Zadatak 041 (Martin, gimnazija)

Oko kružnice polumjera r = 12 cm opisan je trokut kojemu je omjer duljina stranica jednak a : b : c = 4 : 13 : 15. Koliki je polumjer R tom trokutu opisane kružnice?

Rješenje 041

Za omjer duljina stranica trokuta vrijedi:

$$a:b:c=4:13:15 \Rightarrow \begin{cases} a=4t \\ b=13t \\ c=15t \end{cases} \Rightarrow [\text{poluopseg}] \Rightarrow s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{4t+13t+15t}{2}=\frac{32t}{2}=16t,\ t>0.$$

Površinu trokuta napisat ćemo na dva različita načina i usporedbom dobivenih rezultata doći do traženog zaključka:

- $P=r\cdot s \Rightarrow P=12\cdot 16\cdot t=192\cdot t$,
- $P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \Rightarrow P=\sqrt{16t\cdot(16t-4t)\cdot(16t-13t)\cdot(16t-15t)}=$
  $=\sqrt{16t\cdot 12t\cdot 3t\cdot t}=\sqrt{576t^4}=24\cdot t^2.$

Usporedba dobivenih rezultata daje:

$$192\cdot t=24\cdot t^2\ /:24t \Rightarrow t=8 \Rightarrow \begin{cases} a=4\cdot 8=32\ cm \\ b=13\cdot 8=104\ cm. \\ c=15\cdot 8=120\ cm \end{cases}$$

Površina trokuta je:

$$P=192\cdot t=192\cdot 8=1536\ cm^2.$$

Uvrstimo li ove vrijednosti u formulu za polumjer, dobije se:

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot P}=\frac{32\cdot 104\cdot 120}{4\cdot 1536}=65\ cm.$$

Vježba 041

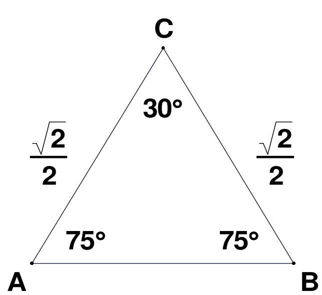
Duljine stranica trokuta zadovoljavaju jednakost a – b = b – c. Dokažite da je polumjer r tom trokutu upisane kružnice jednak jednoj trećini visine v_b.

Rezultat:

$$a-b=b-c \Rightarrow a+c=2b \Rightarrow \left\{\begin{matrix} P=r\cdot\frac{a+b+c}{2} \\ P=\frac{b\cdot v_b}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} P=r\cdot\frac{3b}{2} \\ P=\frac{b\cdot v_b}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r\cdot\frac{3b}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}\ /\cdot\frac{2}{3b} \Rightarrow r=\frac{1}{3}\cdot v_b.$$

Zadatak 042 (Blizanci, gimnazija)

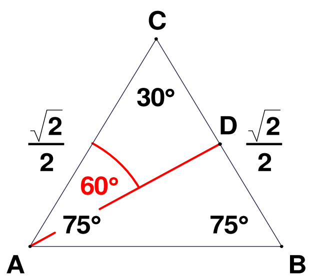
Zadan je jednakokračan trokut kao na slici. Odredite duljinu osnovice (baze) | AB |.



$$|AC|=|BC|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rješenje 042

Iz vrha A konstruiramo visinu na krak $\overline{BC}$ i njezino nožište označimo slovom D.



U pravokutnom trokutu ADC kutovi su: 30º, 60º i 90º pa vrijedi da je duljina veće katete jednaka polovici duljine hipotenuze:

$$|AD| = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Na trokutu ADC uporabimo Pitagorin poučak i izračunamo duljinu katete $|CD|$:

$$|CD|^2 = |AC|^2 - |AD|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2}{4} - \frac{2}{16} = \frac{3}{8} \Rightarrow |CD| = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Iz jednakosti $|BC| = |BD| + |DC|$ slijedi:

$$|BD| = |BC| - |DC| = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Konačno iz pravokutnog trokuta ABD pomoću Pitagorina poučka dobijemo traženu duljinu osnovice $|AB|$:

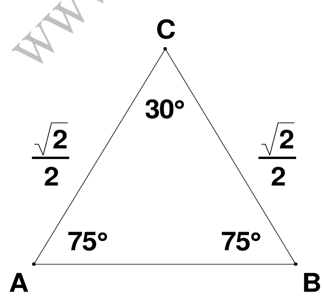
$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{2}{16} + \frac{8 - 4\sqrt{12} + 6}{16} = \frac{2 + 8 - 8\sqrt{3} + 6}{16} = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{16} =$$

$$= \frac{4 \cdot \left(4 - 2\sqrt{3}\right)}{16} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow |AB| = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \left[4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2\right] = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Vježba 042

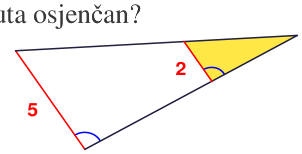
Zadan je jednakokračan trokut kao na slici. Odredite opseg trokuta ABC.



Rezultat: $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$

Zadatak 043 (1A, hotelijerska škola)

Koliki je postotak površine trokuta osjenčan?



Rješenje 043

1.inačica

Budući da su trokuti slični (imaju jednake kutove), odgovarajuće (homologne) stranice i visine su proporcionalne:

$$\left.\begin{matrix} a_1 : a_2 = 5:2 \\ v_1 : v_2 = 5:2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot a_1 = 5\cdot a_2 \quad /:2 \\ 2\cdot v_1 = 5\cdot v_2 \quad /:2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a_1 = 2.5\cdot a_2 \\ v_1 = 2.5\cdot v_2. \end{matrix}\right.$$

Površina osjenčanog trokuta, izražena u postotku, u odnosu na veliki trokut iznosi:

$$\frac{P_2}{P_1}\cdot 100\% = \frac{\frac{a_2\cdot v_2}{2}}{\frac{a_1\cdot v_1}{2}}\cdot 100\% = \frac{a_2\cdot v_2}{a_1\cdot v_1}\cdot 100\% = \frac{a_2\cdot v_2}{2.5\cdot a_2\cdot 2.5\cdot v_2}\cdot 100\% = \frac{1}{2.5^2}\cdot 100\% = \frac{1}{6.25}\cdot 100\% = 16\%.$$

2.inačica

Budući da su trokuti slični (imaju jednake kutove), odgovarajuće (homologne) stranice i pripadne površine su proporcionalne:

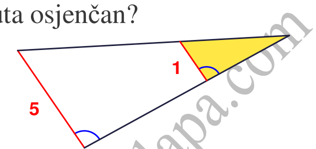
$$\left.\begin{matrix} a_1 : a_2 = k \\ P_1 : P_2 = k^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 : a_2 = 5:2 \\ P_1 : P_2 = 25:4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\cdot P_1 = 25\cdot P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{4}{25}\cdot P_1.$$

Površina osjenčanog trokuta, izražena u postotku, u odnosu na veliki trokut iznosi:

$$\frac{P_2}{P_1}\cdot 100\% = \frac{\frac{4}{25}\cdot P_1}{\frac{P_1}{1}}\cdot 100\% = \frac{4}{25}\cdot 100\% = 16\%.$$

Vježba 043

Koliki je postotak površine trokuta osjenčan?



Rezultat: 4%.

Zadatak 044 (Martin, gimnazija)

U trokutu su zadani: stranica b = 24, visina $v_a = 12\sqrt{3}$ spuštena na stranicu a, te polumjer $R = 7\sqrt{3}$ trokutu opisane kružnice. Kolika je duljina stranice c?

Rješenje 044

Uporabit ćemo dvije formule za površinu trokuta:

$$\left.\begin{matrix} P = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} \\ P = \frac{a\cdot v_a}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R} = \frac{a\cdot v_a}{2} \quad /\cdot\frac{4R}{ab} \Rightarrow c = \frac{a\cdot v_a}{2}\cdot\frac{4\cdot R}{a\cdot b} = \frac{2\cdot R\cdot v_a}{b} = \frac{2\cdot 7\sqrt{3}\cdot 12\sqrt{3}}{24} = 21.$$

Vježba 044

U trokutu su zadani: stranica b = 24, visina $v_a = 12\sqrt{3}$ spuštena na stranicu a, te polumjer $R = 14\sqrt{3}$ trokutu opisane kružnice. Kolika je duljina stranice c?

Rezultat: c = 42.

Zadatak 045 (Iva, gimnazija)

Za duljine stranica a, b, c i poluopseg s trokuta vrijedi 4 · s · (s – a) = 3 · b · c. Nađite kut α.

Rješenje 045

Iz formule za poluopseg trokuta $s = \frac{a+b+c}{2}$ slijedi:

$$4\cdot s\cdot(s-a) = 3\cdot b\cdot c \Rightarrow 4\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2} = 3\cdot b\cdot c \Rightarrow 4\cdot\frac{(b+c)-a^2}{4} = 3\cdot b\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = 3 \cdot b \cdot c \Rightarrow b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2 - a^2 = 3 \cdot b \cdot c \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = b \cdot c \ /:2bc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \right] \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0 = \frac{\pi}{3}.$$

Vježba 045

Za duljine stranica a, b, c i poluopseg s trokuta vrijedi 4 · s · (s – b) = 3 · a · c. Nađite kut β.

Rezultat: $\beta = 60^0 = \frac{\pi}{3}.$

Zadatak 046 (Iva, gimnazija)

U pravokutnom trokutu je p = 2, q = 4. Nađite površinu trokuta.

Rješenje 046

Duljina visine na hipotenuzu c iznosi: $v^2 = p \cdot q \Rightarrow v = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{2 \cdot 4} = 2 \cdot \sqrt{2}.$

Duljina hipotenuze je: c = p + q = 2 + 4 = 6. Za površinu trokuta vrijedi:

$$P = \frac{c \cdot v}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2}.$$

Vježba 046

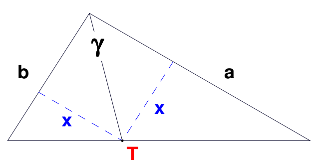
U pravokutnom trokutu je p = 2, q = 8. Nađite površinu trokuta.

Rezultat: 20.

Zadatak 047 (Max, gimnazija)

Točka T hipotenuze pravokutnog trokuta jednako je udaljena od njegovih kateta i dijeli hipotenuzu na dijelove duljine 30 i 40. Kolika je duljina manje katete?

Rješenje 047



Budući da je točka T jednako udaljena od kateta, znači da pripada simetrali pravog kuta γ. Simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije stranice pa je:

$$a : b = 30 : 40 \Rightarrow a : b = 3 : 4 \Rightarrow b = \frac{4}{3} \cdot a.$$

Pomoću Pitagorina poučka dobije se duljina hipotenuze c:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + \left(\frac{4}{3} \cdot a\right)^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + \frac{14}{9} \cdot a^2 \Rightarrow c^2 = \frac{25}{9} \cdot a^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow c = \frac{5}{3} \cdot a.$$

Duljina manje katete a iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} c = \frac{5}{3} \cdot a \\ c = 30 + 40 = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{3} \cdot a = 70 \ / \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow a = 42.$$

Vježba 047

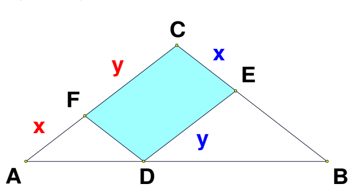
Točka T hipotenuze pravokutnog trokuta jednako je udaljena od njegovih kateta i dijeli hipotenuzu na dijelove duljine 30 i 40. Kolika je duljina veće katete?

Rezultat: 56.

Zadatak 048 (Max, gimnazija)

Krak jednakokračnog trokuta ima duljinu 12. Jednom točkom osnovice povučene su usporednice (paralele) s krakovima. Koliki je opseg nastalog paralelograma?

Rješenje 048



$$|AC| = |BC| = x + y = 12$$

Budući da su trokuti ΔADF i ΔDBE jednakokračni (vrijedi $|AF| = |DF|$ i $|DE| = |BE|$), opseg paralelograma DECF iznosi:

$$O_{DECF} = 2x + 2y = 2 \cdot (x + y) = 2 \cdot 12 = 24.$$

Vježba 048

Krak jednakokračnog trokuta ima duljinu 14. Jednom točkom osnovice povučene su usporednice (paralele) s krakovima. Koliki je opseg nastalog paralelograma?

Rezultat: 28.

Zadatak 049 (Ana, gimnazija)

Nađi duljinu manje katete pravokutnog trokuta čija je duljina hipotenuze jednaka polovici opsega.

Rješenje 049

Budući da je duljina hipotenuze jednaka polovici opsega, slijedi:

$$c=\frac{O}{2}\Rightarrow c=\frac{a+b+c}{2}\ /\cdot 2\Rightarrow 2c=a+b+c\Rightarrow c=a+b.$$

Zadatak nije moguć jer za trokut vrijede nejednakosti:

$$a<b+c\quad,\quad b<c+a\quad,\quad c<a+b.$$

Vježba 049

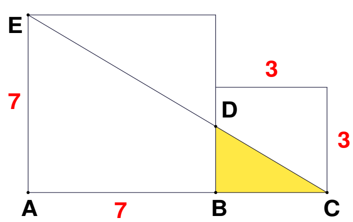
Nađi duljinu manje katete pravokutnog trokuta ako je c – a = b.

Rezultat: Zadatak je nemoguć.

Zadatak 050 (Martin, gimnazija)

Uz veći kvadrat duljine stranice 7 cm smješten je manji, sa stranicom duljine 3 cm (onako kako je to prikazano na slici). Izračunaj površinu obojanog trokuta.

Rješenje 050



$$|AE|=|AB|=7\quad,\quad |BC|=3$$

$$|AC|=|AB|+|BC|=7+3=10.$$

Pravokutni trokuti ΔACE i ΔBCD slični su pa vrijedi razmjer:

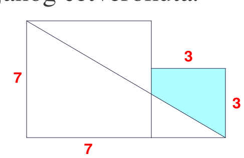
$$|AC|:|AE|=|BC|:|BD|\Rightarrow |BD|=\frac{|AE|\cdot|BC|}{|AC|}=\frac{7\cdot 3}{10}=\frac{21}{10}.$$

Površina trokuta BCD iznosi:

$$P_{BCD}=\frac{|BC|\cdot|BD|}{2}=\frac{3\cdot\frac{21}{10}}{2}=\frac{63}{20}.$$

Vježba 050

Uz veći kvadrat duljine stranice 7 cm smješten je manji, sa stranicom duljine 3 cm (onako kako je to prikazano na slici). Izračunaj površinu obojanog četverokuta.

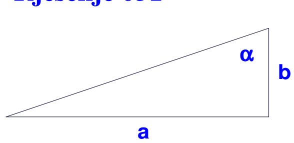


Rezultat: $\frac{117}{20}.$

Zadatak 051 (1A, hotelijerska škola)

Ako je u pravokutnom trokutu $ctg\,\alpha=\frac{12}{5}$ i b = 48, kolika je površina tog trokuta?

Rješenje 051



$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha=\frac{1}{ctg\,\alpha}=\frac{5}{12} \\ tg\,\alpha=\frac{a}{b} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{12}\Rightarrow a=\frac{5}{12}\cdot b.$$

Površina pravokutnog trokuta iznosi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}\cdot b\cdot b=\frac{5}{24}\cdot b^2=\frac{5}{24}\cdot 48^2=480.$$

Vježba 051

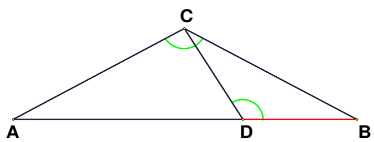
Ako je u pravokutnom trokutu $ctg\,\alpha=\frac{12}{5}$ i b = 24, kolika je površina tog trokuta?

Rezultat: 120.

Zadatak 052 (Ivana, ekonomska škola)

Ako je na slici | AB | = 15 i | CB | = 9, tada je | DB | jednako: $A.\ \frac{15}{9}$ $B.\ \frac{27}{5}$ $C.\ 6$ $D.\ 9$

Rješenje 052



Trokuti ΔABC i ΔDBC slični su jer imaju iste kutove:

$$\angle ABC=\angle DBC,\quad \angle BCA=\angle CDB,\quad \angle CAD=\angle BCD.$$

Vrijedi razmjer:

$$|AB|:|CB|=|CB|:|DB| \Rightarrow 15:9=9:|DB| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\cdot|DB|=81\ /:15 \Rightarrow |DB|=\frac{81}{15}=\frac{27}{5}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 052

Ako je na slici | AB | = 20 i | CB | = 6, tada je | DB | jednako: $A.\ \frac{12}{5}$ $B.\ \frac{4}{5}$ $C.\ \frac{18}{5}$ $D.\ \frac{9}{5}$

Rezultat: Odgovor je pod D.

Zadatak 053 (Max, gimnazija)

Ukupna površina dvaju sličnih trokuta je 260 cm^2. Ako im se opsezi odnose kao 2 : 3 nađi površinu manjeg trokuta.

Rješenje 053

Za opsege i površine sličnih trokuta vrijedi:

$$O_1:O_2=k\qquad,\qquad P_1:P_2=k^2$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}P_1+P_2=260\\ O_1:O_2=2:3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P_1+P_2=260\\ k=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P_1+P_2=260\\ \frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P_1+P_2=260\\ \frac{P_1}{P_2}=\frac{4}{9}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P_1+P_2=260\\ 9\cdot P_1=4\cdot P_2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P_2=260-P_1\\ 9\cdot P_1=4\cdot P_2\end{array}\right\}\Rightarrow 9\cdot P_1=4\cdot(260-P_1)\Rightarrow 9\cdot P_1=1040-4\cdot P_1\Rightarrow 13\cdot P_1=1040\ /:13\Rightarrow P_1=80\ cm^2.$$

Vježba 053

Ukupna površina dvaju sličnih trokuta je 260 cm^2. Ako im se opsezi odnose kao 2 : 3 nađi površinu većeg trokuta.

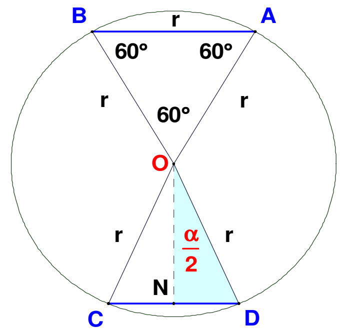
Rezultat: 180 cm^2.

Zadatak 054 (Martin, gimnazija)

U kružnici su zadane dvije tetive duljina 8 i 5. Ako dulja tetiva ima središnji kut 60º, koliki je središnji kut kraće tetive?

Rješenje 054

| AB | = 8, | CD | = 5



Budući da dulja tetiva ima središnji kut 60º, trokut OAB je jednakostraničan (nasuprot jednakim stranicama leže jednaki kutovi) pa vrijedi:

$$|OC| = |OD| = |OA| = |OB| = |AB| = r = 8.$$

Uočimo pravokutan trokut OND:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|ND|}{|OD|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|CD|}{|OD|} = \frac{|CD|}{2\cdot|OD|} = \frac{5}{2\cdot 8} = \frac{5}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{5}{16}\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 18.21^0 \; /\cdot 2 \Rightarrow \alpha = 36.42^0.$$

Vježba 054

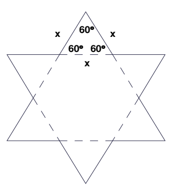
U kružnici su zadane dvije tetive duljina 8 i 6. Ako dulja tetiva ima središnji kut 60º, koliki je središnji kut kraće tetive?

Rezultat: 22.02º.

Zadatak 055 (Martin, gimnazija)

Jednakostraničan trokut sa stranicom duljine a zarotiran je u ravnini oko svojeg središta za kut 60º. Koliki je opseg zvijezde koja je unija ta dva trokuta?

Rješenje 055



Sa slike je očigledno da su mali trokuti jednakostranični (unutarnji kutovi su 60º) pa je:

$$x = \frac{1}{3}\cdot a.$$

Opseg zvijezde iznosi:

$$O = 12\cdot x = 12\cdot\frac{1}{3}\cdot a = 4\cdot a.$$

Vježba 055

Jednakostraničan trokut sa stranicom duljine 3 zarotiran je u ravnini oko svojeg središta za kut 60º. Koliki je opseg zvijezde koja je unija ta dva trokuta?

Rezultat: O = 12.

Zadatak 056 (Anamarija, hotelijerska škola)

Ako za kutove α, β, γ trokuta ABC vrijedi jednakost α – β = 3 · γ, koliko je α – γ?

Rješenje 056

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=180^0\\ \alpha-\beta&=3\cdot\gamma\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\ \text{jednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot\alpha+\gamma=180^0+3\cdot\gamma \Rightarrow 2\cdot\alpha+\gamma-3\cdot\gamma=180^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\alpha-2\cdot\gamma=180^0 \; /:2 \Rightarrow \alpha-\gamma=90^0.$$

Vježba 056

Ako za kutove α, β, γ trokuta ABC vrijedi jednakost α – γ = 3 · β, koliko je α – β?

Rezultat: $\alpha-\beta=90^0.$

Zadatak 057 (Anamarija, hotelijerska škola)

Kolika je površina trokuta ako su $P_1(-2, 1)$, $P_2(2, 3)$, $P_3(4, 1)$ polovišta njegovih stranica?

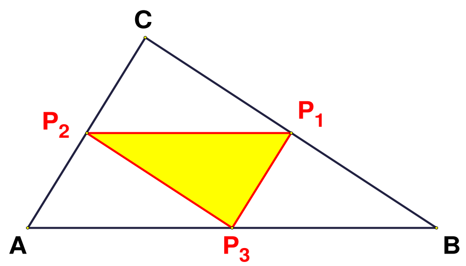
Rješenje 057

Ponovimo!

Površina trokuta ABC zadanog vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ računa se po formuli:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|.$$

Budući da spojnice polovišta dijele zadani trokut na četiri sukladna trokuta, njegova površina iznosi:



$$\left.\begin{array}{l} P_1(x_1, y_1) = P_1(-2, 1) \\ P_2(x_2, y_2) = P_2(2, 3) \\ P_3(x_3, y_3) = P_3(4, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow P_{ABC} = 4 \cdot P_{P_1 P_2 P_3} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| -2 \cdot (3-1) + 2 \cdot (1-1) + 4 \cdot (1-3) \right| = 2 \cdot \left| -4 + 0 - 8 \right| =$$

$$= 2 \cdot \left| -12 \right| = 2 \cdot 12 = 24.$$

Vježba 057

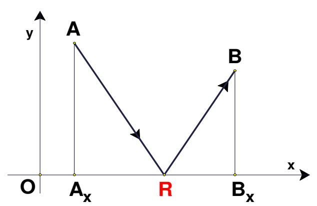
Kolika je površina trokuta ako su $P_1(-2, 1)$, $P_2(2, 3)$, $P_3(4, 3)$ polovišta njegovih stranica?

Rezultat: 8.

Zadatak 058 (Mala, gimnazija)

Zraka svjetlosti prolazi točkom A(1988, 40), reflektira se na osi x u točki R i nakon refleksije prolazi točkom B(2108, 20). Nađi apscisu točke R u kojoj se zraka reflektira.

Rješenje 058



$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1988, 40) \\ B(x_2, y_2) = B(2108, 20) \\ R(x, y) = R(?, ?) \end{array}\right\} \Rightarrow \left| AA_x \right| = y_1 = 40 \ , \ \left| BB_x \right| = y_2 = 20 \ ,$$

$$\left| A_x R \right| = x - x_1 = x - 1988 \ , \ \left| RB_x \right| = x_2 - x = 2108 - x.$$

Budući da su trokuti ΔA_xRA i ΔRB_xB slični, vrijedi razmjer:

$$\frac{\left| AA_x \right|}{\left| A_x R \right|} = \frac{\left| BB_x \right|}{\left| RB_x \right|} \Rightarrow \frac{y_1}{x - x_1} = \frac{y_2}{x_2 - x} \Rightarrow \frac{40}{x - 1988} = \frac{20}{2108 - x} \Rightarrow 40 \cdot (2108 - x) = 20 \cdot (x - 1988) \ /:20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (2108 - x) = x - 1988 \Rightarrow 4216 - 2 \cdot x = x - 1988 \Rightarrow -2 \cdot x - x = -1988 - 4216 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot x = -6204 \ /:(-3) \Rightarrow x = 2068.$$

Vježba 058

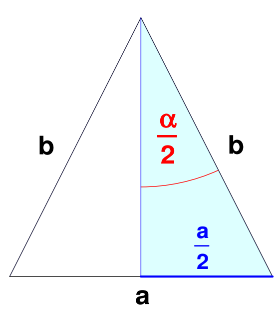
Zraka svjetlosti prolazi točkom A(1988, 40), reflektira se na osi x u točki R i nakon refleksije prolazi točkom B(2108, 40). Nađi apscisu točke R u kojoj se zraka reflektira.

Rezultat: $x = 2048.$

Zadatak 059 (Mala, gimnazija)

Omjer duljina osnovice i kraka jednakokračnog trokuta je $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Koliki je kut između krakova trokuta?

Rješenje 059



Omjer duljina osnovice i kraka je: $\frac{a}{b} = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$

Sa slike se vidi da kut između krakova iznosi:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2 \cdot b} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 22.5^0 \Rightarrow \alpha = 45^0.$$

Vježba 059

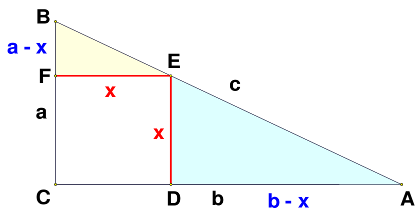
Omjer duljina osnovice i kraka jednakokračnog trokuta je $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Koliki je kut između osnovice i kraka trokuta?

Rezultat: $67.5°$.

Zadatak 060 (Mala, gimnazija)

Iz pravokutnog trokuta, duljina kateta a i b, izrezan je kvadrat kojemu jedan vrh leži na hipotenuzi duljine c, a dvije stranice na katetama trokuta. Koliki je omjer površina tako dobivenih trokuta?

Rješenje 060



Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔEBF dobije se razmjer pomoću kojeg izračunamo duljinu stranice kvadrata CDEF:

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x} \Rightarrow a\cdot x=b\cdot(a-x) \Rightarrow a\cdot x=a\cdot b-b\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot x+b\cdot x=a\cdot b \Rightarrow x\cdot(a+b)=a\cdot b \Rightarrow x=\frac{a\cdot b}{a+b}.$$

Omjer površina trokuta ΔEBF i ΔAED je:

$$\frac{P_{EBF}}{P_{AED}}=\frac{\frac{x\cdot(a-x)}{2}}{\frac{(b-x)\cdot x}{2}}=\frac{a-x}{b-x}=\frac{a-\frac{a\cdot b}{a+b}}{b-\frac{a\cdot b}{a+b}}=\frac{\frac{a\cdot(a+b)-a\cdot b}{a+b}}{\frac{b\cdot(a+b)-a\cdot b}{a+b}}=\frac{a^2+a\cdot b-a\cdot b}{a\cdot b+b^2-a\cdot b}=\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Vježba 060

Iz pravokutnog trokuta, duljina kateta 4 i 3, izrezan je kvadrat kojemu jedan vrh leži na hipotenuzi duljine c, a dvije stranice na katetama trokuta. Koliki je omjer površina tako dobivenih trokuta?

Rezultat: $\frac{16}{9}$.