**Zadatak 261 (Mirko, elektrotehnička škola)**

Odredite **sup S**, **inf S**, **max S** i **min S** u skupu **R** ako je $S = \left\{ x \in R : \sqrt{x-3} \geq x-5 \right\}.$

**Rješenje 261**

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a \geq b \; , \; c < 0 \; \Rightarrow \; a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

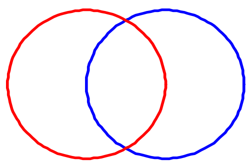
Za broj $x_0$ kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0) = 0.$$

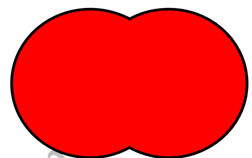
Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A \bigcup B$ unija skupova A i B,

  $A \bigcup B = \left\{ x \in U : x \in A \; ili \; x \in B \right\}$ unija skupova A i B,



A B



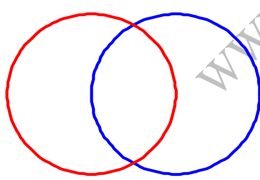
A U B

Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.

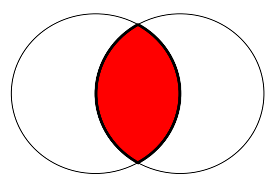
www.halapa.com

- $A \bigcap B$ presjek skupova A i B,

  $A \bigcap B = \left\{ x \in U : x \in A \; i \; x \in B \right\}$ presjek skupova A i B,



A B



$A \bigcap B$

Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.

Za neprazan skup $S \subseteq R$ kažemo da je odozgo ograničen, ako postoji bar jedan realan broj M takav da je

$$x \leq M \text{ za svako } x \in S.$$

Svaki broj M sa navedenim svojstvom zove se majoranta (gornja ograda, gornja međa) skupa S. Ako skup S nije odozgo ograničen kažemo da je odozgo neograničen.

Realan broj s zove se supremum nepraznog odozgo ograničenog skupa $S \subseteq R,$ ako s ima ova dva svojstva:

1) $s$ je majoranta od $S$, tj. $x \leq s$ za svako $x \in S$

2) $s$ je najmanja majoranta od $S$, tj. ako je $a \in R$ i $a < s$, onda postoji bar jedan element $x \in S$ takav da je $a < x$. Supremum skupa $S$ označavamo $\sup S$.

Ako je $s \in S$ supremum se zove maksimum ili najveća vrijednost, $\max S$.

Primjer

$$\sup \left[ a, b \right] = \max \left[ a, b \right] = b \quad , \quad \sup \left\langle a, b \right\rangle = b$$

$$\sup \left\langle a, b \right] = \max \left\langle a, b \right] = b \quad , \quad \sup \left[ a, b \right\rangle = b$$

Za neprazan skup $S \subseteq R$ kažemo da je odozdo ograničen, ako postoji bar jedan realan broj i takav da je

$$i \le x \text{ za svako } x \in S.$$

Svaki broj i sa navedenim svojstvom zove se minoranta (donja ograda, donja međa) skupa S. Ako skup S nije odozdo ograničen kažemo da je odozdo neograničen.
Realan broj i zove se infimum nepraznog odozdo ograničenog skupa $S \subseteq R,$ ako i ima ova dva svojstva:

1) $i$ je minoranta od $S$, tj. $i \le x$ za svako $x \in S$

2) $i$ je najveća minoranta od $S$, tj. ako je $a \in R$ i $a > i$, onda postoji bar jedan element $x \in S$ takav da je $a > x$. Infimum skupa $S$ označavamo $\inf S$.

Ako je $i \in S$ infimum se zove minimum ili najmanja vrijednost, $\min S$.
Primjer

$$\inf [a, b] = \min [a, b] = a \quad , \quad \inf \langle a, b \rangle = a$$

$$\inf \langle a, b] = a \quad , \quad \inf [a, b \rangle = \min [a, b \rangle = a$$

Za nejednadžbu oblika $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ vrijedi:

$$\sqrt{f(x)} \ge g(x) \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} f(x) \ge 0 \\ g(x) \le 0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} f(x) \ge (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \end{matrix}\right\}.$$

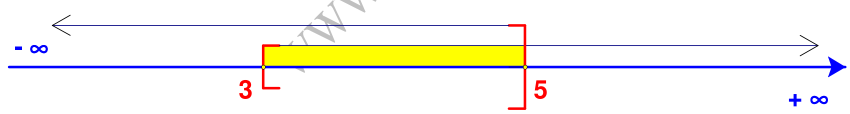
Riješimo nejednadžbu

$$\sqrt{x-3} \ge x-5.$$

www.halapa.com

Prvi slučaj

$$\sqrt{x-3} \ge x-5 \;\Rightarrow\; \left[\sqrt{f(x)} \ge g(x) \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} f(x) \ge 0 \\ g(x) \le 0 \end{matrix}\right\}\right] \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x-3 \ge 0 \\ x-5 \le 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x \ge 3 \\ x \le 5 \end{matrix}\right\}.$$




Rješenje je skup

$$S_1 = [3, 5].$$

Drugi slučaj

$$\sqrt{x-3} \ge x-5 \;\Rightarrow\; \left[\sqrt{f(x)} \ge g(x) \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} f(x) \ge (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \end{matrix}\right\}\right] \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x-3 \ge (x-5)^2 \\ x-5 \ge 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3 \ge x^2 - 10 \cdot x + 25 \\ x \ge 5 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x-3-x^2+10 \cdot x - 25 \ge 0 \\ x \ge 5 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} -x^2+11 \cdot x - 28 \ge 0 \\ x \ge 5 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -x^2+11 \cdot x - 28 \ge 0 \; / \cdot (-1) \\ x \ge 5 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x^2 - 11 \cdot x + 28 \le 0 \\ x \ge 5 \end{matrix}\right\}.$$

Trebamo riješiti nejednadžbu

$$x^2 - 11 \cdot x + 28 \le 0.$$

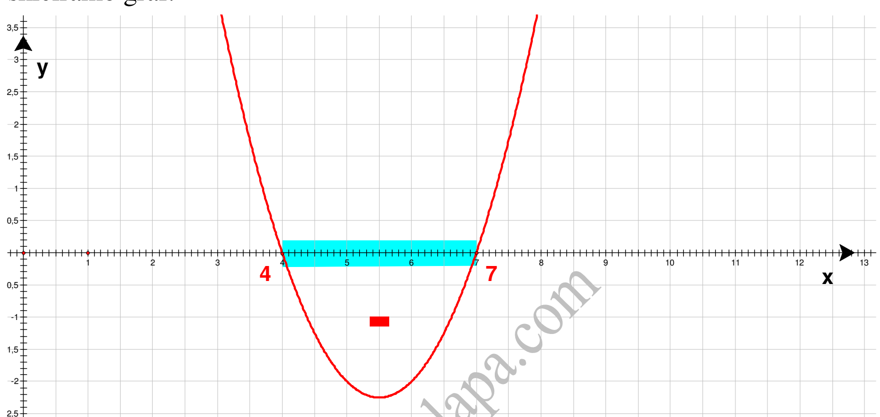
Odredimo najprije nultočke ove funkcije.

$$x^2-11\cdot x+28=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-11\cdot x+28=0 \\ a=1\ ,\ b=-11\ ,\ c=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-11\ ,\ c=28 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot 28}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm 3}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{11-3}{2} \\ x_2=\dfrac{11+3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{8}{2} \\ x_2=\dfrac{14}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{8}{2} \\ x_2=\dfrac{14}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=7 \end{array}\right\}.$$

Nakon toga skiciramo graf.

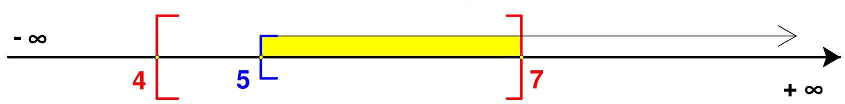



Vidimo da graf leži ispod x – osi na dijelu od prve nultočke $x_1$ do druge nultočke $x_2$. Taj skup zapisujemo

$$[x_1,\ x_2]=[4,\ 7].$$

Gledamo presjek skupova

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 5 \\ 4\leq x\leq 7 \end{array}\right\}.$$




Rješenje je skup

$$S_2=[5,\ 7].$$

Konačan skup rješenja S je unija skupova $S_1$ i $S_2$.

$$S=S_1\cup S_2 \Rightarrow S=[3,\ 5]\cup[5,\ 7] \Rightarrow S=[3,\ 7]\ \text{rubovi uključeni}.$$

Vrijedi:

$$S=[3,\ 7] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \inf\ S=\min\ S=3 \\ \sup\ S=\max\ S=7 \end{array}\right\}.$$

**Vježba 261**

Odmor!

**Rezultat:** …

www.halapa.com

**Zadatak 262 (Mirko, elektrotehnička škola)**

Odredite **sup S**, **inf S**, **max S** i **min S** u skupu **R** ako je $S=\left\{x\in R:\frac{5\cdot x-5}{x^{2}}<1\right\}.$

**Rješenje 262**

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a<b\ ,\ c<0\ \Rightarrow\ a\cdot c>b\cdot c\quad,\quad a^{2}\geq 0\ ,\ a\in R.$$

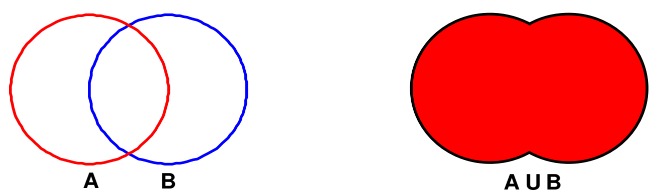
Za broj $x_0$ kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f\left(x_{\circ}\right)=0.$$

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A\bigcup B$ unija skupova A i B,

  $A\bigcup B=\left\{x\in U:x\in A\ ili\ x\in B\right\}$ unija skupova A i B,




Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.
Za neprazan skup $S\subseteq R$ kažemo da je odozgo ograničen, ako postoji bar jedan realan broj M takav da je

$$x\leq M\ \text{ za svako } x\in S.$$

Svaki broj M sa navedenim svojstvom zove se majoranta (gornja ograda, gornja međa) skupa S. Ako skup S nije odozgo ograničen kažemo da je odozgo neograničen.
Realan broj s zove se supremum nepraznog odozgo ograničenog skupa $S\subseteq R,$ ako s ima ova dva svojstva:

1) $s$ je majoranta od $S$, tj. $x\leq s$ za svako $x\in S$
2) $s$ je najmanja majoranta od $S$, tj. ako je $a\in R$ i $a<s$, onda postoji bar jedan element $x\in S$ takav da je $a<x$. Supremum skupa $S$ označavamo sup $S$.

Ako je $s\in S$ supremum se zove maksimum ili najveća vrijednost, max $S$.
Primjer

$$\sup\left[a,\ b\right]=\max\left[a,\ b\right]=b\quad,\quad\sup\left\langle a,\ b\right\rangle=b$$
$$\sup\left\langle a,\ b\right]=\max\left\langle a,\ b\right]=b\quad,\quad\sup\left[a,\ b\right\rangle=b$$

Za neprazan skup $S\subseteq R$ kažemo da je odozdo ograničen, ako postoji bar jedan realan broj i takav da je

$$i\leq x\ \text{ za svako } x\in S.$$

Svaki broj i sa navedenim svojstvom zove se minoranta (donja ograda, donja međa) skupa S. Ako skup S nije odozdo ograničen kažemo da je odozdo neograničen.
Realan broj i zove se infimum nepraznog odozdo ograničenog skupa $S\subseteq R,$ ako i ima ova dva svojstva:

1) $i$ je minoranta od $S$, tj. $i\leq x$ za svako $x\in S$
2) $i$ je najveća minoranta od $S$, tj. ako je $a\in R$ i $a>i$, onda postoji bar jedan element $x\in S$ takav da je $a>x$. Infimum skupa $S$ označavamo inf $S$.

Ako je $i\in S$ infimum se zove minimum ili najmanja vrijednost, min $S$.
Primjer

www.halapa.com

$$\inf\left[a, b\right] = \min\left[a, b\right] = a \quad , \quad \inf\left\langle a, b\right\rangle = a$$

$$\inf\left\langle a, b\right] = a \quad , \quad \inf\left[a, b\right\rangle = \min\left[a, b\right\rangle = a$$

Riješimo nejednadžbu:

$$\frac{5 \cdot x - 5}{x^2} < 1 \Rightarrow \frac{5 \cdot x - 5}{x^2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{5 \cdot x - 5}{x^2} - \frac{1}{1} < 0 \Rightarrow \frac{5 \cdot x - 5 - x^2}{x^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5 \cdot x - 5 - x^2}{x^2} < 0 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow \frac{x^2 - 5 \cdot x + 5}{x^2} > 0.$$

Primijetimo da je nazivnik $x^2$ uvijek pozitivan broj za svaki realan broj x različit od nule. Budući da je razlomak pozitivan, slijedi i brojnik mora biti pozitivan:

$$x^2 - 5 \cdot x + 5 > 0.$$

Trebamo riješiti tu nejednadžbu.
Odredimo najprije nultočke ove funkcije.

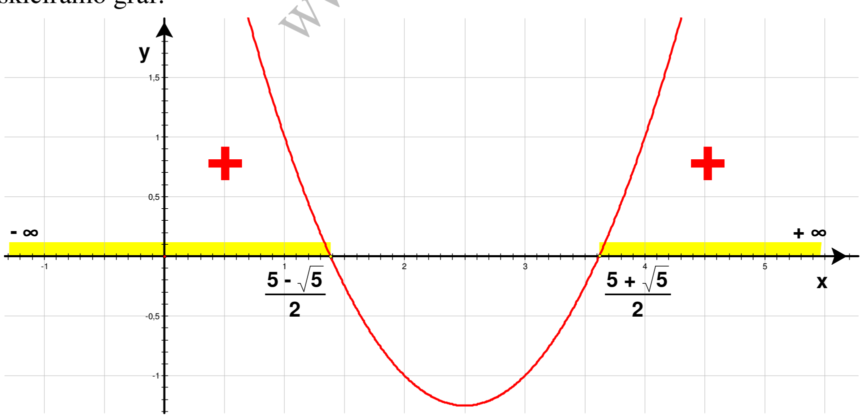
$$x^2 - 5 \cdot x + 5 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 5 \cdot x + 5 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -5 \;,\; c = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \;,\; b = -5 \;,\; c = 5 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1.38 \\ x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3.62 \end{matrix}\right\}.$$

www.halapa.com

Nakon toga skiciramo graf.




Vidimo da graf leži iznad x – osi na dijelu od – ∞ do prve nultočke $x_1$ i na dijelu od druge nultočke $x_2$ do + ∞. Taj skup zapisujemo

$$S = \left\langle -\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right\rangle$$

Vrijedi:

$$\inf S \text{ ne postoji} \;,\; \min S \text{ ne postoji}$$

$$\sup S \text{ ne postoji} \;,\; \max S \text{ ne postoji}.$$

**Vježba 262**

Odmor!

**Rezulat:** …

www.halapa.com