

Zadatak 001 (Katarina, osnovna škola)

Riješi sustav jednačbi:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 3 \cdot y &= 5 \\ 5 \cdot x + 2 \cdot y &= 7. \end{aligned}$$

Rješenje 001

Sustav ćemo riješiti metodom suprotnih koeficijenata. Prvu jednačbu pomnožimo brojem -2 , a drugu brojem 3 . Tako dobijemo suprotne brojeve -6 i 6 uz nepoznanicu y .

$$\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 5 \quad / \cdot (-2) \\ 5 \cdot x + 2 \cdot y = 7 \quad / \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \cdot x - 6 \cdot y = -10 \\ 15 \cdot x + 6 \cdot y = 21 \end{cases} \Rightarrow 11 \cdot x = 11 \quad / : 11 \Rightarrow x = 1.$$

Uvrstimo $x = 1$ u jednu jednačbu. Na primjer,

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 5 \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot y = 5 \Rightarrow 2 + 3 \cdot y = 5 \Rightarrow 3 \cdot y = 5 - 2 \Rightarrow 3 \cdot y = 3 \quad / : 3 \Rightarrow y = 1.$$

Rezultat: $(x, y) = (1, 1)$.

Vježba 001

Riješi sustav jednačbi:

$$\begin{aligned} 5 \cdot x + 3 \cdot y &= 11 \\ 3 \cdot x + 2 \cdot y &= 7. \end{aligned}$$

Rezultat: $(1, 2)$.

Zadatak 002 (Vanja, osnovna škola)

Riješi sustav jednačbi:

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ (x - 22) : (y - 13) &= 4 : 1. \end{aligned}$$

Rješenje 002

Izraz oblika

$$a : b = c : d$$

zove se razmjer i čita "a naprama be jednako je ce naprama de". U srednjoj školi uči se da je razmjer jednakost dvaju jednakih omjera. Glavno svojstvo razmjera je:

Umnožak vanjskih članova razmjera jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera:

$$a : b = c : d$$

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

U zadatku se zadani razmjer ovako rješava:

$$(x - 22) : (y - 13) = 4 : 1,$$

$$1 \cdot (x - 22) = 4 \cdot (y - 13) \Rightarrow x - 22 = 4 \cdot y - 52 \Rightarrow x - 4 \cdot y = -52 + 22 \Rightarrow x - 4 \cdot y = -30.$$

Dobili smo dvije jednačbe s dvije nepoznanice.

$$\begin{aligned} x + y &= 50 \\ x - 4 \cdot y &= -30. \end{aligned}$$

Riješit ćemo ih metodom suprotnih koeficijenata. Prvu jednačbu pomnožimo brojem 4 .

$$\begin{cases} x + y = 50 \quad / \cdot 4 \\ x - 4 \cdot y = -30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot x + 4 \cdot y = 200 \\ x - 4 \cdot y = -30 \end{cases} \Rightarrow 5 \cdot x = 170 \Rightarrow 5 \cdot x = 170 \quad / : 5 \Rightarrow x = 34.$$

Nepoznanicu y dobijemo iz jednačbe $x + y = 50$:

$$34 + y = 50 \Rightarrow y = 50 - 34 \Rightarrow y = 16.$$

Rješenje je: $x = 34$, $y = 16$ ili $(x, y) = (34, 16)$.

Vježba 002

Riješi sustav jednačbi:

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ (x + 3) : (y + 2) &= 2 : 1. \end{aligned}$$

Rezultat: $x = 5$, $y = 2$ ili $(x, y) = (5, 2)$.

Zadatak 003 (Jelena, osnovna škola)

Dva se broja odnose kao 2 : 3. Pribrojimo li prvome broju 1, a drugome 7, dobiveni zbrojevi odnose se kao 1 : 2. Koji su to brojevi?

Rješenje 003

Označimo prvi broj slovom x , a drugi slovom y . Rečenicu "Dva se broja odnose kao 2 : 3." zapisujemo ovako:

$$x : y = 2 : 3.$$

Rečenicu "Pribrojimo li prvom broju 1, a drugom 7, dobiveni se zbrojevi odnose kao 1 : 2." pišemo na ovaj način:

$$(x + 1) : (x + 7) = 1 : 2.$$

Malo ponovimo razmjere!

Izraz oblika

$$a : b = c : d$$

zove se razmjer i čita "a naprama be jednako je ce naprama de". U srednjoj školi uči se da je razmjer jednakost dvaju jednakih omjera. Glavno svojstvo razmjera je:

Umnožak vanjskih članova razmjera jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera:

$$a : b = c : d$$

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

U zadatku su zadana dva razmjera:

$$x : y = 2 : 3,$$

$$(x + 1) : (y + 7) = 1 : 2.$$

Dalje računamo:

$$3 \cdot x = 2 \cdot y,$$

$$2 \cdot (x + 1) = 1 \cdot (y + 7).$$

Riješimo se zagrade u drugoj jednadžbi i sve prebacimo na lijevu stranu:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x + 2 = y + 7 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x - y = 7 - 2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x - y = 5 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ 2 \cdot x - y = 5 \cdot (-2) \end{array} \right\} &\Rightarrow \\ &&&&\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ -4 \cdot x + 2 \cdot y = -10 \end{array} \right\} &\Rightarrow -x = -10 \cdot (-1) &\Rightarrow x = 10. \end{aligned}$$

Nepoznanicu y dobijemo iz jednadžbe $3x - 2y = 0$:

$$3 \cdot 10 - 2y = 0 \Rightarrow 30 - 2y = 0 \Rightarrow -2y = -30 \cdot (-2) \Rightarrow y = 15.$$

Rješenje je: $x = 10$, $y = 15$ ili $(x, y) = (10, 15)$.

Vježba 003

Dva se broja odnose kao 2 : 3. Pribrojimo li prvome broju 16, a drugome 4, dobiveni zbrojevi odnose se kao 2 : 1. Koji su to brojevi?

Rezultat: $x = 4$, $y = 6$ ili $(x, y) = (4, 6)$.

Zadatak 004 (Jelena, osnovna škola)

Znamenka na mjestu desetica u dvoznamenkastom broju je tri puta veća od znamenke na mjestu jedinica. Zamijenimo li redoslijed znamenki u broju i zatim novom broju pribrojimo zbroj njegovih znamenki, rezultat je 34. Koji je to broj?

Rješenje 004

Malo teorije!

Svaki se dvoznamenkasti broj može zapisati, pomoću baze 10, na sljedeći način (na primjer):

$$15 = 10 + 5 = 1 \cdot 10 + 5,$$

$$26 = 20 + 6 = 2 \cdot 10 + 6,$$

$$87 = 80 + 7 = 8 \cdot 10 + 7.$$

Promatramo li dvoznamenkasti broj u općem slučaju možemo ga ovako napisati:

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b = 10 \cdot a + b,$$

gdje su a i b znamenke od 0 do 9 (znamenka a ne smije biti 0 jet to onda nije dvoznamenkasti broj). Ako dvoznamenkasti broj zapišemo u obliku \overline{ab} , tada je a znamenka desetica, b znamenka jedinica.

Prvu rečenicu:

"Znamenka na mjestu desetica u dvoznamenkastom broju je tri puta veća od znamenke na mjestu jedinica." zapisujemo ovako:

$$a = 3 \cdot b.$$

Drugu rečenicu:

"Zamijenimo li redoslijed znamenki u broju i zatim novom broju pribrojimo zbroj njegovih znamenki, rezultat je 34."

zapisujemo na sljedeći način:

$$\overline{ba} + (a + b) = 34.$$

Dobili smo sustav od dvije jednadžbe koji znamo riješiti:

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ \overline{ba} + (a + b) = 34 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 10 \cdot b + a + (a + b) = 34 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 10 \cdot b + a + a + b = 34 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 2 \cdot a + 11 \cdot b = 34 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot b + 11 \cdot b = 34 \Rightarrow 6 \cdot b + 11 \cdot b = 34 \Rightarrow 17 \cdot b = 34 \quad /:17 \Rightarrow b = 2.$$

Znamenka a dobije se:

$$a = 3 \cdot b = 3 \cdot 2 = 6.$$

To je broj 62.

Vježba 004

Znamenka na mjestu desetica u dvoznamenkastom broju je dva puta veća od znamenke na mjestu jedinica. Zamijenimo li redoslijed znamenki u broju i zatim novom broju pribrojimo zbroj njegovih znamenki, rezultat je 30. Koji je to broj?

Rezultat: 42.

Zadatak 005 (Berina, osnovna škola)

Berina ☺ je imala zadatak da pomnoži 78 sa dvoznamenkastim brojem u kojem je znamenka desetica 3 puta veća od znamenke jedinica. Greškom ona je zamijenila znamenke u drugom faktoru i tako dobila umnožak (produkt) manji od točnog rezultata za 2808. Koji je to umnožak (produkt)?

Rješenje 005

Malo teorije!

Svaki se dvoznamenkasti broj može zapisati, pomoću baze 10, na sljedeći način (na primjer):

$$15 = 10 + 5 = 1 \cdot 10 + 5,$$

$$26 = 20 + 6 = 2 \cdot 10 + 6,$$

$$87 = 80 + 7 = 8 \cdot 10 + 7.$$

Promatramo li dvoznamenkasti broj u općem slučaju možemo ga ovako napisati:

$$\overline{ab} = a \cdot 10 + b = 10 \cdot a + b,$$

gdje su a i b znamenke od 0 do 9 (znamenka a ne smije biti 0 jet to onda nije dvoznamenkasti broj). Ako dvoznamenkasti broj zapišemo u obliku \overline{ab} , tada je a znamenka desetica, b znamenka jedinica. Kako zapisati da je broj x tri puta veći od broja y?

$$x = 3 \cdot y \quad \text{ili} \quad \frac{x}{3} = y \quad \text{ili} \quad \frac{x}{y} = 3.$$

Kako zapisati da je broj x n puta veći od broja y?

$$x = n \cdot y \quad \text{ili} \quad \frac{x}{n} = y \quad \text{ili} \quad \frac{x}{y} = n.$$

Kako zapisati da je broj y za n manji od broja x ?

$$x = y + n \quad \text{ili} \quad x - n = y \quad \text{ili} \quad x - y = n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

1. inačica

"Znamenka na mjestu desetica u dvoznamenkastom broju je tri puta veća od znamenke na mjestu jedinica." zapisujemo ovako:

$$a = 3 \cdot b.$$

"...da pomnoži 78 sa dvoznamenkastim brojem u kojem je znamenka desetica 3 puta veća od znamenke jedinica. Greškom on je zamijenio znamenke u drugom faktoru i tako dobio umnožak manji od točnog rezultata za 2808..."

zapisujemo na sljedeći način:

$$78 \cdot \overline{ab} - 78 \cdot \overline{ba} = 2808.$$

Dobili smo sustav od dvije jednačbe sa dvije nepoznanice a i b :

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 78 \cdot \overline{ab} - 78 \cdot \overline{ba} = 2808 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 78 \cdot (\overline{ab} - \overline{ba}) = 2808 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 78 \cdot (\overline{ab} - \overline{ba}) = 2808 \quad /: 78 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ \overline{ab} - \overline{ba} = 36 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 10 \cdot a + b - (10 \cdot b + a) = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 10 \cdot a + b - 10 \cdot b - a = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 9 \cdot a - 9 \cdot b = 36 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ 9 \cdot a - 9 \cdot b = 36 \quad /: 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot b \\ a - b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cdot b - b = 4 \Rightarrow 2 \cdot b = 4 \quad /: 2 \Rightarrow b = 2. \end{aligned}$$

Znamenka a dobije se:

$$a = 3 \cdot b = 3 \cdot 2 = 6.$$

To je broj 62, a traženi umnožak iznosi:

$$78 \cdot 62 = 4836.$$

2. inačica

Ispišimo sve dvoznamenkaste brojeve za koje vrijedi:

"Znamenka na mjestu desetica u dvoznamenkastom broju je tri puta veća od znamenke na mjestu jedinica."

$$31, 62, 93.$$

Sada provjeravamo uvjete zadatka:

"...da pomnoži 78 sa dvoznamenkastim brojem u kojem je znamenka desetica 3 puta veća od znamenke jedinica. Greškom on je zamijenio znamenke u drugom faktoru i tako dobio umnožak manji od točnog rezultata za 2808..."

31	62	93
$78 \cdot 31 - 78 \cdot 13 = 2808$	$78 \cdot 62 - 78 \cdot 26 = 2808$	$78 \cdot 93 - 78 \cdot 39 = 2808$
$2418 - 1014 = 2808$	$4836 - 2028 = 2808$	$7254 - 3042 = 2808$
$1404 \neq 2808$	$2808 \neq 2808$	$4212 \neq 2808$
ili	ili	ili
$78 \cdot 31 - 78 \cdot 13 = 2808$	$78 \cdot 62 - 78 \cdot 26 = 2808$	$78 \cdot 93 - 78 \cdot 39 = 2808$
$78 \cdot (31 - 13) = 2808$	$78 \cdot (62 - 26) = 2808$	$78 \cdot (93 - 39) = 2808$
$78 \cdot 18 = 2808$	$78 \cdot 36 = 2808$	$78 \cdot 54 = 2808$
$1404 \neq 2808$	$2808 = 2808$	$4212 \neq 2808$
Nije točno	Točno je	Nije točno

To je broj 62, a traženi umnožak iznosi:

$$78 \cdot 62 = 4836.$$

Vježba 005

Znamenka na mjestu desetica u dvoznamenkastom broju je četiri puta veća od znamenke na mjestu jedinica. Zamijenimo li redoslijed znamenki u broju i zatim novom broju pribrojimo zbroj njegovih znamenki, rezultat je 38. Koji je to broj?

Rezultat: 82.

Zadatak 006 (Ivona, osnovna škola)

Zbroj dvaju brojeva je 41. Drugi broj je veći za 7 od prvog. Koji su to brojevi?

Rješenje 006

Malo teorije! ☺

Kako zapisati da je broj x za a veći od broja y ?

$$x - a = y, \quad x = y + a, \quad x - y = a.$$

Postavimo sustav jednažbi. Neka su x i y dva broja čiji je zbroj 41.

$$x + y = 41.$$

Drugi broj y je za 7 veći od prvog broja x .

$$y = x + 7.$$

Dobili smo sustav jednažbi:

$$\begin{cases} x + y = 41 \\ y = x + 7. \end{cases}$$

1. inačica (metoda supstitucije)

U nekoj jednažbi izračunat ćemo jednu nepoznanicu. Uvijek nastojimo naći nepoznanicu uz koju stoji najmanji koeficijent po apsolutnoj vrijednosti. Vrijednost za nađenu nepoznanicu uvrštavamo u drugu jednažbu.

U našem slučaju već je izračunat y u drugoj jednažbi pa ga uvrstimo u prvu jednažbu.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x + y = 41 \\ y = x + 7 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 41 \\ y = x + 7 \end{array} \right\} \Rightarrow x + x + 7 = 41 \Rightarrow x + x = 41 - 7 \Rightarrow 2 \cdot x = 34 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot x = 34 \quad /: 2 \Rightarrow x = 17. \end{aligned}$$

Tu vrijednost za x uvrstimo u $y = x + 7$.

$$y = 17 + 7 = 24.$$

Rezultat je $(x, y) = (17, 24)$.

2. inačica (metoda komparacije)

Iz obje jednažbe izračunamo istu nepoznanicu pa njihove vrijednosti kompariramo, usporedimo, tj. između nađenih vrijednosti za istu nepoznanicu stavimo znak jednakosti.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x + y = 41 \\ y = x + 7 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 41 - x \\ y = x + 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 41 - x = x + 7 \Rightarrow -x - x = 7 - 41 \Rightarrow -2 \cdot x = -34 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -2 \cdot x = -34 \quad /: (-2) \Rightarrow x = 17. \end{aligned}$$

Tada se y dobije, na primjer iz $y = x + 7$.

$$y = 17 + 7 = 24.$$

Rezultat je $(x, y) = (17, 24)$.

3. inačica (metoda suprotnih koeficijenata)

U obje jednažbe uz istu nepoznanicu nastojimo dobiti suprotne koeficijente. To su dva broja čiji je zbroj jednak 0. Da bismo dobili suprotne koeficijente moramo ili jednu ili obje jednažbe pomnožiti odgovarajućim brojevima.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x + y = 41 \\ y = x + 7 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 41 \\ -x + y = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{suprotni koeficijenti} \\ \text{su uz nepoznanicu } x \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 41 \\ -x + y = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrajamo} \\ \text{jednažbe} \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot y = 48 \Rightarrow 2 \cdot y = 48 \quad /: 2 \Rightarrow y = 24. \end{aligned}$$

Nepoznanicu x nađemo tako da $y = 24$ uvrstimo u prvu jednažbu $x + y = 41$.

$$x + 24 = 41 \Rightarrow x = 41 - 24 \Rightarrow x = 17.$$

Rezultat je $(x, y) = (17, 24)$.

Vježba 006

Zbroj dvaju brojeva je 25. Drugi broj je veći za 5 od prvog. Koji su to brojevi?

Rezultat: $(x, y) = (10, 15)$.

www.halapa.com