Zadatak 261 (Mirko, elektrotehnička škola)

Odredite **sup S**, **inf S**, **max S** i **min S** u skupu **R** ako je $S=\left\{x\in R:\sqrt{x-3}\ge x-5\right\}.$

Rješenje 261

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a\ge b \;,\; c<0 \;\Rightarrow\; a\cdot c\le b\cdot c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\ne 0 \;,\; n\ne 1.$$

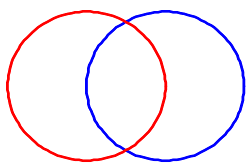
Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f\left(x_0\right)=0.$$

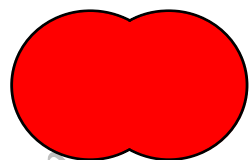
Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A\bigcup B$ unija skupova A i B,

  $A\bigcup B=\left\{x\in U: x\in A \text{ ili } x\in B\right\}$ unija skupova A i B,



A B

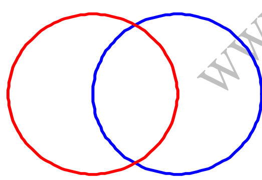


A U B

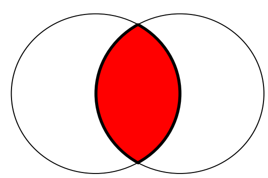
Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.

- $A\bigcap B$ presjek skupova A i B,

  $A\bigcap B=\left\{x\in U: x\in A \; i \; x\in B\right\}$ presjek skupova A i B,



A B



$A\bigcap B$

Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.
Za neprazan skup $S\subseteq R$ kažemo da je odozgo ograničen, ako postoji bar jedan realan broj M takav da je

$$x\le M \text{ za svako } x\in S.$$

Svaki broj M sa navedenim svojstvom zove se majoranta (gornja ograda, gornja međa) skupa S. Ako skup S nije odozgo ograničen kažemo da je odozgo neograničen.
Realan broj s zove se supremum nepraznog odozgo ograničenog skupa $S\subseteq R,$ ako s ima ova dva svojstva:

1) s je majoranta od S, tj. $x\le s$ za svako $x\in S$

2) s je najmanja majoranta od S, tj. ako je $a\in R$ i $a<s$, onda postoji bar jedan element $x\in S$ takav da je $a<x$. Supremum skupa S označavamo $\sup S$.

Ako je $s\in S$ supremum se zove maksimum ili najveća vrijednost, $\max S$.

Primjer

$$\sup\left[a, b\right]=\max\left[a, b\right]=b \quad , \quad \sup\left\langle a, b\right\rangle=b$$

$$\sup\left\langle a, b\right]=\max\left\langle a, b\right]=b \quad , \quad \sup\left[a, b\right\rangle=b$$

Za neprazan skup $S \subseteq R$ kažemo da je odozdo ograničen, ako postoji bar jedan realan broj i takav da je

$$i \leq x \text{ za svako } x \in S.$$

Svaki broj i sa navedenim svojstvom zove se minoranta (donja ograda, donja međa) skupa S. Ako skup S nije odozdo ograničen kažemo da je odozdo neograničen.

Realan broj i zove se infimum nepraznog odozdo ograničenog skupa $S \subseteq R,$ ako i ima ova dva svojstva:

1) i je minoranta od S, tj. $i \leq x$ za svako $x \in S$

2) i je najveća minoranta od S, tj. ako je $a \in R$ i $a > i$, onda postoji bar jedan element $x \in S$ takav da je $a > x$. Infimum skupa S označavamo $\inf S$.

Ako je $i \in S$ infimum se zove minimum ili najmanja vrijednost, $\min S$.

Primjer

$$\inf [a, b] = \min [a, b] = a \quad , \quad \inf \langle a, b \rangle = a$$

$$\inf \langle a, b] = a \quad , \quad \inf [a, b \rangle = \min [a, b \rangle = a$$

Za nejednadžbu oblika $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ vrijedi:

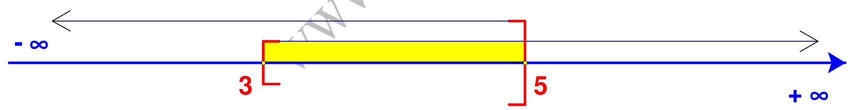
$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} f(x) \geq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{matrix}\right\}.$$

Riješimo nejednadžbu

$$\sqrt{x-3} \geq x-5.$$

Prvi slučaj

$$\sqrt{x-3} \geq x-5 \Rightarrow \left[\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{matrix}\right\} \right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3 \geq 0 \\ x-5 \leq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \geq 3 \\ x \leq 5 \end{matrix}\right\}.$$



Rješenje je skup

$$S_1 = [3, 5].$$

Drugi slučaj

$$\sqrt{x-3} \geq x-5 \Rightarrow \left[\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(x) \geq (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{matrix}\right\} \right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3 \geq (x-5)^2 \\ x-5 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3 \geq x^2 - 10 \cdot x + 25 \\ x \geq 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3-x^2+10 \cdot x - 25 \geq 0 \\ x \geq 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x^2+11 \cdot x - 28 \geq 0 \\ x \geq 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -x^2+11 \cdot x - 28 \geq 0 \;/ \cdot (-1) \\ x \geq 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-11 \cdot x + 28 \leq 0 \\ x \geq 5 \end{matrix}\right\}.$$

Trebamo riješiti nejednadžbu

$$x^2 - 11 \cdot x + 28 \leq 0.$$

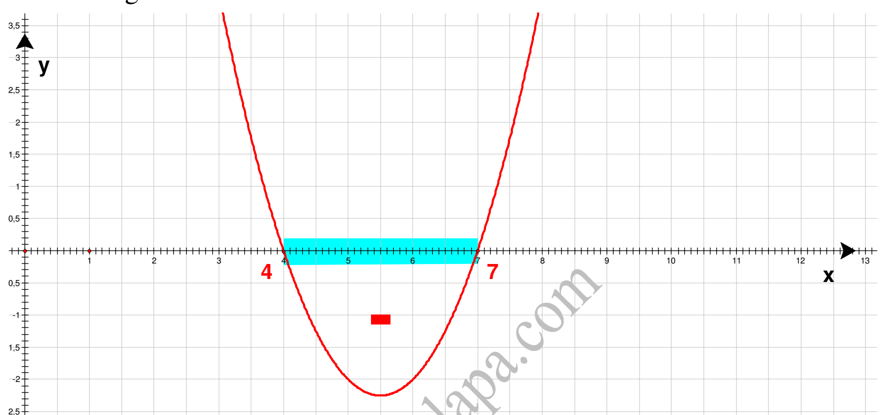
Odredimo najprije nultočke ove funkcije.

$$x^2-11\cdot x+28=0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x^2-11\cdot x+28=0 \\ a=1\;,\;b=-11\;,\;c=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\;,\;b=-11\;,\;c=28 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot 28}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm 3}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{11-3}{2} \\ x_2=\dfrac{11+3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{8}{2} \\ x_2=\dfrac{14}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{8}{2} \\ x_2=\dfrac{14}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=7 \end{array}\right\}.$$

Nakon toga skiciramo graf.



Vidimo da graf leži ispod x – osi na dijelu od prve nultočke x_1 do druge nultočke x_2. Taj skup zapisujemo

$$[x_1, x_2]=[4, 7].$$

Gledamo presjek skupova

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 5 \\ 4\leq x\leq 7 \end{array}\right\}.$$

Rješenje je skup

$$S_2=[5, 7].$$

Konačan skup rješenja S je unija skupova S_1 i S_2.

$$S=S_1\cup S_2 \;\Rightarrow\; S=[3, 5]\cup[5, 7] \;\Rightarrow\; S=[3, 7] \text{ rubovi uključeni}.$$

Vrijedi:

$$S=[3, 7] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \inf\; S=\min\; S=3 \\ \sup\; S=\max\; S=7 \end{array}\right\}.$$

Vježba 261

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 262 (Mirko, elektrotehnička škola)

Odredite **sup S**, **inf S**, **max S** i **min S** u skupu **R** ako je $S=\left\{x\in R:\frac{5\cdot x-5}{x^2}<1\right\}.$

Rješenje 262

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a<b\ ,\ c<0\ \Rightarrow\ a\cdot c>b\cdot c\quad,\quad a^2\geq 0\ ,\ a\in R.$$

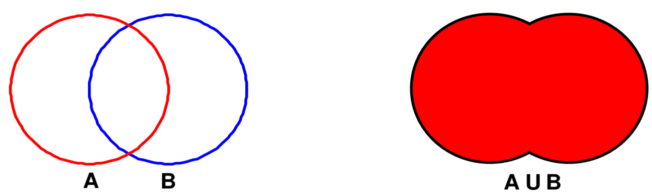
Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f\left(x_\circ\right)=0.$$

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A\bigcup B$ unija skupova A i B,

  $A\bigcup B=\left\{x\in U: x\in A\ ili\ x\in B\right\}$ unija skupova A i B,



Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.
Za neprazan skup $S\subseteq R$ kažemo da je odozgo ograničen, ako postoji bar jedan realan broj M takav da je

$$x\leq M\ \text{ za svako }\ x\in S.$$

Svaki broj M sa navedenim svojstvom zove se majoranta (gornja ograda, gornja međa) skupa S. Ako skup S nije odozgo ograničen kažemo da je odozgo neograničen.
Realan broj s zove se supremum nepraznog odozgo ograničenog skupa $S\subseteq R,$ ako s ima ova dva svojstva:

1) s je majoranta od S, tj. $x\leq s$ za svako $x\in S$
2) s je najmanja majoranta od S, tj. ako je $a\in R$ i $a<s$, onda postoji bar jedan element $x\in S$ takav da je $a<x$. Supremum skupa S označavamo sup S.

Ako je $s\in S$ supremum se zove maksimum ili najveća vrijednost, max S.
Primjer

$$\sup\left[a,\ b\right]=\max\left[a,\ b\right]=b\quad,\quad\sup\left\langle a,\ b\right\rangle=b$$
$$\sup\left\langle a,\ b\right]=\max\left\langle a,\ b\right]=b\quad,\quad\sup\left[a,\ b\right\rangle=b$$

Za neprazan skup $S\subseteq R$ kažemo da je odozdo ograničen, ako postoji bar jedan realan broj i takav da je

$$i\leq x\ \text{ za svako }\ x\in S.$$

Svaki broj i sa navedenim svojstvom zove se minoranta (donja ograda, donja međa) skupa S. Ako skup S nije odozdo ograničen kažemo da je odozdo neograničen.
Realan broj i zove se infimum nepraznog odozdo ograničenog skupa $S\subseteq R,$ ako i ima ova dva svojstva:

1) i je minoranta od S, tj. $i\leq x$ za svako $x\in S$
2) i je najveća minoranta od S, tj. ako je $a\in R$ i $a>i$, onda postoji bar jedan element $x\in S$ takav da je $a>x$. Infimum skupa S označavamo inf S.

Ako je $i\in S$ infimum se zove minimum ili najmanja vrijednost, min S.
Primjer

$$\inf\left[a, b\right] = \min\left[a, b\right] = a \quad , \quad \inf\left\langle a, b\right\rangle = a$$

$$\inf\left\langle a, b\right] = a \quad , \quad \inf\left[a, b\right\rangle = \min\left[a, b\right\rangle = a$$

Riješimo nejednadžbu:

$$\frac{5\cdot x-5}{x^2}<1 \Rightarrow \frac{5\cdot x-5}{x^2}-1<0 \Rightarrow \frac{5\cdot x-5}{x^2}-\frac{1}{1}<0 \Rightarrow \frac{5\cdot x-5-x^2}{x^2}<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\cdot x-5-x^2}{x^2}<0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow \frac{x^2-5\cdot x+5}{x^2}>0.$$

Primijetimo da je nazivnik x^2 uvijek pozitivan broj za svaki realan broj x različit od nule. Budući da je razlomak pozitivan, slijedi i brojnik mora biti pozitivan:

$$x^2-5\cdot x+5>0.$$

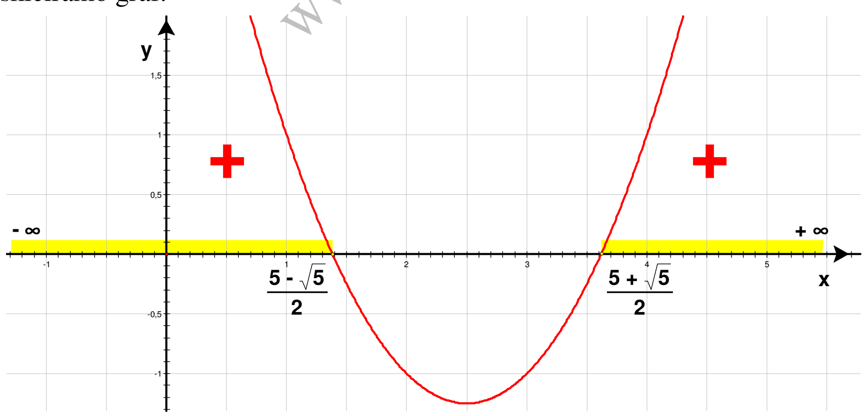
Trebamo riješiti tu nejednadžbu.
Odredimo najprije nultočke ove funkcije.

$$x^2-5\cdot x+5=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-5\cdot x+5=0 \\ a=1\ ,\ b=-5\ ,\ c=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-5\ ,\ c=5 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\approx 1.38 \\ x_2=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\approx 3.62 \end{array}\right\}.$$

Nakon toga skiciramo graf.



Vidimo da graf leži iznad x – osi na dijelu od – ∞ do prve nultočke x_1 i na dijelu od druge nultočke x_2 do + ∞. Taj skup zapisujemo

$$S=\left\langle -\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right\rangle$$

Vrijedi:

$$\inf S \text{ ne postoji} \quad , \quad \min S \text{ ne postoji}$$

$$\sup S \text{ ne postoji} \quad , \quad \max S \text{ ne postoji}.$$

Vježba 262

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 263 (Mirko, elektrotehnička škola)

Konstruiraj graf funkcije $f(x)=\sqrt{x+4\cdot\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\cdot\sqrt{x-4}},\ x\in[4,8]$.

Rješenje 263

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ ,\ a\geq 0\quad,\quad(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x\in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y\in B$.

Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f.
Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je $x\geq 0$ ili $x\in[0,+\infty\rangle$.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=\sqrt{x+4\cdot\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\cdot\sqrt{x-4}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{x-4+4\cdot\sqrt{x-4}+4}+\sqrt{x-4-4\cdot\sqrt{x-4}+4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x-4}\right)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{x-4}+2^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}\right)^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{x-4}+2^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}\ \Rightarrow\ f(x)=\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|.$$

Primijetimo da na segmentu $[4,8]$ vrijedi:

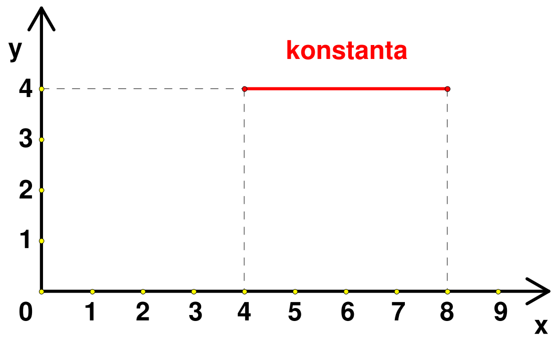
- $\sqrt{x-4}+2>0$
- $\sqrt{x-4}-2\leq 0.$

Zato možemo pisati:

$$f(x)=\left|\sqrt{x-4}+2\right|+\left|\sqrt{x-4}-2\right|\ \Rightarrow\ f(x)=\left|\underbrace{\sqrt{x-4}+2}_{+}\right|+\left|\underbrace{\sqrt{x-4}-2}_{-}\right|\ \Rightarrow$$

$$f(x)=\sqrt{x-4}+2-\left(\sqrt{x-4}-2\right)\ \Rightarrow\ f(x)=\sqrt{x-4}+2-\sqrt{x-4}+2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{x-4}+2-\sqrt{x-4}+2\ \Rightarrow\ f(x)=4.$$



Vježba 263

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 264 (Roberta, srednja škola)

Zadana je funkcija $f(x)=2\cdot x^3+\frac{2}{x^3}$. Dokažite da je za sve $x\neq 0$ zadovoljena relacija $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Rješenje 264

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

$$f(x)=2\cdot x^3+\frac{2}{x^3}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3+\frac{2}{\left(\frac{1}{x}\right)^3}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=2\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{2}{\frac{1}{x^3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^3}+\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{x^3}}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^3}+\frac{2\cdot x^3}{1}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x^3}+2\cdot x^3\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=2\cdot x^3+\frac{2}{x^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x).$$

Vježba 264

Zadana je funkcija $f(x)=5\cdot x^2+\frac{5}{x^2}$. Dokažite da je za sve $x\neq 0$ zadovoljena relacija $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 265 (Ana, ekonomska škola)

Odredi funkciju f(x) ako je $f(a\cdot x)=b\cdot x,$ gdje su a i b realni brojevi različiti od nule.

$A.\ f(x)=a\cdot b\cdot x \qquad B.\ f(x)=\frac{b}{a}\cdot x \qquad C.\ f(x)=\frac{a}{b}\cdot x \qquad D.\ f(x)=\frac{1}{a\cdot b}\cdot x$

Rješenje 265

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\cdot b.$$

$$f(a\cdot x)=b\cdot x \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ a\cdot x=y \\ x=\frac{y}{a} \end{bmatrix} \Rightarrow f(y)=b\cdot\frac{y}{a} \Rightarrow f(y)=\frac{b}{a}\cdot y \Rightarrow f(x)=\frac{b}{a}\cdot x.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 265

Odredi funkciju f(x) ako je $f(b\cdot x)=a\cdot x,$ gdje su a i b realni brojevi različiti od nule.

$A.\ f(x)=a\cdot b\cdot x \qquad B.\ f(x)=\frac{b}{a}\cdot x \qquad C.\ f(x)=\frac{a}{b}\cdot x \qquad D.\ f(x)=\frac{1}{a\cdot b}\cdot x$

Rezultat: C.

Zadatak 266 (Ante, srednja škola)

Koliko je f(y, b) + f(b, y), ako je zadana funkcija $f(x,\ y)=\frac{x}{x-y}$?

$A.\ 1 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ 0$

Rješenje 266

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ ,\ n\neq 0 \ ,\ n\neq 1.$$

$$f(y,\ b)+f(b,\ y)=\left[\ f(x,\ y)=\frac{x}{x-y}\ \right]=\frac{y}{y-b}+\frac{b}{b-y}=\frac{y}{y-b}+\frac{b}{-(y-b)}=$$

$$=\frac{y}{y-b}-\frac{b}{y-b}=\frac{y-b}{y-b}=\frac{y-b}{y-b}=1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 266

Koliko je f(x, a) + f(a, x), ako je zadana funkcija $f(x,\ y)=\frac{x}{x-y}$?

$A.\ 1 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ 0$

Rezultat: A.

Zadatak 267 (Ante, srednja škola)

Dokažite da je kompozicija polinoma prvog stupnja polinom prvog stupnja.

Rješenje 267

Ponovimo!

Linearna funkcija (polinom prvog stupnja) je realna funkcija zadana jednadžbom $f(x) = a \cdot x + b$, $a \neq 0$. Graf linearne funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu je pravac $y = a \cdot x + b$.

Kompozicija funkcija:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Neka su zadane funkcije $f(x) = a \cdot x + b,\ g(x) = c \cdot x + d$, gdje su $a,\ b,\ c,\ d \in R$.

Tada je:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x)) = c \cdot f(x) + d = c \cdot (a \cdot x + b) + d = a \cdot c \cdot x + b \cdot c + d.$$

Ili ovako:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x)) = g(a \cdot x + b) = c \cdot (a \cdot x + b) + d = a \cdot c \cdot x + b \cdot c + d.$$

Stavimo li da je:

$$A = a \cdot c \quad , \quad B = b \cdot c + d,$$

dobijemo

$$(g \circ f)(x) = A \cdot x + B.$$

To je opet polinom prvog stupnja.

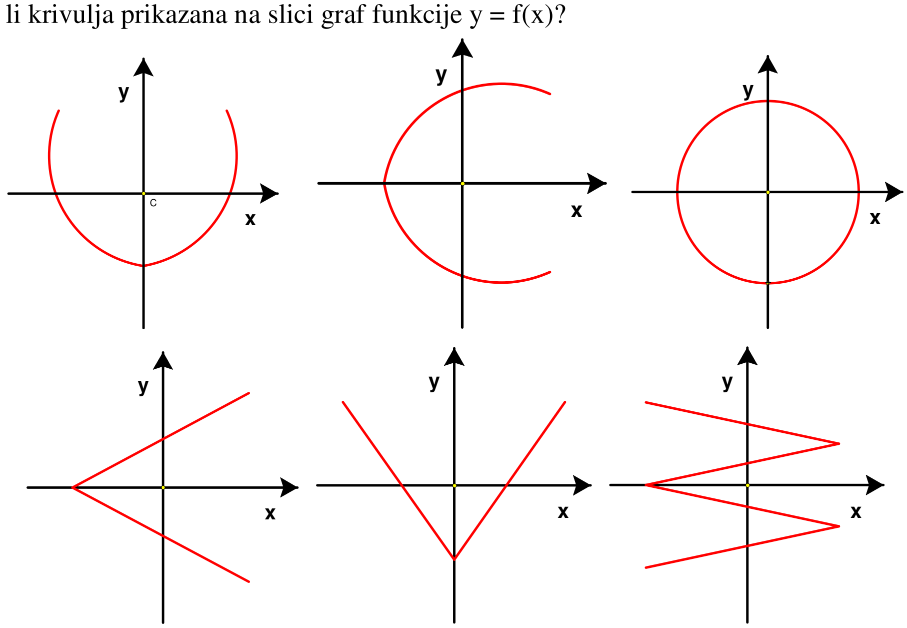
Vježba 267

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 268 (Vanja, srednja škola)

Je li krivulja prikazana na slici graf funkcije $y = f(x)$?

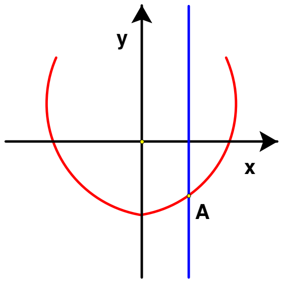


Rješenje 268

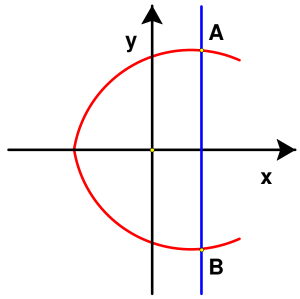
Ponovimo!

Je li krivulja graf funkcije možemo provjeriti pomoću vertikalnog testa.
Treba naći presjeke vertikalnog pravca i krivulje.

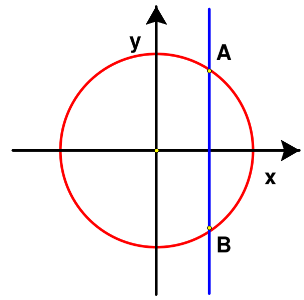
Krivulja predstavlja graf funkcije y = f(x) ako ne postoji niti jedan vertikalni pravac koji krivulju siječe u više od jedne točke.



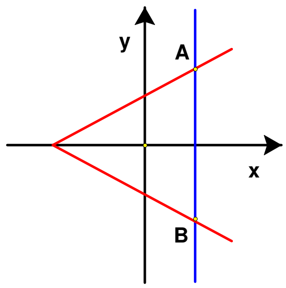
DA



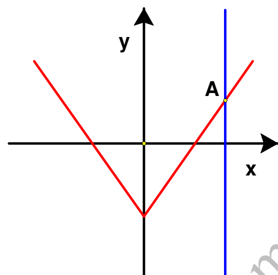
NE



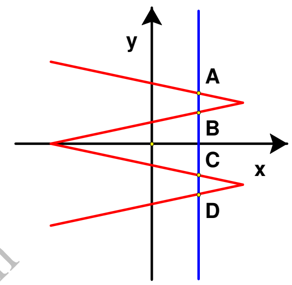
NE



NE



DA



NE

Vježba 268

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 269 (Sanja, gimnazija)

Odredi realnu funkciju f iz jednakosti $f(x-1)=-2\cdot x+3$.

Rješenje 269

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$f(x-1)=-2\cdot x+3 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ x-1=t \\ x=t+1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(t)=-2\cdot(t+1)+3 \Rightarrow f(t)=-2\cdot t-2+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=-2\cdot t+1 \Rightarrow [t=x] \Rightarrow f(x)=-2\cdot x+1.$$

2.inačica

$$f(x-1)=-2\cdot x+3 \Rightarrow f(x-1)=-2\cdot x+2-2+3 \Rightarrow f(x-1)=(-2\cdot x+2)-2+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x-1)=-2\cdot(x-1)+1 \Rightarrow [x-1\to x] \Rightarrow f(x)=-2\cdot x+1.$$

Vježba 269

Odredi realnu funkciju f iz jednakosti $f(x+1)=-2\cdot x-1$.

Rezultat: $f(x)=-2\cdot x+1.$

Zadatak 270 (Sanja, gimnazija)

Odredi realnu funkciju f iz jednakosti $f(x+1)=x^2+2\cdot x$.

Rješenje 270

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

1.inačica

$$f(x+1)=x^2+2\cdot x \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ x+1=t\\ x=t-1\end{array}\right] \Rightarrow f(t)=(t-1)^2+2\cdot(t-1) \Rightarrow f(t)=t^2-2\cdot t+1+2\cdot t-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=t^2-2\cdot t+1+2\cdot t-2 \Rightarrow f(t)=t^2-1 \Rightarrow [t=x] \Rightarrow f(x)=x^2-1.$$

2.inačica

$$f(x+1)=x^2+2\cdot x \Rightarrow f(x+1)=x^2+2\cdot x+1-1 \Rightarrow f(x+1)=\left(x^2+2\cdot x+1\right)-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1)=(x+1)^2-1 \Rightarrow [x+1\to x] \Rightarrow f(x)=x^2-1.$$

Vježba 270

Odredi realnu funkciju f iz jednakosti $f(x-1)=x^2-2\cdot x$.

Rezultat: $f(x)=x^2-1.$

Zadatak 271 (Ivan, gimnazija)

Za afinu funkciju $f: R\to R,\ f(x)=a\cdot x+b$ te realne brojeve α i β za koje je α + β ≠ 0 vrijedi $f(\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2)=\alpha\cdot f(x_1)+\beta\cdot f(x_2)$ ako i samo ako je α + β = 1.

Rješenje 271

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Budući da je f afina funkcija slijedi:

$$f(\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2)=a\cdot(\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_2)+b=a\cdot\alpha\cdot x_1+a\cdot\beta\cdot x_2+b=a\cdot\alpha\cdot x_1+a\cdot\beta\cdot x_2+1\cdot b=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ \alpha+\beta=1\end{array}\right]=a\cdot\alpha\cdot x_1+a\cdot\beta\cdot x_2+(\alpha+\beta)\cdot b=a\cdot\alpha\cdot x_1+a\cdot\beta\cdot x_2+\alpha\cdot b+\beta\cdot b=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{array}\right]=(a\cdot\alpha\cdot x_1+\alpha\cdot b)+(a\cdot\beta\cdot x_2+\beta\cdot b)=\alpha\cdot(a\cdot x_1+b)+\beta\cdot(a\cdot x_2+b)=$$

$$=\alpha\cdot f(x_1)+\beta\cdot f(x_2).$$

Vježba 271

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 272 (Ante, srednja škola)

Funkciju $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ ako je } x \le 0 \\ x, \text{ ako je } x > 0 \end{cases}$ napišite pomoću jedne formule koristeći oznaku apsolutne vrijednosti.

Rješenje 272

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \ne 0, \quad n \ne 1.$$

Zadanu funkciju ovako preoblikujemo

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + |x|).$$

Provjera!

- $$\boxed{x \le 0} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = -x \\ f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + |x|) \end{array}\right] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = 0}$$

- $$\boxed{x > 0} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = x \\ f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + |x|) \end{array}\right] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \Rightarrow \boxed{f(x) = x}.$$

Vježba 272

Funkciju $f(x)=\begin{cases} x, \text{ ako je } x \le 0 \\ 0, \text{ ako je } x > 0 \end{cases}$ napišite pomoću jedne formule koristeći oznaku apsolutne vrijednosti.

Rezultat: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - |x|).$