Zadatak 021 (Slavica, gimnazija)

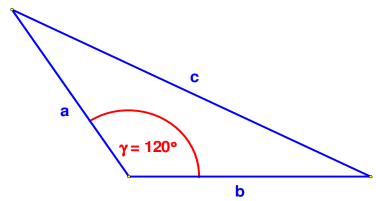
Duljine stranica trokuta čine aritmetički niz (slijed) s razlikom 2. Jedan kut iznosi 120°. Koliki je opseg trokuta?

Rješenje 021

1. inačica

Budući da duljine stranica trokuta čine aritmetički niz (slijed) s razlikom 2, proizlazi:

$$a,\ b = a + 2,\ c = a + 4.$$



Primjena kosinusovog poučka [$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$] povlači:

$$(a + 4)^2 = a^2 + (a + 2)^2 - 2 \cdot a \cdot (a + 2) \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2 + 8a + 16 = a^2 + a^2 + 4a + 4 - 2 \cdot a \cdot (a + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 8a + 16 = a^2 + 4a + 4 + a^2 + 2a \ \Rightarrow\ 2a^2 - 2a - 12 = 0 \ /:2 \ \Rightarrow\ a^2 - a - 6 = 0.$$

Iz Vièteovih formulaslijedi: $a_1 = 3$, $a_2 = -2$ (nema smisla)

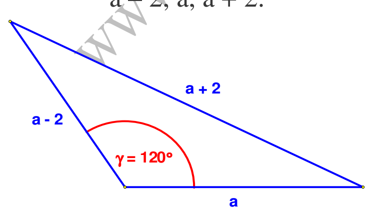
Duljine stranica trokuta su: $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$

pa je opseg: $O = a + b + c = 3 + 5 + 7 = 15$.

2. inačica

Budući da duljine stranica trokuta čine aritmetički niz (slijed) s razlikom 2, proizlazi:

$$a - 2,\ a,\ a + 2.$$



Primjena kosinusovog poučka [$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$] povlači:

$$(a + 2)^2 = (a - 2)^2 + a^2 - 2 \cdot (a - 2) \cdot a \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2 + 4a + 4 = a^2 - 4a + 4 + a^2 - 2 \cdot (a - 2) \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4a + 4 = -4a + 4 + a^2 + a^2 - 2a \ \Rightarrow\ 2a^2 - 10a = 0 \ /:2 \ \Rightarrow\ a^2 - 5a = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a \cdot (a - 5) = 0 \ \Rightarrow\ a_1 = 0 \text{ (nema smisla)}, \quad a - 5 = 0 \ \Rightarrow\ a_2 = 5.$$

Duljine stranica trokuta su:

$$a - 2 = 5 - 2 = 3,\ a = 5,\ a + 2 = 5 + 2 = 7.$$

pa je opseg:

$$O = a + b + c = 3 + 5 + 7 = 15.$$

Vježba 021

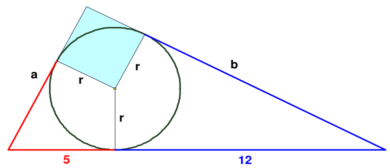
Duljine stranica trokuta čine aritmetički niz (slijed) s razlikom 2. Jedan kut iznosi 120°. Kolika je duljina najdulje stranice?

Rezultat: 7.

Zadatak 022 (Hrvoje, tehnička škola)

U pravokutni trokut upisana je kružnica. Diralište te kružnice dijeli hipotenuzu na dijelove kojima su duljine 5 cm i 12 cm. Kolika je duljina manje katete?

Rješenje 022



Označeni četverokut je kvadrat. Trokut je podijeljen na tri geometrijska lika: dva deltoida i jedan kvadrat. Deltoid ima dva para sukladnih stranica. Proizlazi da za stranice trokuta vrijedi

a = r + 5, b = 12 + r, c = 5 + 12 = 17.

$$\left.\begin{array}{l} a = 5 + r \\ b = 12 + r \end{array}\right\} \Rightarrow b = a + 7.$$

Iskoristimo pravokutni trokuta:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + (a+7)^2 = 17^2 \Rightarrow a^2 + a^2 + 14a + 49 - 289 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 14a - 240 = 0 \;/:2 \Rightarrow a^2 + 7a - 120 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49^2 + 480}}{2} = \frac{-7 \pm 23}{2} \Rightarrow a = 8 \; cm.$$

Vježba 022

U pravokutni trokut upisana je kružnica. Dirալište te kružnice dijeli hipotenuzu na dijelove kojima su duljine 5 cm i 12 cm. Kolika je duljina veće katete?

Rezultat: 15 cm.

Zadatak 023 (Anastazija, gimnazija)

Ako su stranice u trokutu ABC zadane sa a = x^2 + x + 1, b = x^2 + 2x, c = 2x + 1, x > 0, koliko iznosi kut α?

Rješenje 023

Uporabom kosinusovog poučka dobije se:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{\left(x^2 + 2x\right)^2 + (2x+1)^2 - \left(x^2 + x + 1\right)^2}{2 \cdot \left(x^2 + 2x\right) \cdot (2x+1)} =$$

$$= \left[(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \;\; , \;\; (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \right] =$$

$$= \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 4x + 1 - x^4 - x^2 - 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{2 \cdot x \cdot (x+2) \cdot (2x+1)} =$$

$$= \frac{2x^3 + 5x^2 + 2x}{2 \cdot x \cdot (x+2) \cdot (2x+1)} = \frac{x \cdot \left(2x^2 + 5x + 2\right)}{2 \cdot x \cdot (x+2) \cdot (2x+1)} = \frac{2x^2 + 4x + x + 2}{2 \cdot (x+2) \cdot (2x+1)} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x+2) + (x+2)}{2 \cdot (x+2) \cdot (2x+1)} = \frac{(x+2) \cdot (2x+1)}{2 \cdot (x+2) \cdot (2x+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^0.$$

Vježba 023

Ako su stranice u trokutu ABC zadane sa a = 7, b = 8, c = 5, koliko iznosi kut α?

Rezultat: 60°.

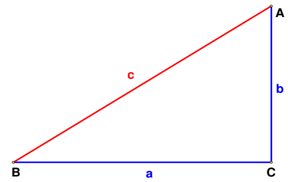
Zadatak 024 (Ivana, hotelijerska škola)

Ako je zadana jedinična dužina konstruiraj dužine duljine:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \sqrt{13},\ \sqrt{14}\ \text{ i }\ \sqrt{15}.$$

Rješenje 024

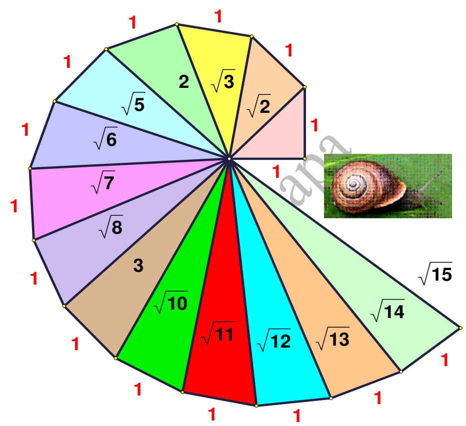
Ponovimo Pitagorin poučak:



Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

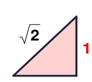
Nacrtamo pravokutan trokut čije obje katete imaju duljinu 1. Iz Pitagorinog poučka slijedi da je duljina hipotenuze jednaka $\sqrt{2}$. Ponovno uporabom Pitagorinog poučka u pravokutnom trokuti čije katete imaju duljine $\sqrt{2}$ i 1, dobivamo da hipotenuza ima duljinu $\sqrt{3}$. Opet koristeći Pitagorin poučak u pravokutnom trokutu čije katete imaju duljine $\sqrt{3}$ i 1, dobivamo da hipotenuza ima duljinu 2. Nastavljajući te konstrukcije, dobivamo sljedeću sliku:



Vježba 024

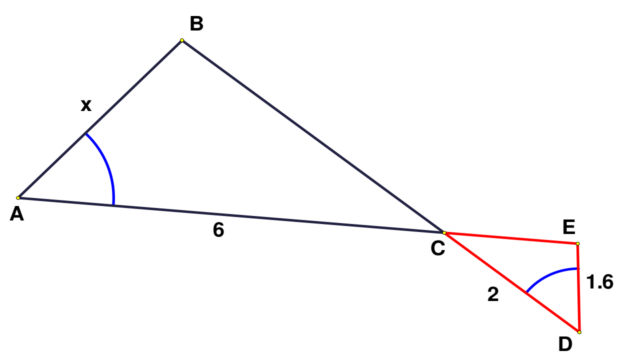
Ako je zadana jedinična dužina konstruiraj dužinu duljine $\sqrt{2}$.

Rezultat:



Zadatak 025 (1A, hotelijerska škola)

Ako je $|DE| = 1.6$, $|AC| = 6$ i $|CD| = 2$, koliko je $x = |AB|$?



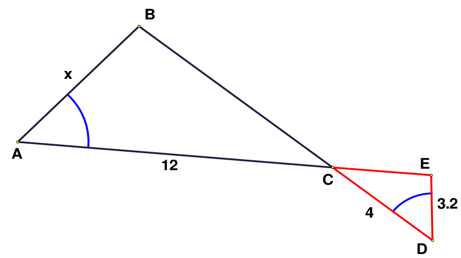
Rješenje 025

Budući da su trokuti ΔACB i ΔDEC slični (imaju sva tri kuta jednaka), odgovarajuće stranice su im proporcionalne. Vrijedi razmjer:

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|CD|}{|DE|} \Rightarrow \frac{6}{x}=\frac{2}{1.6} \Rightarrow 2\cdot x=6\cdot 1.6 \ /:2 \Rightarrow x=3\cdot 1.6=4.8.$$

Vježba 025

Ako je |DE| = 3.2, |AC| = 12 i |CD| = 4, koliko je x = |AB| ?



Rezultat: 9.6.

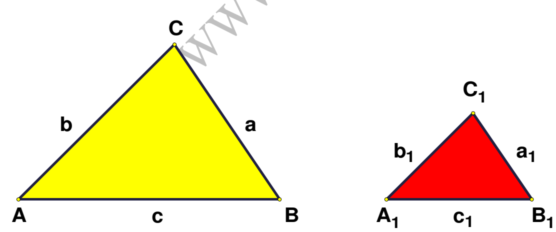
Zadatak 026 (1A, hotelijerska škola)

Površine dvaju sličnih trokuta su 104 cm^2 i 26 cm^2. Opseg manjeg trokuta je 38 cm. Koliki je opseg većeg trokuta?

Rješenje 026

Za dva slična trokuta ΔABC i Δ$A_1B_1C_1$ vrijedi da su im odgovarajuće (homologne) stranice proporcionalne (razmjerne):

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k \ , \ \text{k je koeficijent sličnosti.}$$



Za njihove opsege vrijedi: $\frac{O}{O_1}=k,$ a za površine: $\frac{P}{P_1}=k^2.$ Iz uvjeta zadatka slijedi:

P = 104, P_1 = 26, O_1 = 38, O = ?

$$\frac{P}{P_1}=k^2 \Rightarrow k^2=\frac{104}{26} \Rightarrow k^2=4 \Rightarrow k=2.$$

Opseg većeg trokuta je:

$$\frac{O}{O_1}=k \Rightarrow \frac{O}{38}=2 \Rightarrow O=76.$$

Vježba 026

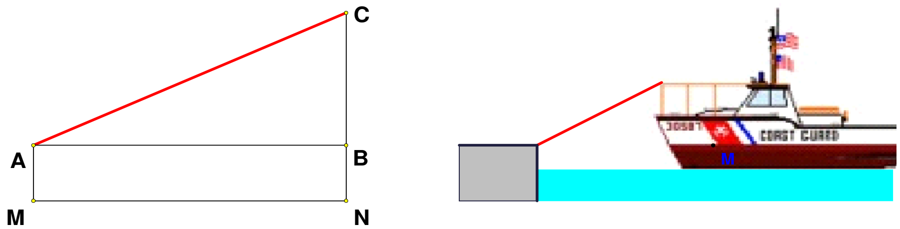
Površine dvaju sličnih trokuta su 208 cm^2 i 52 cm^2. Opseg manjeg trokuta je 38 cm. Koliki je opseg većeg trokuta?

Rezultat: 76 cm.

Zadatak 027 (Lea, gimnazija)

Brod je privezan za obalu zategnutim konopcem duljine 2.5 m. Jedan kraj konopca učvršćen je na obali na visini 1.4 m iznad razine mora, a drugi kraj na pramcu broda 2.9 m iznad razine mora. Ako konopac potegnemo te se on skrati za 80 cm, za koliko se brod približi obali?

Rješenje 027



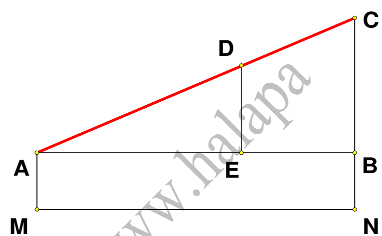
$$|AM| = |NB| = 1.4 \text{ m}, \ |NC| = 2.9 \text{ m}, \ |AC| = 2.5 \text{ m},$$

$$|BC| = |NC| - |NB| = 2.9 \text{ m} - 1.4 \text{ m} = 1.5 \text{ m}$$

Udaljenost broda od obale $|AB|$ iznosi (Pitagorin poučak za trokut ABC):

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 - |BC|^2} = \sqrt{2.5^2 - 1.5^2} = \sqrt{4} = 2 \ m.$$

Ako konopac potegnemo te se on skrati za 80 cm = 0.8 m, iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔAED dobit ćemo traženi rezultat.



$$|DC| = 0.8 \text{ m}, \ |AB| = 2 \text{ m}, \ |AC| = 2.5 \text{ m},$$

$$|AD| = |AC| - |DC| = 2.5 \text{ m} - 0.8 \text{ m} = 1.7 \text{ m}$$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AE|} \Rightarrow |AC| \cdot |AE| = |AD| \cdot |AB| \Rightarrow |AE| = \frac{|AD| \cdot |AB|}{|AC|} = \frac{1.7 \ m \cdot 2 \ m}{2.5 \ m} = 1.36 \ m.$$

Brod se približio obali za:

$$|EB| = |AB| - |AE| = 2 \text{ m} - 1.36 \text{ m} = 0.64 \text{ m} = 64 \text{ cm}.$$

Vježba 027

Brod je privezan za obalu zategnutim konopcem duljine 2.5 m. Jedan kraj konopca učvršćen je na obali na visini 1.4 m iznad razine mora, a drugi kraj na pramcu broda 2.9 m iznad razine mora. Ako konopac potegnemo te se on skrati za 1 m, za koliko se brod približi obali?

Rezultat: 80 cm.

Zadatak 028 (Anastazija, gimnazija)

Dvije stranice trokuta odnose se kao 2 : 1, a odgovarajući kutovi kao 3 : 1. Ako je površina tog trokuta $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, koliki je opseg?

Rješenje 028

Neka je:

$$a : b = 2 : 1 \Rightarrow a = 2b \quad , \quad \alpha : \beta = 3 : 1 \Rightarrow \alpha = 2\beta .$$

Iz sinusovog poučka dobije se:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha \Rightarrow 2b\cdot\sin\beta=b\cdot\sin 3\beta \;/:b \Rightarrow 2\cdot\sin\beta=\sin 3\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sin 3x=3\cdot\sin x-4\cdot\sin^3 x\right] \Rightarrow 2\cdot\sin\beta=3\cdot\sin\beta-4\cdot\sin^3\beta \Rightarrow 4\cdot\sin^3\beta-\sin\beta=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\beta\cdot\left[4\cdot\sin^2\beta-1\right]=0 \Rightarrow \left[x\cdot y=0 \Rightarrow x=0 \text{ ili } y=0\right] \Rightarrow \sin\beta=0 \quad , \quad 4\cdot\sin^2\beta-1=0.$$

Iz sin β = 0 slijedi β = 0 (nema smisla). Iz

$$4\cdot\sin^2\beta-1=0 \Rightarrow 4\cdot\sin^2\beta=1 \Rightarrow \sin^2\beta=\frac{1}{4} \;/\sqrt{\ } \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\beta=-\frac{1}{2} \text{ (nema smisla)} \\ \sin\beta=\frac{1}{2} \Rightarrow \beta=30^0 \end{array}\right\}.$$

Ostali kutovi trokuta su:

$$\alpha=3\cdot\beta=3\cdot 30^0=90^0 \quad , \quad \gamma=180^0-(\alpha+\beta)=180^0-\left(90^0+30^0\right)=60^0.$$

Trokut je pravokutan. Budući da je kut α pravi kut, slijedi stranica a je hipotenuza. Iz površine trokuta dobije se duljina stranice b:

$$P=\frac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma \Rightarrow P=\frac{2b\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma \Rightarrow P=b^2\cdot\sin\gamma \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}=b^2\cdot\sin 60^0 \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}=b^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \;/:\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=3 \Rightarrow b=\sqrt{3} \Rightarrow [a=2\cdot b] \Rightarrow a=2\sqrt{3}.$$

Duljinu stranice c izračunamo pomoću Pitagorinog poučka (stranica a je hipotenuza):

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow c^2=12-3 \Rightarrow c^2=9 \Rightarrow c=3.$$

Opseg trokuta iznosi:

$$O=a+b+c=2\sqrt{3}+\sqrt{3}+3=3+3\sqrt{3}.$$

Vježba 028

Dvije stranice trokuta odnose se kao 2 : 1, a odgovarajući kutovi kao 3 : 1. Ako je površina tog trokuta $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, kolika je duljina visine na stranicu a?

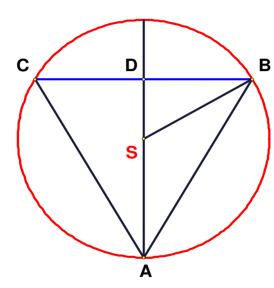
Rezultat: v_a = 1.5 cm.

Zadatak 029 (Sanela, ekonomska škola)

Kružnica ima polumjer duljine 2. Koliki je šiljasti obodni kut tetive koja je od središta kružnice udaljena 1?

Rješenje 029

1.inačica



$$|SD|=1, \; |AS|=|SB|=2, \; |AD|=|AS|+|SD|=2+1=3$$

Iz pravokutnog trokuta SBD nađe se duljina $|BD|$:

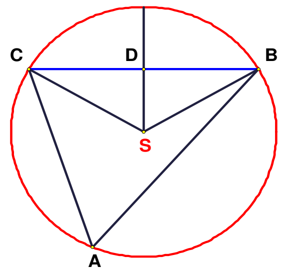
$$|BD|^2=|SB|^2-|SD|^2 \Rightarrow |BD|^2=2^2-1^2=3 \Rightarrow |BD|=\sqrt{3}.$$

Trokut ABC je jednakokračan pa vrijedi: $\measuredangle BAD=\measuredangle CAD=\frac{\alpha}{2}.$

Iz pravokutnog trokuta ABD slijedi:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{|BD|}{|AD|}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=30^0 \Rightarrow \alpha=60^0.$$

2.inačica



$$|SD|=1,\ |SB|=|SC|=2$$

Uočimo jednakokračan trokut SBC. Trokut SBD je pravokutan trokut pa vrijedi:

$$|BD|^2=|SB|^2-|SD|^2 \Rightarrow |BD|^2=2^2-1^2=3 \Rightarrow |BD|=\sqrt{3}.$$

Duljina stranice $\overline{BC}$ je:

$$|BC|=2\cdot|BD|=2\cdot\sqrt{3}.$$

U trokutu SBC uporabimo kosinusov poučak i izračunamo kut β:

$$\beta=\sphericalangle BSC=\frac{|BS|^2+|CS|^2-|BC|^2}{2\cdot|BS|\cdot|CS|}=\frac{2^2+2^2-\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot2\cdot2}=\frac{4+4-12}{8}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \beta=120^0.$$

Budući da je β središnji kut nad tetivom $\overline{BC}$, tada je pripadni obodni kut dvostruko manji:

$$\alpha=\frac{1}{2}\cdot\beta=\frac{1}{2}\cdot120^0=60^0.$$

Vježba 029

Kružnica ima polumjer duljine 2. Koliki je središnji kut tetive koja je od središta kružnice udaljena 1?

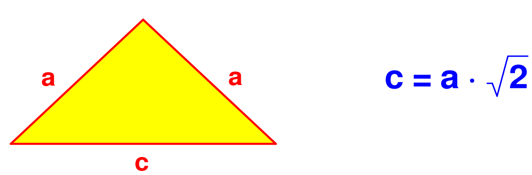
Rezultat: 120º.

Zadatak 030 (Robert, tehnička škola)

Opseg jednakokračnog pravokutnog trokuta je 30 cm. Odredite duljine stranica tog trokuta.

Rješenje 030

Jednakokračan pravokutan trokut ima katete jednakih duljina:



Iz formule za opseg jednakokračnog pravokutnog trokuta O = 2a + c dobije se duljina katete:

$$2a+a\sqrt{2}=30 \Rightarrow [\text{izlučimo a}] \Rightarrow a\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)=30 \Rightarrow a=\frac{30}{2+\sqrt{2}}=[\text{racionalizacija nazivnika}]=$$

$$=\frac{30}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{30\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=\frac{30\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=15\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\ cm.$$

Hipotenuza c iznosi:

$$c=a\cdot\sqrt{2}=15\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=15\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}-2\right)=[\text{izlučimo 2}]=15\cdot2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=30\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\ cm.$$

Vježba 030

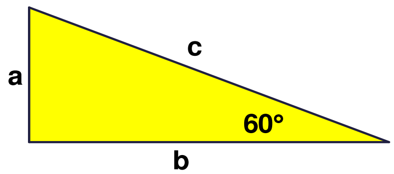
Opseg jednakokračnog pravokutnog trokuta je $2+\sqrt{2}$ cm. Odredite duljine stranica tog trokuta.

Rezultat: $a = 1\ cm\ ,\ c = \sqrt{2}\ cm.$

Zadatak 031 (Robert, tehnička škola)

Opseg pravokutnog trokuta, kojem je jedan kut 60º, iznosi 12 cm. Odredite duljinu hipotenuze tog trokuta.

Rješenje 031



Uporabit ćemo trigonometrijske funkcije sinus i kosinus:

$$\sin 60^0 = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin 60^0 = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^0 = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos 60^0 = c \cdot \frac{1}{2} = \frac{c}{2}$$

Budući da je opseg trokuta O = a + b + c, slijedi:

$$a+b+c=12 \Rightarrow \frac{c\sqrt{3}}{2}+\frac{c}{2}+c=12\ /\cdot 2 \Rightarrow c\sqrt{3}+c+2c=24 \Rightarrow 3c+c\sqrt{3}=24 \Rightarrow [\text{izlučimo c}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)=24 \Rightarrow c=\frac{24}{3+\sqrt{3}}=[\text{racionalizacija nazivnika}]=\frac{24}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{24\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}{9-3}=$$

$$=\frac{24\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}=4\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\ cm.$$

Vježba 031

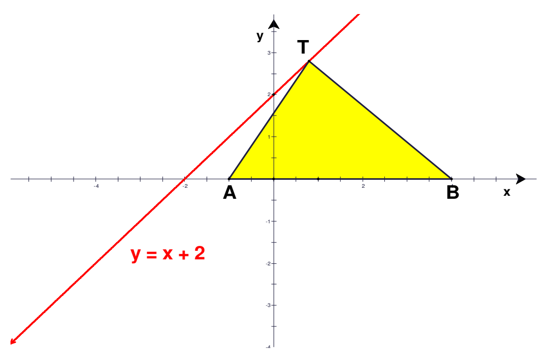
Opseg pravokutnog trokuta, kojem je jedan kut 30º, iznosi 12 cm. Odredite duljinu hipotenuze tog trokuta.

Rezultat: $4\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)\ cm.$

Zadatak 032 (4A, hotelijerska škola)

U koordinatnom sustavu zadane su točke A(–1, 0) i B(4, 0). Koliki je zbroj površina svih pravokutnih trokuta kojima je $\overline{AB}$ hipotenuza, a vrh pravog kuta leži na pravcu y = x + 2?

Rješenje 032



Najprije odredimo treći vrh T trokuta ABT. Budući da točka T pripada pravcu y = x + 2, njezine koordinate su T(x, x+2). Prema uvjetu zadatka trokut ABT mora biti pravokutan s hipotenuzom $\overline{AB}$ pa vrijedi:

$$|AT|^2+|BT|^2=|AB|^2.$$

Ponovimo formulu za udaljenost dviju točaka A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2):

$$|AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \Rightarrow |AB|^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{c} A(-1,0)\ ,\ B(4,0) \\ T(x,\ x+2) \\ |AT|^2+|BT|^2=|AB|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+1)^2+(x+2-0)^2+(x-4)^2+(x+2-0)^2=(4+1)^2+(0-0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(x+2)^2+(x-4)^2+(x+2)^2=25 \Rightarrow$$

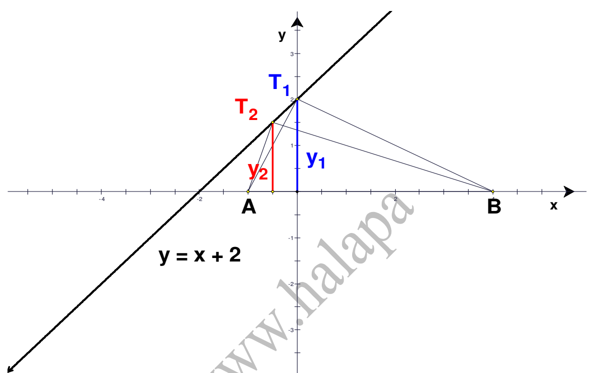
$$\Rightarrow x^2+2x+1+x^2+4x+4+x^2-8x+16+x^2+4x+4-25=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+2x=0 \Rightarrow x\cdot(4x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4x+2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=0\ ,\ x_2=-\frac{1}{2}.$$

Odredimo y:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y_1=0+2=2 \\ y_2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1(0,\ 2) \\ T_2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right) \end{cases}.$$

Postoje dva pravokutna trokuta: ΔABT_1 i ΔABT_2.



Zbroj njihovih površina je:

$$P_{ABT_1}+P_{ABT_2}=\frac{|AB|\cdot y_1}{2}+\frac{|AB|\cdot y_2}{2}=\frac{5\cdot 2}{2}+\frac{5\cdot\frac{3}{2}}{2}=5+\frac{15}{4}=\frac{35}{4}.$$

Vježba 032

U koordinatnom sustavu zadane su točke A(–1, 0) i B(4, 0). Kolika je površina većeg pravokutnog trokuta ako je $\overline{AB}$ hipotenuza, a vrh pravog kuta leži na pravcu y = x + 2?

Rezultat: 5.

Zadatak 033 (Ivana, hotelijerska škola)

Ako su a, b i c duljine stranica, a v_a, v_b i v_c duljine odgovarajućih visina trokuta, dokažite ekvivalenciju:

$$v_c=v_a+v_b \Leftrightarrow a\cdot b=c\cdot(a+b).$$

Rješenje 033

Za površinu trokuta vrijedi:

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Zato je:

$$\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2}\ /\cdot 2 \Rightarrow a\cdot v_a=b\cdot v_b=c\cdot v_c.$$

Iz jednakosti $a\cdot v_a=c\cdot v_c$ izračunamo v_c:

$$a \cdot v_a = c \cdot v_c \; / \cdot \frac{b}{c} \Rightarrow v_c = \frac{a \cdot b \cdot v_a}{c} \qquad (1)$$

Iz jednakosti $a \cdot v_a = b \cdot v_b$ izračunamo v_b:

$$a \cdot v_a = b \cdot v_b \; / \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow v_b = \frac{a \cdot v_a}{b} \qquad (2)$$

Uvrstimo (1) i (2) u relaciju koja povezuje duljine visina:

$$v_c = v_a + v_b \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot v_a}{b \cdot c} = v_a + \frac{a \cdot v_a}{b} \; / \cdot \frac{bc}{v_a} \Rightarrow a \cdot b = b \cdot c + a \cdot c \Rightarrow a \cdot b = c \cdot (a + b).$$

Vježba 033

Ako su a, b i c duljine stranica, a v_a, v_b i v_c duljine odgovarajućih visina trokuta, dokažite ekvivalenciju: $v_c = v_a - v_b \Leftrightarrow a \cdot b = c \cdot (b - a)$.

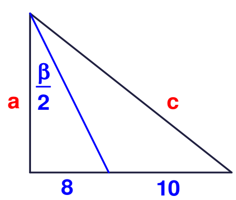
Rezultat: Analogno kao u zadatku.

Zadatak 034 (Ivana, hotelijerska škola)

U pravokutnom trokutu simetrala šiljastog kuta dijeli nasuprotnu katetu na dijelove 8 cm i 10 cm. Odredi površinu tog trokuta.

Rješenje 034

1.inačica



Budući da simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije stranice, pišemo:

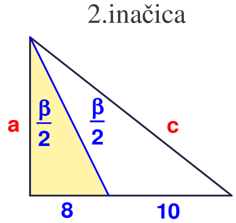
$$c : a = 10 : 8 \Rightarrow 8c = 10a \Rightarrow c = \frac{10a}{8} = \frac{5a}{4}.$$

Duljina katete b iznosi b = 18 cm. Pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu katete a:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\frac{5a}{4}\right)^2 = a^2 + 18^2 \Rightarrow \frac{25a^2}{16} - a^2 = 324 \Rightarrow \frac{9a^2}{16} = 324 \; / \cdot \frac{16}{9} \Rightarrow a^2 = 576 \; / \sqrt{\ } \Rightarrow a = 24 \; cm.$$

Površina trokuta iznosi: $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{24 \; cm \cdot 18 \; cm}{2} = 216 \; cm^2.$

2.inačica



$$\left.\begin{array}{l} tg \frac{\beta}{2} = \frac{8}{a} \\ tg \, \beta = \frac{18}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[tg \, \beta = \frac{2 \cdot tg \frac{\beta}{2}}{1 - tg^2 \frac{\beta}{2}} \right] \Rightarrow \frac{18}{a} = \frac{2 \cdot \frac{8}{a}}{1 - \left(\frac{8}{a}\right)^2} \Rightarrow \frac{18}{a} = \frac{\frac{16}{a}}{1 - \frac{64}{a^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{18}{a} = \frac{\frac{16}{a}}{\frac{a^2 - 64}{a^2}} \Rightarrow \frac{18}{a} = \frac{\frac{16}{1}}{\frac{a^2 - 64}{a}} \Rightarrow \frac{18}{a} = \frac{16a}{a^2 - 64} \Rightarrow 18 \cdot \left(a^2 - 64\right) = 16 \cdot a^2 \; /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \left(a^2 - 64\right) = 8 \cdot a^2 \Rightarrow 9a^2 - 576 = 8a^2 \Rightarrow 9a^2 - 8a^2 = 576 \Rightarrow a^2 = 576 \; / \sqrt{\ } \Rightarrow a = 24 \; cm.$$

Površina trokuta iznosi: $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{24 \; cm \cdot 18 \; cm}{2} = 216 \; cm^2.$

Vježba 034

U pravokutnom trokutu simetrala šiljastog kuta dijeli nasuprotnu katetu na dijelove 8 cm i 10 cm. Odredi opseg tog trokuta.

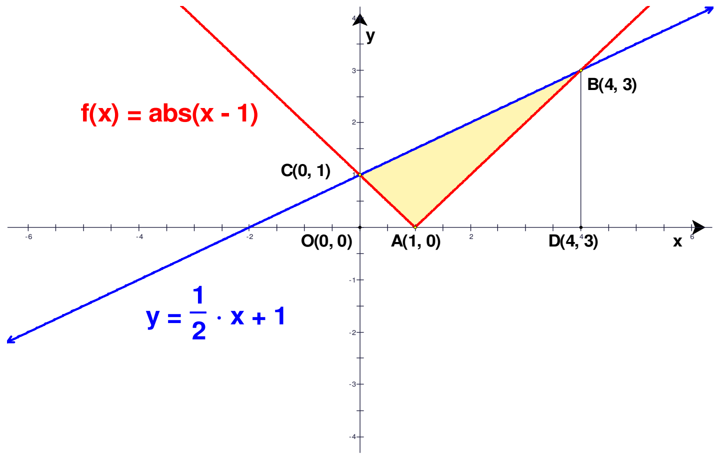
Rezultat: 72 cm

Zadatak 035 (Felix, gimnazija)

Kolika je površina trokuta što ga graf funkcije $f(x) = |x - 1|$ zatvara s pravcem $y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$?

A. 6 B. 3 C. 4 D. 1.5 E. 2

Rješenje 035



Izračunamo sljedeće veličine:

$|AC| = ?$

- $\left.\begin{array}{l} C(0, 1) \\ A(1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow |AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$

$|AB| = ?$

- $\left.\begin{array}{l} A(1, 0) \\ B(4, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}.$

$|CB| = ?$

- $\left.\begin{array}{l} C(0, 1) \\ B(4, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow |CB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}.$

1. inačica

Dokažimo da je trokut ABC pravokutan. Uporabit ćemo Pitagorin poučak:

$$|CB|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 \Rightarrow \left(2 \cdot \sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(3 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 20 = 2 + 18 \Rightarrow 20 = 20.$$

Trokut ABC je pravokutan pa njegova površina iznosi:

$$P_{ABC} = \frac{|AC| \cdot |AB|}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$$

2. inačica

Površinu trokuta ABC možemo izračunati da od površine trapeza ODBC oduzmemo površine trokuta OAC i ADB:

$$P_{ABC} = P_{ODBC} - P_{OAC} - P_{ADB} = \frac{|DB| + |OC|}{2} \cdot |OD| - \frac{|OA| \cdot |OC|}{2} - \frac{|AD| \cdot |DB|}{2} =$$

$$= \left[|DB| = 3 \ , \ |OC| = 1 \ , \ |OD| = 4 \ , \ |OA| = 1 \ , \ |OC| = 1 \ , \ |AD| = 3 \ , \ |DB| = 3 \right] =$$

$$= \frac{3+1}{2} \cdot 4 - \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{4}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{16}{2} - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

3. inačica
U koordinatnoj ravnini zadamo vrhove trokuta ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Površina trokuta ABC dana je formulom:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot \left(y_2 - y_3 \right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1 \right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2 \right) \right|.$$

Zato je:

$$\left. \begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right) = A(1, 0) \\ B\left(x_2, y_2\right) = B(4, 3) \\ C\left(x_3, y_3\right) = C(0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot \left(y_2 - y_3 \right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1 \right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2 \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| 1 \cdot (3-1) + 4 \cdot (1-0) + 0 \cdot (0-3) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \right| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Vježba 035

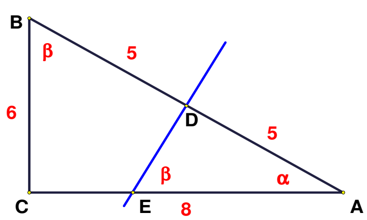
Koliki je opseg trokuta što ga graf funkcije f(x) = | x – 1 | zatvara s pravcem $y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$?

Rezultat: $O = 4 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{5}.$

Zadatak 036 (Max, gimnazija)

U pravokutnom trokutu s katetama 6 i 8 povučena je simetrala na hipotenuzu, koja siječe stranice trokuta u točkama D i E. Kolika je udaljenost tih točaka?

Rješenje 036



Hipotenuza pravokutnog trokuta ABC iznosi:

$$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

Budući da simetrala na hipotenuzu raspolavlja hipotenuzu, vrijedi:

$$|BD| = |DA| = 5.$$

Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔADE (imaju jednake kutove) slijedi omjer duljina stranica:

$$|ED| : |AD| = |CB| : |CA| \Rightarrow \left[|AD| = 5 \ , \ |CB| = 6 \ , \ |CA| = 8 \right] \Rightarrow |ED| : 5 = 6 : 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot |ED| = 30 \ /:8 \Rightarrow |ED| = \frac{30}{8} = 3.75.$$

Vježba 036

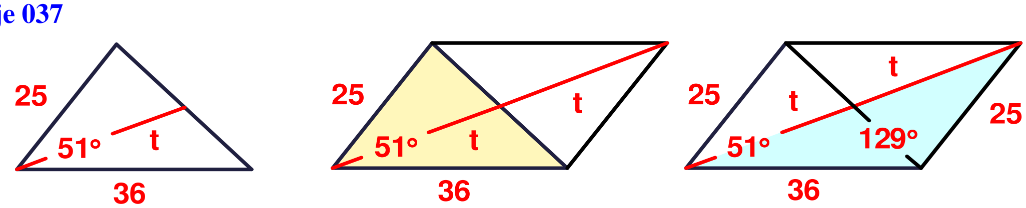
U pravokutnom trokutu s katetama 12 i 16 povučena je simetrala na hipotenuzu, koja siječe stranice trokuta u točkama D i E. Kolika je udaljenost tih točaka?

Rezultat: 7.5.

Zadatak 037 (Mario, gimnazija)

Dvije stranice trokuta imaju duljine 25 cm i 36 cm, te zatvaraju kut 51°. Kolika je duljina težišnice treće stranice trokuta?

Rješenje 037



Uporabit ćemo kosinusov poučak:

$$(2t)^2 = 36^2 + 25^2 - 2 \cdot 36 \cdot 25 \cdot \cos 51^0 \Rightarrow 2t = \sqrt{36^2 + 25^2 - 2 \cdot 36 \cdot 25 \cdot \cos 51^0} =$$

$$= \sqrt{1296 + 625 + 1132.777} \Rightarrow 2t = 55.26 \Rightarrow t = 27.63 \ cm.$$

Vježba 037

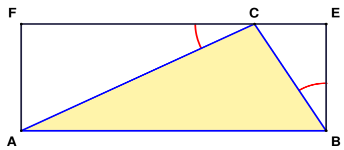
Dvije stranice trokuta imaju duljine 25 cm i 36 cm, te zatvaraju kut 60º. Kolika je duljina težišnice treće stranice trokuta?

Rezultat: 15.98 cm.

Zadatak 038 (Iva, gimnazija)

Na slici je prikazan pravokutnik ABEF i trokut ABC. Kutovi ACF i CBE su jednaki. Uz to je $|FC| = 6$, $|CE| = 2$. Kolika je površina trokuta ABC?

Rješenje 038



$|FC| = 6, \ |CE| = 2, \ |AB| = |FE| = |FC| + |CE| = 6 + 2 = 8,$

$|BE| = |AF| = v$

Trokuti BEC i ACF slični su (imaju jednake kutove) pa vrijedi razmjer:

$$|BE| : |FC| = |CE| : |FA| \Rightarrow v : 6 = 2 : v \Rightarrow v^2 = 12 \Rightarrow v = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Površina trokuta ABC iznosi:

$$P_{ABC} = \frac{|AB| \cdot v}{2} = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Vježba 038

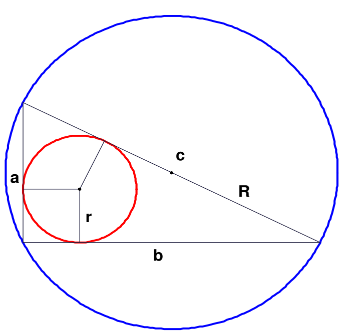
Na slici je prikazan pravokutnik ABEF i trokut ABC. Kutovi ACF i CBE su jednaki. Uz to je $|FC| = 6$, $|CE| = 2$. Kolika je površina trokuta BEC?

Rezultat: $2\sqrt{3}$.

Zadatak 039 (Iva, gimnazija)

Neka su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta upisanog u kružnicu dijametra (promjera) D. Promjer kružnice upisane u trokut označimo s d. Koliko je d + D?

Rješenje 039



Za pravokutan trokut ABC vrijede relacije:

$$r = \frac{a + b - c}{2} \quad , \quad R = \frac{c}{2},$$

gdje je r polumjer upisane kružnice, R polumjer opisane kružnice trokutu. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} d = 2r \ , \ r = \dfrac{a + b - c}{2} \\ D = 2R \ , \ R = \dfrac{c}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2r = a + b - c \\ 2R = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d = a + b - c \\ D = c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = a + b - D \Rightarrow d + D = a + b.$$

Vježba 039

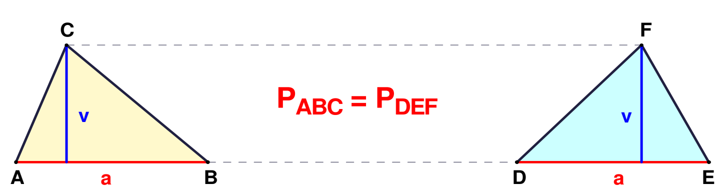
Neka su 6 i 8 duljine kateta pravokutnog trokuta upisanog u kružnicu dijametra (promjera) D. Promjer kružnice upisane u trokut označimo s d. Koliko je d + D?

Rezultat: 14.

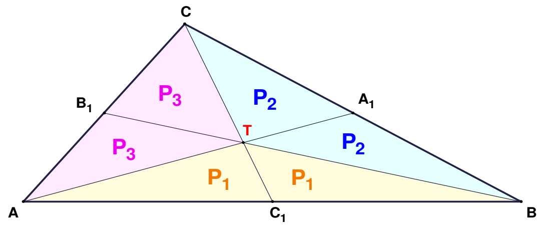
Zadatak 040 (Marina, gimnazija)

Dokaži da težišnice trokuta dijele trokut na šest dijelova jednakih površina.

Rješenje 040



Sa slike vidi se:



$$\left|AC_1\right| = \left|C_1B\right|, \ \left|BA_1\right| = \left|A_1C\right|, \ \left|CB_1\right| = \left|B_1A\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 + 2 \cdot P_3 = P_1 + 2 \cdot P_2 \\ 2 \cdot P_1 + P_2 = 2 \cdot P_3 + P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_3 = P_2 \\ P_1 = P_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = P_2 = P_3.$$

Vježba 040

Dokaži da težišnica trokuta dijeli trokut na dva dijela jednakih površina.

Rezultat: Slično kao u zadatku.