \\ c^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Pitagorin poučak} \\ a^2+b^2=c^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c^2+2\cdot a\cdot b=121 \\ c^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow 49+2\cdot a\cdot b=121 \Rightarrow 2\cdot a\cdot b=121-49 \Rightarrow 2\cdot a\cdot b=72 \;/:4 \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2}=18 \Rightarrow P=18.$$

Ovaj rezultat neki fakulteti nude na prijamnim ispitima.

Vježba 078

U pravokutnom trokutu je zbroj duljina kateta 7, a duljina hipotenuze 6. Površina trokuta je:

A. 6 B. ne postoji C. 12 D. 10 E. 15

Rezultat: Odgovor je pod A.

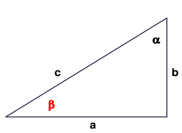
Zadatak 079 (Deny, gimnazija)

Dokažite da u svakom pravokutnom trokutu vrijedi relacija: $tg\,2\beta=\dfrac{2\cdot a\cdot b}{a^2-b^2}$.

Rješenje 079

Ponovimo!

$$\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x \quad , \quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$



Sa slike vidi se:

$$\sin\beta=\frac{b}{c} \Rightarrow b=c\cdot\sin\beta \quad , \quad \cos\beta=\frac{a}{c} \Rightarrow a=c\cdot\cos\beta.$$

Slijedi dokaz:

$$\frac{2\cdot a\cdot b}{a^2-b^2}=\frac{2\cdot c\cdot\cos\beta\cdot c\cdot\sin\beta}{(c\cdot\cos\beta)^2-(c\cdot\sin\beta)^2}=\frac{2\cdot c^2\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta}{c^2\cdot\cos^2\beta-c^2\cdot\sin^2\beta}=\frac{2\cdot c^2\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta}{c^2\cdot\left[\cos^2\beta-\sin^2\beta\right]}=$$

$$=\frac{2\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta}{\cos^2\beta-\sin^2\beta}=\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=tg\,2\beta.$$

Vježba 079

U trokutu je najveći kut jednak zbroju preostalih dvaju kutova, a najveća stranica dvostruko je veća od najmanje. Koliki je najmanji kut?

Rezultat: Budući da je najveća stranica dvostruko veća od najmanje, zaključujemo da se radi o pravokutnom trokutu, gdje je:

$$\alpha+\beta=\gamma \quad , \quad c=2\cdot a \quad , \quad \sin\alpha=\frac{a}{c} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{a}{2\cdot a} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=30^0.$$

Zadatak 080 (Ivan, gimnazija)

Dvije stranice u trokutu iznose 5 i 6 cm, a površina 12 cm^2. Koliko iznosi duljina treće stranice?

Rješenje 080

Ponovimo!

Površina trokuta: $P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$, trigonometrijski identitet: $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

kosinusov poučak: $a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$.

Pretpostavimo da je b = 5 cm, c = 6 cm i P = 12 cm^2.
Tada je:

$$P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{2\cdot P}{b\cdot c} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{2\cdot 12}{5\cdot 6} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{2\cdot 2}{5\cdot 1} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{4}{5}.$$

Pomoću trigonometrijskog identiteta izračunamo cos α:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{5}.$$

Uporabom kosinusovog poučka dobije se duljina stranice a:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow a^2=5^2+6^2-2\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow a^2=25+36-36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a^2=25 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow a=5\ cm.$$

Vježba 080

Dvije stranice u trokutu iznose 5 i 6 cm, a površina 12 cm^2. Koliko iznosi opseg trokuta?

Rezultat: 16 cm.