Zadatak 001 (Tomislav, gimnazija)

Nađite sve pravokutne trokute čije su stranice tri uzastopna parna broja.

Rješenje 001

1.inačica

Opća formula za parne brojeve je 2n, $n \in N$.

Budući da se parni brojevi povećavaju za 2, možemo tri uzastopna parna broja ovako zapisati:

$$2n-2,\ 2n,\ 2n+2.$$

Najveći broj je hipotenuza pravokutnog trokuta:

$$a=2n-2,\ b=2n,\ c=2n+2.$$

Iz Pitagorinog poučka slijedi:

$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow (2n-2)^2+(2n)^2=(2n+2)^2 \Rightarrow 4n^2-8n+4+4n^2=4n^2+8n+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4n^2-16n=0 \ / \ :4 \Rightarrow n^2-4n=0 \Rightarrow n\cdot(n-4)=0 \Rightarrow n_1=0,\ n_2=4.$$

Stranice pravokutnog trokuta su: $a=2\cdot4-2=6$, $b=2\cdot4=8$, $c=2\cdot4+2=10$.

2.inačica

Jednostavnije je iskoristiti činjenicu da parni brojevi rastu za 2.

Stavimo da je

$$a=x-2,\ b=x,\ c=x+2.$$

$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow (x-2)^2+x^2=(x+2)^2 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2=x^2+4x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-8x=0 \Rightarrow x\cdot(x-8)=0 \Rightarrow x=8.$$

Stranice pravokutnog trokuta su: $a=8-2=6$, $b=8$, $c=8+2=10$.

Vježba 001

Nađite sve pravokutne trokute čije su stranice tri uzastopna prirodna broja.

Rezultat: 3, 4, 5.

Zadatak 002 (Goga, ekonomska škola)

Neka su trokuti ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ slični. Tada je omjer polumjera kružnica upisanih trokutima jednak koeficijentu sličnostih tih trokuta. Dokažite!

Rješenje 002

Za dva trokuta ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ kažemo da su slični ako su im odgovarajuće (homologne) stranice proporcionalne, tj, ako vrijedi:

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=k.$$

Važno je zapamtiti da za površine vrijedi sljedeći omjer:

$$\frac{P_1}{P}=k^2.$$

Ako se u trokut ABC upiše kružnica polumjera r, tada se površina trokuta može izračunati pomoću formule:

$$P=r\cdot s,$$

gdje je s poluopseg trokuta:

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

I za poluopsege trokuta ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ također vrijedi omjer:

$$\frac{s_1}{s}=k.$$

Budući da su u oba trokuta ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ upisane kružnice, površine trokuta mogu se izraziti na ovaj način:

$$P = r \cdot s, \quad P_1 = r_1 \cdot s_1.$$

Iz obje formule izračunamo polumjere:

$$r = \frac{P}{s}, \quad r_1 = \frac{P_1}{s_1}.$$

Konačno napišemo omjer polumjera upisanih kružnica:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\frac{P_1}{s_1}}{\frac{P}{s}} = \frac{P_1 \cdot s}{s_1 \cdot P} = \frac{P_1 \cdot s}{s_1 \cdot P} = \frac{k^2 \cdot P \cdot s}{k \cdot s \cdot P} = \frac{k^2}{k} = k.$$

Vježba 002

Neka su trokuti ΔABC i $\Delta A_1B_1C_1$ slični. Tada je omjer opsega trokuta jednak koeficijentu sličnostih tih trokuta. Dokažite!

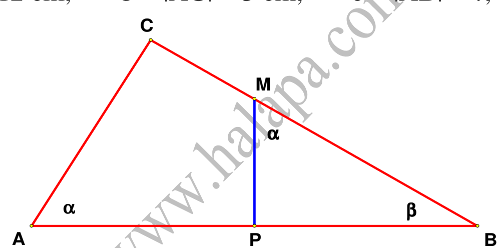
Rezultat: $O_1 : O = k.$

Zadatak 003 (Goga, ekonomska škola ☺)

Duljine kateta pravokutnog trokuta jednake su 5 cm i 12 cm. U polovištu hipotenuze podignuta je okomica na hipotenuzu. Kolika je duljina dijela te okomice koja je unutar trokuta?

Rješenje 003

$a = |BC| = 12$ cm, $b = |AC| = 5$ cm, $c = |AB| = ?$, $|PM| = ?$



Hipotenuzu pravokutnog trokuta izračunamo pomoću Pitagorinog poučka:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow c = 13 \text{ cm}.$$

Budući da je točka P polovište hipotenuze, vrijedi:

$$|PB| = \frac{13}{2} \text{ cm}.$$

Trokuti ABC i PBN su slični jer imaju iste kutove. Odgovarajuće (homologne) stranice su im proporcionalne. Možemo pisati sljedeći razmjer između njihovih stranica:

$$|AC| : |BC| = |PM| : |PB|,$$

$$|AC| \cdot |PB| = |BC| \cdot |PM|,$$

$$|PM| = \frac{|AC| \cdot |PB|}{|BC|} = \frac{5 \cdot \frac{13}{2}}{12} = \frac{\frac{65}{2}}{\frac{12}{1}} = \frac{65}{24}.$$

Vježba 003

Duljine kateta pravokutnog trokuta jednake su 3 cm i 4 cm. U polovištu hipotenuze podignuta je okomica na hipotenuzu. Kolika je duljina dijela te okomice koji je unutar trokuta?

Rezultat: $\frac{15}{8}$ cm.

Zadatak 004 (Klarisa, gimnazija)

Zadan je trokut ABC tako da je |AC| = 12 cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. Odredite duljine dviju stranica ovog trokuta.

Rješenje 004

Budući da su zadani kutovi α i β, treći kut γ lako se izračuna:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \;\Rightarrow\; \gamma = 180° - (\alpha + \beta) \;\Rightarrow\; \gamma = 180° - (60° + 45°) \;\Rightarrow\; \gamma = 180° - 105° \;\Rightarrow\; \gamma = 75°.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

Budući da je zadana duljina stranice b i kutovi α i β, možemo napisati sljedeći sinusov poučak

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Sada se lako izračuna duljina stranice a.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \;\Rightarrow\; a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha \;\Rightarrow\; a = \frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{12\cdot\sin 60^0}{\sin 45^0}\; cm = 14.7\; cm.$$

Duljinu stranice c možemo dobiti na dva načina.

1.inačica

Ponovno ćemo uporabiti sinusov poučak:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \;\Rightarrow\; c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma \;\Rightarrow\; c = \frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{12\cdot\sin 75^0}{\sin 45^0}\; cm = 16.4\; cm.$$

2.inačica

Budući da su poznate duljine dviju stranica a i b i kut među njima γ, duljinu treće stranice izračunat ćemo pomoću kosinusovog poučka. Podsjetimo se kako glasi kosinusov poučak (poučak o kosinusu).

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$$

Sada dalje računamo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma = (14.7)^2 + 12^2 - 2\cdot 14.7\cdot 12\cdot\cos 75° = 216.09 + 144 - 91.31,$$

$$c^2 = 268.78 \;/\sqrt{\ }$$

$$c = 16.4\text{ cm}.$$

Vježba 004

Zadan je trokut ABC tako da je a = 4 cm, $\alpha = 35°$, $\beta = 40°$. Odredite duljine dviju stranica ovog trokuta.

Rezultat: b = 4.48 cm, c = 6.74 cm.

Zadatak 005 (Nena, gimnazija)

Duljine kateta pravokutnog trokuta su 3 i 4. Nađite R, polumjer opisane kružnice.

Rješenje 005

U pravokutnom trokutu vrijedi:

$$R = \frac{c}{2}.$$

Pomoću Pitagorinog poučka izračunamo duljinu hipotenuze:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Tada je

$$R=\frac{c}{2}=\frac{5}{2}.$$

Vježba 005

Duljine kateta pravokutnog trokuta su 6 i 8. Nađite R, polumjer opisane kružnice.

Rezultat: R = 5.

Zadatak 006 (Dijana, gimnazija)

Kružnici polumjera r = 5 opisan je pravokutni trokut duljine hipotenuze c = 29. Nađite opseg trokuta!

Rješenje 006

U pravokutnom trokutu vrijedi:

$$r=\frac{a+b-c}{2},$$

gdje su a, b i c duljine stranica, a r je polumjer upisane kružnice. Iz jednakosti:

$$r=\frac{a+b-c}{2}$$

slijedi:

$$a+b=2r+c.$$

Opseg kružnice je:

$$O=a+b+c=2r+c+c=2r+2c=2\cdot(r+c)=2\cdot(5+29)=2\cdot 34=68.$$

Vježba 006

Kružnici polumjera r = 6 opisan je pravokutni trokut duljine hipotenuze c = 25. Nađite opseg trokuta!

Rezultat: O = 62.

Zadatak 007 (Luka, tehnička škola)

U pravokutnom trokutu opseg je trostruko veći od hipotenuze c. Nađi opseg trokuta!

Rješenje 007

U pravokutnom trokutu poznato je:

$$a^2+b^2=c^2,\quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$a+b+c=3c \;\Rightarrow\; a+b=2c \;/^2 \;\Rightarrow\; a^2+2ab+b^2=4c^2 \;\Rightarrow\; 2ab+(a^2+b^2)=4c^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2ab+c^2=4c^2 \;\Rightarrow\; 2ab=3c^2 \;/:2 \;\Rightarrow\; ab=\frac{3}{2}c^2.$$

Površina iznosi:

$$P=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}c^2=\frac{3}{4}c^2.$$

Vježba 007

U pravokutnom trokutu opseg je četverostruko veći od hipotenuze c. Nađi opseg trokuta!

Rezultat: $P=2\cdot c^2$.

Zadatak 008 (Crna, gimnazija)

U pravokutnom trokutu a = 28, b + c = 98. Nađite c!

Rješenje 008

$$b+c=98 \;\Rightarrow\; c=98-b \;/^2 \;\Rightarrow\; c^2=9\,604-196b+b^2 \;\Rightarrow$$

[**Pitagorin poučak: $a^2+b^2=c^2$**]

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 9\,604 - 196b + b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 9\,604 - 196b \quad \Rightarrow \quad 28^2 + 196b = 9\,604 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 196b = 9\,604 - 784 \quad \Rightarrow \quad 196b = 8\,820 \;/ : 196 \quad \Rightarrow \quad b = 45.$$

Tada je:

$$c = 98 - b = 98 - 45 = 53.$$

Vježba 008

U pravokutnom trokutu a = 6, b + c = 18. Nađite c!

Rezultat: c = 10.

Zadatak 009 (Crna, gimnazija)

Površina jednakokračnog pravokutnog trokuta je 8. Koliko je c?

Rješenje 009

Za jednakokračan pravokutni trokut vrijedi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a^2, \quad c = a \cdot \sqrt{2}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} \cdot a^2 = 8 \;\Rightarrow\; a^2 = 16 \;/\sqrt{} \;\Rightarrow\; a = 4.$$

Hipotenuza iznosi: $c = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

Vježba 009

Površina jednakokračnog pravokutnog trokuta je 18. Koliko je c?

Rezultat: $c = 6\sqrt{2}.$

Zadatak 010 (Darjan, medicinska škola)

Izračunajte nepoznate stranice i kutove trokuta ako je zadano: a = 12, c = 14.5, α = 28°10'.

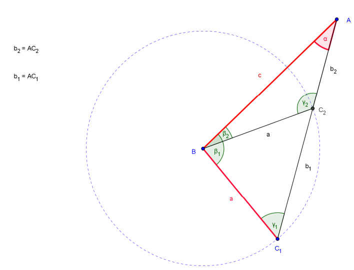
Rješenje 010

a = 12
c = 14.5
α = 28°10'
b, β, γ = ?

Kut α je nasuprot manjoj stranici a (a < c) pa zadatak ima dva rješenja.

ZAPAMTI!
Ako su dane dvije stranice trokuta i kut nasuprot manjoj, trokut nije jednoznačno određen!

Napravimo skicu trokuta i označimo crvenom bojom zadane elemente:



Najprije promatramo trokut ABC_1. Kut γ_1 dobije se pomoću sinusovog poučka:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma_1} \;\Rightarrow\; a \cdot \sin\gamma_1 = c \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow\; \sin\gamma_1 = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{14.5 \cdot \sin 28^0 10'}{12} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \sin\gamma_1 = 0.570379205.$$

U intervalu < 0, 180º > postoje dva kuta koji imaju taj sinus:

$$\gamma_1 = 34°46'36'' \quad \text{i} \quad \gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 179°59'60'' - 34°46'36'' = 145°13'24''.$$

Kut β_1 računamo iz osnovne relacije za kutove u trokutu ABC_1:

$$\alpha + \beta_1 + \gamma_1 = 180°,$$

$$\beta_1 = 180° - (\alpha + \gamma_1) = 179°59'60'' - (28°10' + 34°46'36'') = 179°59'60'' - 62°56'36'' = 117°\ 3'24''.$$

Duljinu stranice b_1 možemo dobiti na dva načina:

1.inačica (sinusov poučak)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b_2}{\sin\beta_1} \Rightarrow b_1 \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta_1 \Rightarrow b_1 = \frac{a \cdot \sin\beta_1}{\sin\alpha} = \frac{12 \cdot \sin 117^0 3'24''}{\sin 28^0 10'} = 22.64.$$

2.inačica (kosinusov poučak)

$$b_1^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta_1 \Rightarrow b_1 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta_1} = \sqrt{12^2 + 14.5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14.5 \cdot \cos 117^0 3'24''} = 22.64.$$

Iz trokuta ABC_2 izračunamo kut β_2:

$$\alpha + \beta_2 + \gamma_2 = 180°,$$

$$\beta_2 = 180° - (\alpha + \gamma_2) = 179°59'60'' - (28°10' + 145°13'24'') = 179°59'60'' - 173°23'24'' = 6°36'36''.$$

Duljinu stranice b_2 možemo ponovno dobiti na dva načina:

1.inačica (sinusov poučak)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b_2}{\sin\beta_2} \Rightarrow b_2 \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta_2 \Rightarrow b_2 = \frac{a \cdot \sin\beta_2}{\sin\alpha} = \frac{12 \cdot \sin 6^0 36'36''}{\sin 28^0 10'} = 2.93.$$

2.inačica (kosinusov poučak)

$$b_2^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta_2 \Rightarrow b_2 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta_2} = \sqrt{12^2 + 14.5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 14.5 \cdot \cos 6^0 36'36''} = 2.93.$$

Vježba 010

Izračunajte nepoznate stranice i kutove trokuta ako je zadano: $a = 15.1$, $c = 13$, $\gamma = 56°27'$.

Rezultat: $\alpha_1 = 75°28'24''$, $\alpha_2 = 104°31'36''$, $\beta_1 = 48°\ 4'36''$, $\beta_2 = 19°\ 1'24''$, $b_1 = 11.61$, $b_2 = 5.08$.

Zadatak 011 (Leda, gimnazija)

Dokažite analitički (služeći se koordinatama) da je površina trokuta, kojemu su vrhovi polovišta stranica nekog trokuta, jednaka četvrtini površine tog trokuta.

Rješenje 011

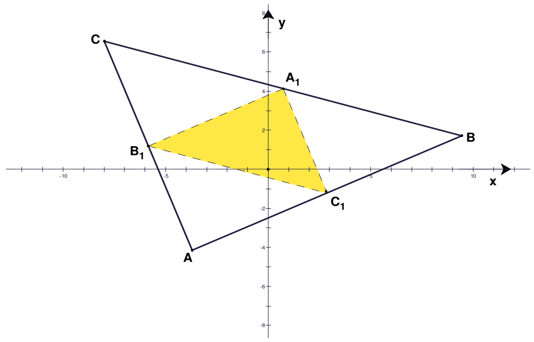
U koordinatnoj ravnini zadamo vrhove trokuta ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Površina trokuta ABC, gdje su $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ dana je formulom:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \right|. \qquad (1)$$

Ponovimo kako se dobiju koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



Točka A_1 je polovište stranice $\overline{BC}$ pa ima koordinate:

$$A_1\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

Točka B_1 je polovište stranice $\overline{AC}$ pa ima koordinate:

$$B_1\left(\frac{x_1+x_3}{2},\frac{y_1+y_3}{2}\right).$$

Točka C_1 je polovište stranice $\overline{AB}$ pa ima koordinate:

$$C_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Površina trokuta $A_1B_1C_1$ je tada dana izrazom:

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{x_2+x_3}{2}\cdot\left(\frac{y_1+y_3}{2}-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+\frac{x_1+x_3}{2}\cdot\left(\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{y_2+y_3}{2}\right)+\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\left(\frac{y_2+y_3}{2}-\frac{y_1+y_3}{2}\right)\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{x_2+x_3}{2}\cdot\frac{y_1+y_3-y_1-y_2}{2}+\frac{x_1+x_3}{2}\cdot\frac{y_1+y_2-y_2-y_3}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{y_2+y_3-y_1-y_3}{2}\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{x_2+x_3}{2}\cdot\frac{y_3-y_2}{2}+\frac{x_1+x_3}{2}\cdot\frac{y_1-y_3}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{2}\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{(x_2+x_3)\cdot(y_3-y_2)}{4}+\frac{(x_1+x_3)\cdot(y_1-y_3)}{4}+\frac{(x_1+x_2)\cdot(y_2-y_1)}{4}\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left|(x_2+x_3)\cdot(y_3-y_2)+(x_1+x_3)\cdot(y_1-y_3)+(x_1+x_2)\cdot(y_2-y_1)\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left|x_2y_3-x_2y_2+x_3y_3-x_3y_2+x_1y_1-x_1y_3+x_3y_1-x_3y_3+x_1y_2-x_1y_1+x_2y_2-x_2y_1\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left|x_2y_3-x_2y_2+x_3y_3-x_3y_2+x_1y_1-x_1y_3+x_3y_1-x_3y_3+x_1y_2-x_1y_1+x_2y_2-x_2y_1\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left|x_2y_3-x_3y_2-x_1y_3+x_3y_1+x_1y_2-x_2y_1\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left|x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)\right|,$$

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)\right|=[\text{zbog }(1)]=\frac{1}{4}\cdot P_{ABC}.$$

Može se pisati i ovako:

$$P_{ABC}=4\cdot P_{A_1B_1C_1}.$$

Vježba 011

Izvedite analitički (služeći se koordinatama) formulu za udaljenost dviju točaka u općem položaju.

Rezultat: $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$

Zadatak 012 (Matija, tehnička škola)

Stranice trokuta su a = $\sqrt{2-\sqrt{3}}$, b = 1, c = 1. Koliki je kut nasuprot stranice a?

Rješenje 012

Budući da su zadane sve tri stranice trokuta, uporabit ćemo kosinusov poučak:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}=\frac{1^2+1^2-\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{1+1-2+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=30^0=\frac{\pi}{6}.$$

Vježba 012

Stranice trokuta su a =5 b = 4, c = 3. Koliki je kut nasuprot stranice a?

Rezultat: $\alpha=90^0=\frac{\pi}{2}.$

Zadatak 013 (Matija, tehnička škola)

Koliko iznosi površina trokuta sa stranicama a = 3, b = 4, c = 7?

Rješenje 013

Provjerimo je li ispunjeno osnovno svojstvo trokuta:

zbroj dviju stranica trokuta mora biti veći od treće stranice,

a + b > c, a + c > b, b + c > a.

Vidimo da je: 3 + 4 = 7, a + b = c.

Dakle, trokut ne postoji!

Vježba 013

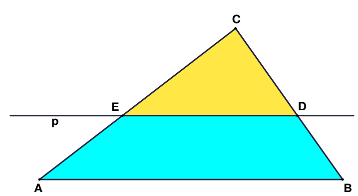
Koliko iznosi površina trokuta sa stranicama a = 6, b = 4, c = 2?

Rezultat: Trokut ne postoji.

Zadatak 014 (Ines, gimnazija)

Pravac p paralelan stranici AB trokuta ABC dijeli stranicu BC u točki D tako da je | CD | : | DB | = 10 : 6, a sam trokut dijeli na dva dijela čije se površine razlikuju za 112 cm^2. Kolika je površina trokuta ABC?

Rješenje 014



Iz

| CD | : | DB | = 10 : 6 i | CD | + | DB | = | CB |

slijedi:

$$|DB|=\frac{6\cdot|CD|}{10}=\frac{3}{5}\cdot|CD|\Rightarrow|CD|+\frac{3}{5}\cdot|CD|=|CB|\Rightarrow\frac{8}{5}\cdot|CD|=|CB|\;/\cdot\frac{5}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|CD|=\frac{5}{8}\cdot|CB|.$$

Trokuti ABC i EDC su slični (imaju jednake kutove), a koeficijent sličnosti je $k=\frac{5}{8}$. Tada za površinu vrijedi:

$$P_{EDC}=\left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot P_{ABC}=\frac{25}{64}\cdot P_{ABC}.$$

Površina trapeza ABDE je:

$$P_{ABDE}=P_{ABC}-P_{EDC}=P_{ABC}-\frac{25}{64}\cdot P_{ABC}=\frac{39}{64}\cdot P_{ABC}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$P_{ABDE} - P_{EDC} = 112 \Rightarrow \frac{39}{64} \cdot P_{ABC} - \frac{25}{64} \cdot P_{ABC} = 112 \Rightarrow \frac{14}{64} \cdot P_{ABC} = 112 \ / \cdot \frac{64}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = \frac{112}{1} \cdot \frac{64}{14} = 512 \ cm^2.$$

Vježba 014

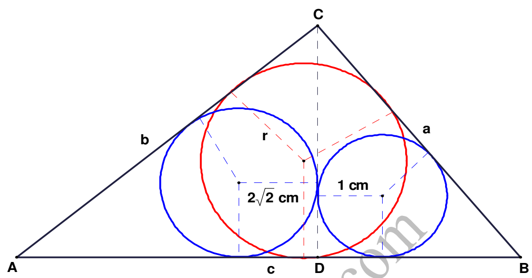
Pravac p paralelan stranici AB trokuta ABC dijeli stranicu BC u točki D tako da je $|CD| : |DB| = 3 : 2$, a sam trokut dijeli na dva dijela čije se površine razlikuju za 84 cm^2. Kolika je površina trokuta ABC?

Rezultat: 300 cm^2.

Zadatak 015 (Ines, gimnazija)

Neka je u pravokutnom trokutu ABC kut od 90º u vrhu C i neka je D podnožje visine iz vrha C na hipotenuzu AB. Ako su oba polumjera kružnica upisanih u trokute ADC i DBC redom jednaki 1 cm i $2\sqrt{2}$ cm, odredite polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

Rješenje 015



Katete a i b trokuta ABC su hipotenuze trokuta DBC i ADC. Trokuti ADC, DBC i ABC su slični (imaju jednake kutove) pa su im odgovarajući (homologni) elementi proporcionalni. Tada su i hipotenuze a, b i c redom trokuta DBC, ADC i ABC proporcionalne.

Budući da vrijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{2}}{1} \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \cdot b.$$

Uporabom Pitagorinog poučka dobije se:

$$c^2 = a^2 + b^2 = \left(2\sqrt{2} \cdot b\right)^2 + b^2 = 8b^2 + b^2 = 9b^2 \Rightarrow c = 3b.$$

U trokutima ABC i ADC vrijedi:

$$\frac{c}{b} = \frac{r}{1} \Rightarrow b \cdot r = c \Rightarrow b \cdot r = 3b \ /:b \Rightarrow r = 3.$$

Polumjer kružnice upisane trokutu ABC je r = 3 cm.

Vježba 015

Neka je u pravokutnom trokutu ABC kut od 90º u vrhu C i neka je D podnožje visine iz vrha C na hipotenuzu AB. Ako su oba polumjera kružnica upisanih u trokute ADC i DBC redom jednaki 1 cm i $\sqrt{15}$ cm, odredite polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

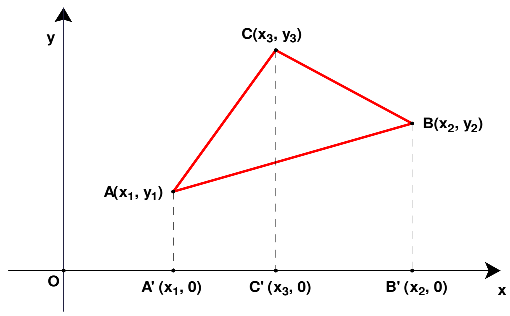
Rezultat: 4 cm.

Zadatak 016 (Ana, Ivana, Zoran, gimnazija)

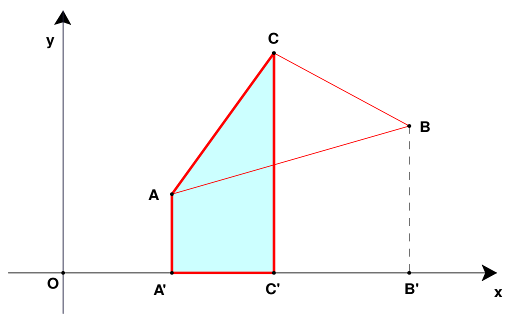
Izvedite formulu za površinu trokuta zadanog koordinatama njegovih vrhova.

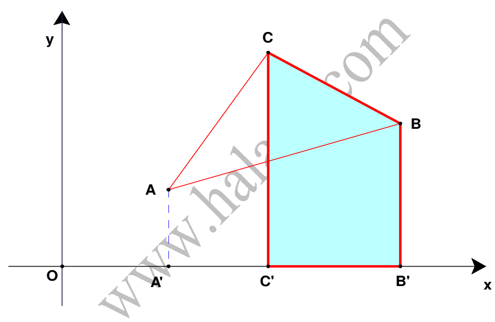
Rješenje 016

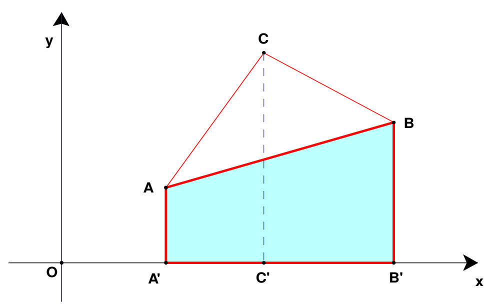
Neka su u koordinatnoj ravnini zadani vrhovi trokuta ABC: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.
Gledaj sliku!



Uočimo na slici tri trapeza: AA'C'C, CC'B'B i AA'B'B.



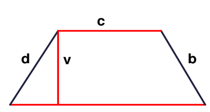




Površina trokuta ABC jednaka je zbroju površina trapeza AA'C'C i CC'B'B umanjenom za površinu trapeza AA'B'B:

$$P_{ABC} = P_{AA'C'C} + P_{CC'B'B} - P_{AA'B'B}.$$

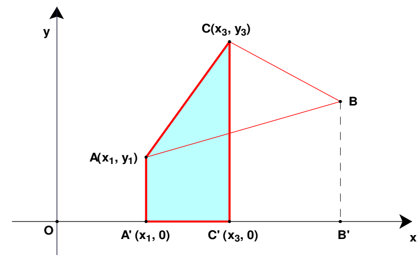
Podsjetimo se formule za površinu trapeza:



$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

Odredimo površinu svakog od uočenih trapeza:

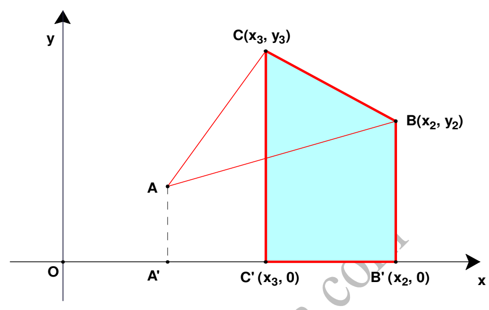
Trapez AA'C'C



Osnovice trapeza AA'C'C su $|CC'| = y_3$, $|AA'| = y_1$, a visina je $|A'C'| = x_3 - x_1$, te je površina

$$P_{AA'C'C} = \frac{y_3 + y_1}{2} \cdot (x_3 - x_1).$$

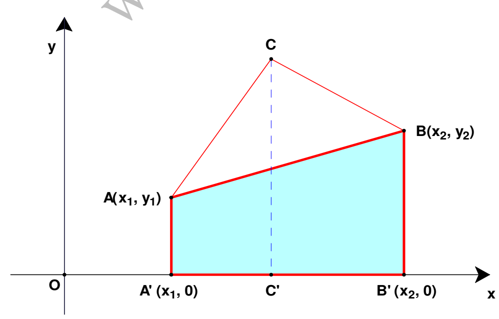
Trapez CC'B'B



Osnovice trapeza CC'B'B su $|CC'| = y_3$, $|BB'| = y_2$, a visina je $|C'B'| = x_2 - x_3$, te je površina

$$P_{CC'B'B} = \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_3).$$

Trapez AA'B'B



Osnovice trapeza AA'B'B su $|BB'| = y_2$, $|AA'| = y_1$, a visina je $|A'B'| = x_2 - x_1$, te je površina

$$P_{AA'B'B} = \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot (x_2 - x_1).$$

Površina trokuta ABC sada je

$$P_{ABC} = P_{AA'C'C} + P_{CC'B'B} - P_{AA'B'B} =$$

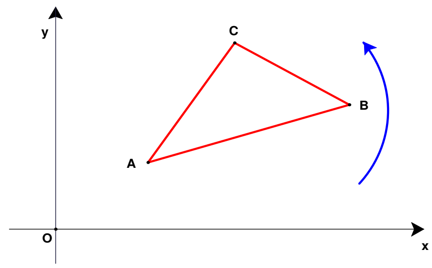
$$= \frac{y_3 + y_1}{2} \cdot (x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_3) - \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot (x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[(y_3 + y_1) \cdot (x_3 - x_1) + (y_3 + y_2) \cdot (x_2 - x_3) - (y_2 + y_1) \cdot (x_2 - x_1) \right] =$$

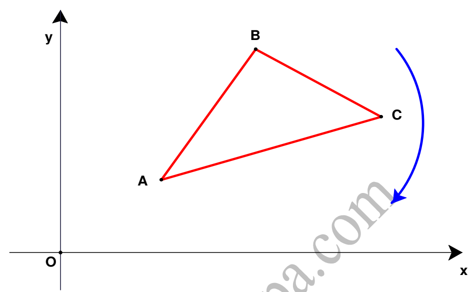
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[y_3 x_3 - y_3 x_1 + y_1 x_3 - y_1 x_1 + y_3 x_2 - y_3 x_3 + y_2 x_2 - y_2 x_3 - y_2 x_2 + y_2 x_1 - y_1 x_2 + y_1 x_1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-y_3 x_1 + y_1 x_3 + y_3 x_2 - y_2 x_3 + y_2 x_1 - y_1 x_2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[x_1 \cdot \left(y_2 - y_3 \right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1 \right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2 \right) \right].$$

Ova formula vrijedi ako su vrhovi označeni u pozitivnom smislu (u smjeru kazaljke na satu), kao na slici.



Ako su vrhovi označeni u negativnom smislu (u smjeru kazaljke na satu),



tada gornji izraz ima negativnu vrijednost, te treba uzeti njegovu apsolutnu vrijednost kao rezultat.

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot \left(y_2 - y_3 \right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1 \right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2 \right) \right|.$$

Vježba 016

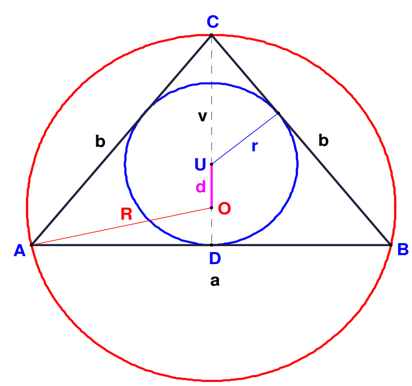
Izračunajte površinu trokuta ABC ako je A(2, – 2), B(0, 4), C(4, 2).

Rezultat: P = 10.

Zadatak 017 (Ines, gimnazija)

Jednakokračnom trokutu osnovice 12 i kraka 10 opisana je i upisana kružnica. Koliko iznosi udaljenost središta tih kružnica?

Rješenje 017



a = | AB | = 12, b = | BC | = | AC | = 10, v = | CD |, R = | CO |, r = | DU |

Ponovimo neke formule za površinu kosokutnog trokuta. Ako je zadana duljina osnovice a i pripadna visina v, vrijedi:

$$P = \frac{a \cdot v}{2}.$$

Ako su zadane duljine sve tri stranice a, b, c, polumjer r upisane kružnice i polumjer R opisane kružnice, vrijedi:

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}, \quad P = r \cdot s, \text{ gdje je } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Sa slike vidi se da je:

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow v = 8.$$

Površina trokuta ABC je:

$$P = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48.$$

Polumjer opisane kružnice iznosi:

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} \Rightarrow [\text{trokut je jednakokračan}] \Rightarrow P = \frac{a \cdot b^2}{4 \cdot R} \Rightarrow R = \frac{a \cdot b^2}{4 \cdot P} = \frac{12 \cdot 10^2}{4 \cdot 48} = \frac{300}{48} = 6.25.$$

Polumjer upisane kružnice iznosi:

$$P = r \cdot s \Rightarrow r = \frac{P}{s} = \frac{P}{\frac{a+b+c}{2}} \Rightarrow [\text{trokut je jednakokračan}] \Rightarrow r = \frac{2 \cdot P}{a + 2b} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot 48}{12 + 2 \cdot 10} = \frac{96}{32} = 3.$$

Sa slike je:

$$|CD| = |CO| + |OD| \quad , \quad |CD| = |CO| + |DU| - |OU|,$$

$$v = R + r - d \quad \Rightarrow \quad d = R + r - v = 6.25 + 3 - 8 = 1.25.$$

Vježba 017

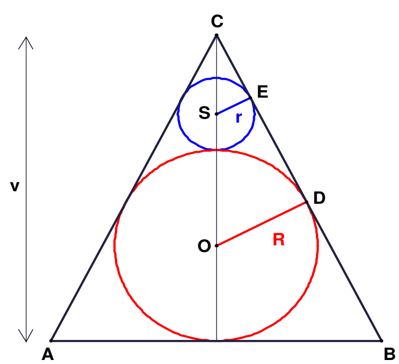
Jednakokračnom trokutu osnovice 16 i kraka 10 opisana je i upisana kružnica. Koliko iznosi udaljenost središta tih kružnica?

Rezultat: 5.

Zadatak 018 (Ira, gimnazija)

Visina na osnovicu jednakokračnog trokuta iznosi 8 cm, a polumjer trokutu upisane kružnice je 2 cm. Koliki je polumjer kružnice koja dira upisanu kružnicu i krakove trokuta?

Rješenje 018



Sa slike vidi se da su trokuti COD i CSE slični (jedan kut zajednički, a jedan pravi).

$$\Delta COD \sim \Delta CSE \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{|CS|}{|CO|} = \frac{v - 2R - r}{v - R} \Rightarrow r \cdot (v - R) = R \cdot (v - 2R - r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \cdot v - r \cdot R = R \cdot v - 2 \cdot R^2 - R \cdot r \Rightarrow r \cdot v = R \cdot (v - 2R) \Rightarrow r = \frac{R \cdot (v - 2R)}{v} = \frac{2 \cdot (8 - 4)}{8} = 1 \text{ cm}.$$

Vježba 018

Visina na osnovicu jednakokračnog trokuta iznosi 16 cm, a polumjer trokutu upisane kružnice je 4 cm. Koliki je polumjer kružnice koja dira upisanu kružnicu i krakove trokuta?

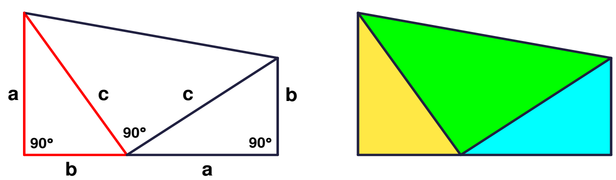
Rezultat: 2 cm.

Zadatak 019 (Ivana, Ana, Sandra, Nina, gimnazija)

Izvedi dokaz Pitagorinog poučka.

Rješenje 019

Dokaz Pitagorinog poučka prema američkom predsjedniku J. A. Garfieldu (1831. – 1881.).



Sa slike vidi se da je površina trapeza jednaka zbroju površina triju pravokutnih trokuta iz kojih je složen.

$$\frac{a+b}{2}\cdot(a+b)=2\cdot\frac{a\cdot b}{2}+\frac{c^2}{2}\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ (a+b)^2=2ab+c^2\ \Rightarrow a^2+2ab+b^2=2ab+c^2\ \Rightarrow\ a^2+b^2=c^2.$$

Vježba 019

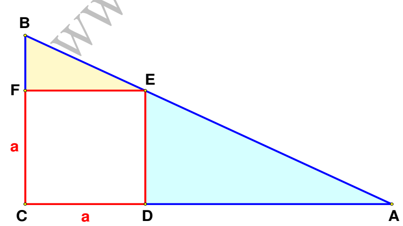
Dokaži da je trokut sa stranicama a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm pravokutan trokut.

Rezultat: U literaturi je poznat kao "egipatski trokut".

Zadatak 020 (Marko, gimnazija, Hrvoje, tehnička škola)

U pravokutni trokut s katetama duljine 6 i 8 upisan je kvadrat, tako da mu se jedan vrh podudara s vrhom pravog kuta. Kolika je duljina stranice kvadrata?

Rješenje 020



$$|CA| = 8,\ |CB| = 6,\ |CD| = |CF| = |DE| = |FE| = a,$$
$$|DA| = |CA| - |CD| = 8 - a,\ |FB| = |CB| - |CF| = 6 - a.$$

Pravokutni trokuti ΔDAE i ΔFEB su slični (imaju jednake kutove) pa vrijedi razmjer:

$$|DA| : |DE| = |FE| : |FB| \quad \Rightarrow \quad (8-a) : a = a : (6-a) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (8-a)\cdot(6-a) = a^2 \quad \Rightarrow \quad 48 - 8a - 6a + a^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad -14a = -48\ /:(-14)\ \Rightarrow\ a=\frac{48}{14}=\frac{24}{7}.$$

Vježba 020

U pravokutni trokut s katetama duljine 6 i 8 upisan je kvadrat, tako da mu se jedan vrh podudara s vrhom pravog kuta. Kolika je površina tog kvadrata?

Rezultat: $\frac{576}{49}$.