Zadatak 241 (Mirna, gimnazija)

Ako je $f(x)=\frac{2\cdot x+1}{x-2}$, tada rješenje jednadžbe $(f\circ f)(x)=3\cdot x-2$ iznosi:

$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 6$

Rješenje 241

Ponovimo!

Kompozicija funkcija:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$(f\circ f)(x)=3\cdot x-2 \Rightarrow f(f(x))=3\cdot x-2 \Rightarrow f(f(x))=3\cdot x-2 \Rightarrow \frac{2\cdot f(x)+1}{f(x)-2}=3\cdot x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot f(x)+1}{f(x)-2}=3\cdot x-2 \Rightarrow \frac{2\cdot\frac{2\cdot x+1}{x-2}+1}{\frac{2\cdot x+1}{x-2}-2}=3\cdot x-2 \Rightarrow \frac{\frac{2}{1}\cdot\frac{2\cdot x+1}{x-2}+1}{\frac{2\cdot x+1}{x-2}-2}=3\cdot x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4\cdot x+2}{x-2}+1}{\frac{2\cdot x+1}{x-2}-2}=3\cdot x-2 \Rightarrow \frac{\frac{4\cdot x+2}{x-2}+\frac{1}{1}}{\frac{2\cdot x+1}{x-2}-\frac{2}{1}}=3\cdot x-2 \Rightarrow \frac{\frac{4\cdot x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2\cdot x+1-2\cdot(x-2)}{x-2}}=3\cdot x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4\cdot x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2\cdot x+1-2\cdot x+4}{x-2}}=3\cdot x-2 \Rightarrow \frac{\frac{4\cdot x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2\cdot x+1-2\cdot x+4}{x-2}}=3\cdot x-2 \Rightarrow \frac{\frac{5\cdot x}{x-2}}{\frac{5}{x-2}}=3\cdot x-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{5\cdot x}{x-2}}{\frac{5}{x-2}}=3\cdot x-2 \Rightarrow \frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{1}}=3\cdot x-2 \Rightarrow x=3\cdot x-2 \Rightarrow x-3\cdot x=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot x=-2 \Rightarrow -2\cdot x=-2 \ /:(-2) \Rightarrow x=1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 241

Ako je $f(x)=\frac{2\cdot x+1}{x-2}$, tada rješenje jednadžbe $(f\circ f)(x)-3\cdot x+2=0.$ iznosi:

$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 6$

Rezultat: B.

Zadatak 242 (Mirna, gimnazija)

Ako za kompoziciju funkcija $f(x) = a \cdot x + 1$ i $g(x) = x^2 + 1$ vrijedi $f \circ g = g \circ f$, onda a iznosi:

$$A.\ -1 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ \text{ne postoji}$$

Rješenje 242

Ponovimo!

Kompozicija funkcija:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad i = \sqrt{-1}.$$

Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot g(x) + 1 = (f(x))^2 + 1 \Rightarrow a \cdot g(x) + 1 = (f(x))^2 + 1 \Rightarrow a \cdot g(x) = (f(x))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot g(x) = (f(x))^2 \Rightarrow a \cdot \left(x^2 + 1\right) = (a \cdot x + 1)^2.$$

Budući da jednakost mora vrijediti za svako x, bit će, na primjer:

- za x = 0

$$a \cdot \left(x^2 + 1\right) = (a \cdot x + 1)^2 \Rightarrow a \cdot \left(0^2 + 1\right) = (a \cdot 0 + 1)^2 \Rightarrow a \cdot (0 + 1) = (0 + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot 1 = 1^2 \Rightarrow a = 1$$

- za x = 1

$$a \cdot \left(x^2 + 1\right) = (a \cdot x + 1)^2 \Rightarrow a \cdot \left(1^2 + 1\right) = (a \cdot 1 + 1)^2 \Rightarrow a \cdot (1 + 1) = (a + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a = a^2 + 2 \cdot a + 1 \Rightarrow 2 \cdot a = a^2 + 2 \cdot a + 1 \Rightarrow 0 = a^2 + 1 \Rightarrow a^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = -1 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{-1} \Rightarrow a = i \ \text{imaginarna jedinica}.$$

Došli smo u kontradikciju. Znači ne postoji a tako da bi jednakost kompozicija vrijedila za svaki realan broj x.

Odgovor je pod D.

Vježba 242

Ako za kompoziciju funkcija $f(x) = a \cdot x + 1$ i $g(x) = x^2 + 1$ vrijedi $f \circ g - g \circ f = 0$, onda a iznosi:

$$A.\ -1 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ \text{ne postoji}$$

Rezultat: D.

Zadatak 243 (Domagoj, gimnazija)

Odredite domenu funkcije $h(x) = \sqrt{2 \cdot x - 5}$.

Rješenje 243

Ponovimo!

$$a \ge b \ , \ c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}.$$

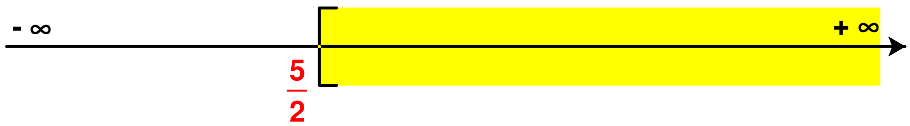
Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje

svakom elementu $x \in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y \in B$.
Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f.
Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je $x \ge 0$ ili $x \in [0, +\infty\rangle$.

Moramo naći vrijednosti x za koje je radikand (izraz pod korijenom) veći ili jednak nuli.
Odredimo domenu funkcije $h(x) = \sqrt{2 \cdot x - 5}$.

$$2 \cdot x - 5 \ge 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot x \ge 5 \;\Rightarrow\; 2 \cdot x \ge 5 \;/ : 2 \;\Rightarrow\; x \ge \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right\rangle.$$



Vježba 243

Odredite domenu funkcije $h(x) = \sqrt{3 \cdot x - 7}$.

Rezultat: $x \in \left[\frac{7}{3}, +\infty\right\rangle$.

Zadatak 244 (Helena, gimnazija)

Zadane su funkcije $f(x) = 2 \cdot x + 3$ i $g(x) = 7 \cdot x^2 - 11$. Odredite $f \circ g$.

Rješenje 244

Ponovimo!

Kompozicija funkcija:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x)) = \left[\, f(x) = 2 \cdot x + 3 \,\right] = 2 \cdot g(x) + 3 = 2 \cdot g(x) + 3 =$$

$$= \left[\, g(x) = 7 \cdot x^2 - 11 \,\right] = 2 \cdot \left(7 \cdot x^2 - 11\right) + 3 = 14 \cdot x^2 - 22 + 3 = 14 \cdot x^2 - 19.$$

2.inačica

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x)) = \left[\, g(x) = 7 \cdot x^2 - 11 \,\right] = f\left(7 \cdot x^2 - 11\right) = f\left(7 \cdot x^2 - 11\right) =$$

$$= \left[\, f(x) = 2 \cdot x + 3 \,\right] = 2 \cdot \left(7 \cdot x^2 - 11\right) + 3 = 14 \cdot x^2 - 22 + 3 = 14 \cdot x^2 - 19.$$

Vježba 244

Zadane su funkcije $f(x) = 2 \cdot x + 2$ i $g(x) = 7 \cdot x^2 - 11$. Odredite $f \circ g$.

Rezultat: $14 \cdot x^2 - 20$.

Zadatak 245 (Amir, srednja škola)

Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x - |x|} \cdot \log_5 (x - 2)$.

Rješenje 245

Ponovimo!

$$a \ge b \;\;,\;\; c > 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^{c} \qquad a = b^{c}$$
$$\rightarrow$$

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \to K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.
Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \log_b x$ je interval realnih brojeva

$$D(f) = \langle 0, +\infty \rangle.$$

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je $x \ge 0$ ili $x \in [0, +\infty\rangle$.
Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga

$$A \cap B.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Uočimo da se zadana funkcija može zapisati kao umnožak dviju funkcija.

$$f(x) = \sqrt{x - |x|} \cdot \log_5 (x - 2) \;\Rightarrow\; \left[\, f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \,\right] \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} f_1(x) = \sqrt{x - |x|} \\ f_2(x) = \log_5 (x - 2) \end{array}\right\}.$$

Tražimo posebno domenu svake funkcije.

- Računamo domenu funkcije f_1.

$$f_1(x) = \sqrt{x - |x|} \;\Rightarrow\; x - |x| \ge 0.$$

U nejednadžbi se pojavljuje apsolutna vrijednost pa postoje dvije mogućnosti.
1. mogućnost
$x \ge 0 \;\Rightarrow\; |x| = x$

$$x - |x| \ge 0 \;\Rightarrow\; x - x \ge 0 \;\Rightarrow\; x - x \ge 0 \;\Rightarrow\; 0 \ge 0.$$

Dobije se točna nejednakost pa je

$$x \ge 0$$

rješenje nejednadžbe.
2. mogućnost

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

$$x - |x| \geq 0 \Rightarrow x - (-x) \geq 0 \Rightarrow x + x \geq 0 \Rightarrow 2 \cdot x \geq 0 \Rightarrow 2 \cdot x \geq 0 \;/ : 2 \Rightarrow x \geq 0.$$

Očito je da ne postoje realni brojevi koji zadovoljavaju istodobno obje nejednadžbe

$$x < 0 \;\; \text{i} \;\; x \geq 0.$$

Zato funkcija f_1 ima za domenu skup realnih brojeva

$$x \geq 0 \Rightarrow D_1 = [\, 0, +\infty \,\rangle.$$

- Računamo domenu funkcije f_2.

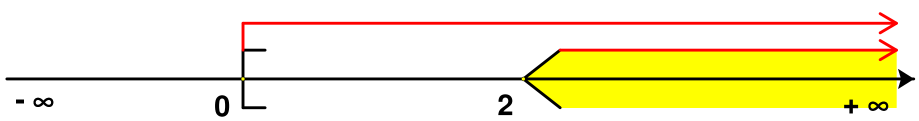
$$f_2(x) = \log_5 (x - 2) \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2.$$

Funkcija f_2 ima za domenu skup realnih brojeva

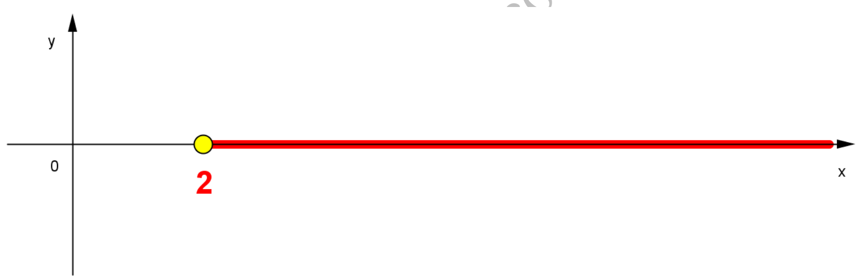
$$x > 2 \Rightarrow D_2 = \langle\, 2, +\infty \,\rangle.$$

Domena zadane funkcije f je skup realnih brojeva koji se nalaze i u domeni D_1 i u domeni D_2. Drugim riječima, domena funkcije f je presjek domena D_1 i D_2 i u ovom slučaju to je

$$D = D_1 \cap D_2 \Rightarrow D = [\, 0, +\infty \,\rangle \cap \langle\, 2, +\infty \,\rangle \Rightarrow D = \langle\, 2, +\infty \,\rangle.$$



Zanimljiv je graf funkcije $f(x) = \sqrt{x - |x|} \cdot \log_5 (x - 2)$.



Vježba 245

Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x - |x|} \cdot \log_2 (x - 3)$.

Rezultat: $D = \langle\, 3, +\infty \,\rangle.$

Zadatak 246 (Bruno, gimnazija)

Suhi list pada na tlo te je nakon t sekundi njegova udaljenost h(t) od tla, izražena u metrima, jednaka $h(t) = -1.8 \cdot t + 5$.

a) Prikaži grafički funkciju h(t).
b) S koje je visine list pao?
c) Na kojoj će visini biti list nakon dvije sekunde?
d) Nakon koliko će vremena list dotaknuti tlo?

Rješenje 246

Ponovimo!

Linearna funkcija je realna funkcija zadana jednadžbom $f(x) = a \cdot x + b$, $a \neq 0$. Graf linearne funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu je pravac $y = a \cdot x + b$. Koeficijent a zove se koeficijent smjera ili nagib pravca.
Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

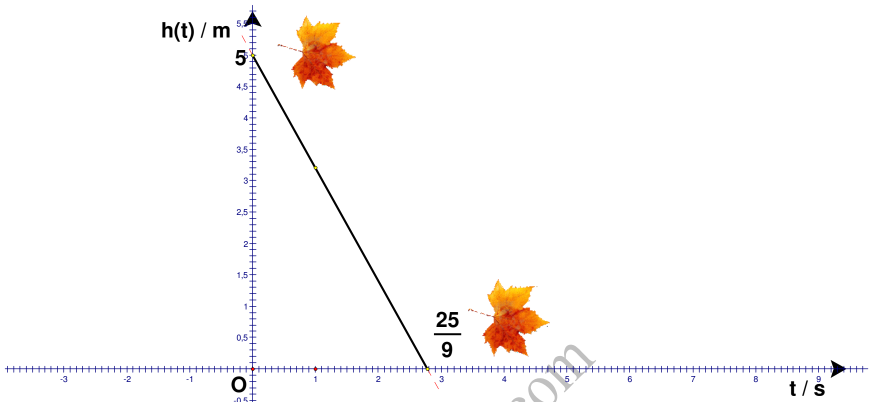
$$f(x_0) = 0.$$

a) Za nacrtati pravac dovoljne su dvije točke. Zato ćemo za varijablu t uzeti, na primjer, t = 0 i t = 1 te izračunati h(0) i h(1).

- $\left.\begin{array}{l} t=0 \\ h(t)=-1.8\cdot t+5 \end{array}\right\} \Rightarrow h(0)=-1.8\cdot 0+5 \Rightarrow h(0)=0+5 \Rightarrow h(0)=5$
- $\left.\begin{array}{l} t=1 \\ h(t)=-1.8\cdot t+5 \end{array}\right\} \Rightarrow h(1)=-1.8\cdot 1+5 \Rightarrow h(1)=-1.8+5 \Rightarrow h(1)=3.2.$

Pripadna tablica izgleda ovako:

t / s	0	1
h(t) / m	5	3.2



b) U početnom trenutku, t = 0, list se nalazio na visini:

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \\ h(t)=-1.8\cdot t+5 \end{array}\right\} \Rightarrow h(0)=-1.8\cdot 0+5 \Rightarrow h(0)=0+5 \Rightarrow h(0)=5\ m.$$

c) Nakon dvije sekunde list se nalazio na visini:

$$\left.\begin{array}{l} t=2 \\ h(t)=-1.8\cdot t+5 \end{array}\right\} \Rightarrow h(2)=-1.8\cdot 2+5 \Rightarrow h(2)=-3.6+5 \Rightarrow h(2)=1.4\ m.$$

d) Vrijeme za koje list dotakne tlo iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} h(t)=-1.8\cdot t+5 \\ h(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1.8\cdot t+5=0 \Rightarrow -1.8\cdot t=-5 \Rightarrow -1.8\cdot t=-5\ /:(-1.8) \Rightarrow t=\frac{5}{1.8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{proširimo razlomak} \\ \text{brojem } 5 \end{array}\right] \Rightarrow t=\frac{25}{9}\ s \Rightarrow t\approx 2.78\ s.$$

Vježba 246

Suhi list pada na tlo te je nakon t sekundi njegova udaljenost h(t) od tla, izražena u metrima, jednaka $h(t)=-1.5\cdot t+5.$ Na kojoj će visini biti list nakon dvije sekunde?

Rezultat: 2 m.

Zadatak 247 (Ivica, tehnička škola)

Odredi sliku funkcije $h(x)=-x^2+x+30.$

Rješenje 247

Ponovimo!

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x\in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y\in B.$

Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. S pojmom kodomene povezan je skup zvan slika funkcije. Sliku funkcije možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije.
Slika funkcije f sastoji se od svih $y \in B$ za koje postoji $x \in A$ takav da je f(x) = y.
Slika funkcije je skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu.
Skup vrijednosti (slika funkcije) R_f je projekcija grafa na os ordinata.
Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su $a \neq 0$, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \; a \neq 0$$

je parabola

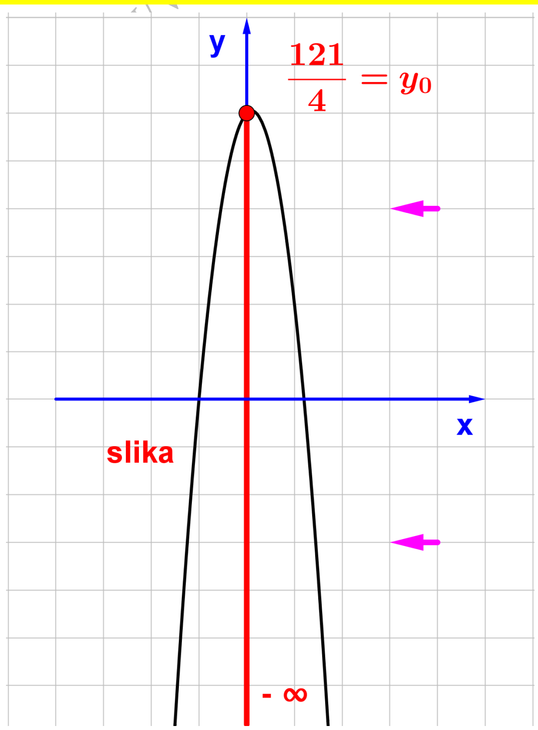
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je $a > 0$.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je $a < 0$.
Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ima ekstrem čija vrijednost iznosi

$$y_\circ = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je $a > 0$, maksimum ako je $a < 0$.
Ako je $a < 0$ skup svih vrijednosti (slika) funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ jest interval

$$\left\langle -\infty, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \right].$$



$$h(x) = -x^2 + x + 30 \Rightarrow \left.\begin{matrix} h(x) = -x^2 + x + 30 \\ a = -1 \;,\; b = 1 \;,\; c = 30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = -1 \;,\; b = 1 \;,\; c = 30 \\ y_\circ = \dfrac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_\circ = \frac{4 \cdot (-1) \cdot 30 - 1^2}{4 \cdot (-1)} \Rightarrow y_\circ = \frac{-120 - 1}{-4} \Rightarrow y_\circ = \frac{-121}{-4} \Rightarrow y_\circ = \frac{121}{4}.$$

Slika funkcije h je

$$R_h = \left\langle -\infty, \frac{121}{4} \right].$$

Vježba 247

Odredi sliku funkcije $h(x) = -x^2 - x + 30.$

Rezultat: $R_h = \left\langle -\infty, \dfrac{121}{4} \right].$

Zadatak 248 (Tonka, gimnazija)

Napišite nultočku funkcije $f(x) = a^x - b$ uz pomoć brojeva a i b pri čemu su brojevi a > 1 i b > 0.

Rješenje 248

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \xrightarrow{} \qquad a = b^c$$

$$\log_a a^x = x.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_\circ) = 0.$$

$$f(x) = a^x - b \Rightarrow \left[f(x) = 0 \right] \Rightarrow a^x - b = 0 \Rightarrow a^x = b \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{matrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^x = b \;/\log_a \Rightarrow \log_a a^x = \log_a b \Rightarrow x = \log_a b.$$

Nultočka zadane funkcije ima koordinate

$$N\left(\log_a b, 0\right).$$

Vježba 248

Napišite nultočku funkcije $f(x) = 2^x - 3.$

Rezultat: $N\left(\log_2 3, 0\right).$

Zadatak 249 (Max, gimnazija)

Dana je linearna funkcija $f(x) = 2 \cdot x - 5.$ Ako je prirast Δx varijable x jednak c, prirast Δf funkcije jednak je:

$A.\ 2 \cdot c \qquad B.\ 5 \cdot c \qquad C.\ -2 \cdot c \qquad D.\ -5 \cdot c$

Rješenje 249

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Prirast funkcije

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x).$$

$$f(x)=2\cdot x-5 \Rightarrow \left[\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)\right] \Rightarrow \Delta f=2\cdot(x+\Delta x)-5-(2\cdot x-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta f=2\cdot x+2\cdot\Delta x-5-2\cdot x+5 \Rightarrow \Delta f=2\cdot x+2\cdot\Delta x-5-2\cdot x+5 \Rightarrow \Delta f=2\cdot\Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ \Delta x=c\end{array}\right] \Rightarrow \Delta f=2\cdot c.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 249

Dana je linearna funkcija $f(x)=2\cdot x-9$. Ako je prirast Δx varijable x jednak c, prirast Δf funkcije jednak je:

$A.\ 2\cdot c \qquad B.\ 5\cdot c \qquad C.\ -2\cdot c \qquad D.\ -5\cdot c$

Rezultat: A.

Zadatak 250 (Marek, gimnazija)

Ako je $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x+1$ te f(– 1) = 11, koliko je f(1)?

Rješenje 250

Ponovimo!

$$(-a)^3=-a^3.$$

$$f(-1)=11 \Rightarrow \left[f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x+1\right] \Rightarrow a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)+1=11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot(-1)+b\cdot(-1)+1=11 \Rightarrow -a-b+1=11 \Rightarrow -a-b=11-1 \Rightarrow -a-b=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a-b=10 \ /\cdot(-1) \Rightarrow a+b=-10.$$

Sada je

$$f(1)=\left[f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x+1\right]=a\cdot 1^3+b\cdot 1+1=a\cdot 1+b\cdot 1+1=a+b+1=$$

$$=\left[a+b=-10\right]=-10+1=-9.$$

Vježba 250

Ako je $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x+1$ te f(– 1) = 10, koliko je f(1)?

Rezultat: – 8.

Zadatak 251 (Marek, gimnazija)

Ako je $f(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^2+1$ te f(– 1) = 1, koliko je f(1)?

Rješenje 251

Ponovimo!

$$(-a)^4=a^4 \quad , \quad (-a)^2=a^2.$$

$$f(-1)=1 \Rightarrow \left[f(x)=a\cdot x^4+b\cdot x^2+1\right] \Rightarrow a\cdot(-1)^4+b\cdot(-1)^2+1=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot 1+b\cdot 1+1=1 \Rightarrow a+b+1=1 \Rightarrow a+b+1=1 \Rightarrow a+b=0.$$

Sada je

$$f(1) = \left[f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + 1 \right] = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + 1 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + 1 = a + b + 1 =$$

$$= \left[a + b = 0 \right] = 0 + 1 = 1.$$

Vježba 251

Ako je $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + 1$ te f(– 1) = 2, koliko je f(1)?

Rezultat: 2.

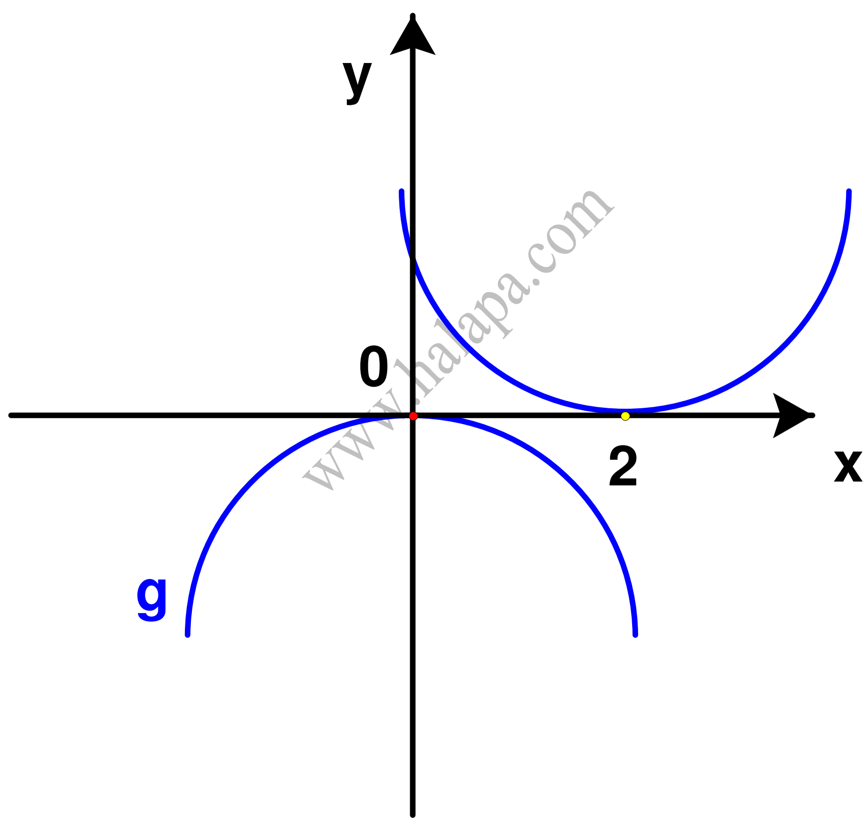
Zadatak 252 (Tina, Sonja, HAK)

In nebenstehender Figur sehen wir die Funktionskurven der Funktionen f und g. Welche Beziehung besteht zwischen f und g?

(Na slici vidimo grafove funkcija f i g. Koja sveza postoji između f i g?)

$A.\ g(x-2) = -f(x)$ $\quad B.\ g(x) = f(x+2)$ $\quad C.\ g(x) = -f(-x+2)$

$D.\ g(-x) = -f(-x-2)$ $\quad E.\ g(2-x) = -f(x)$



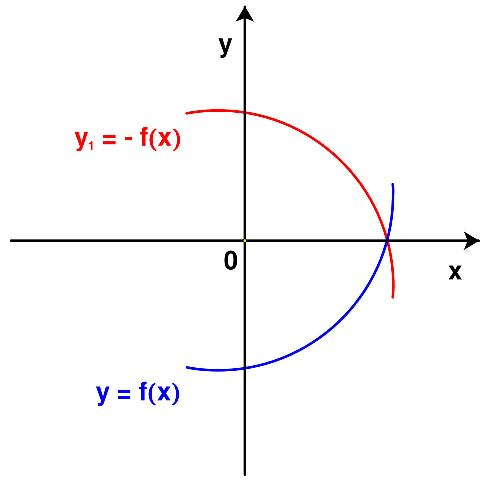
Rješenje 252

Ponovimo!

Polazeći od grafa y = f(x) pomoću jednostavnih geometrijskih konstrukcija dobivamo ove grafove funkcija:

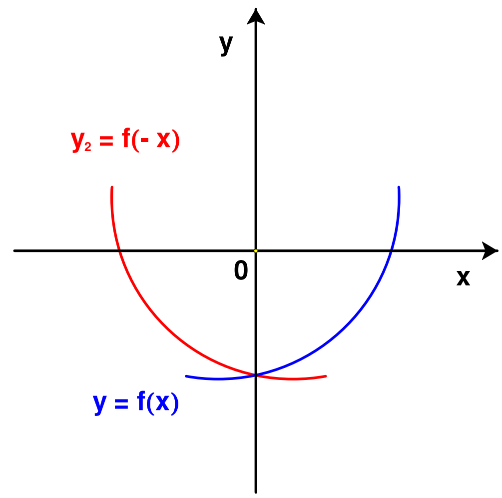
$y_1 = -f(x)$

zrcaljenje grafa funkcije y = f(x)
na osi x



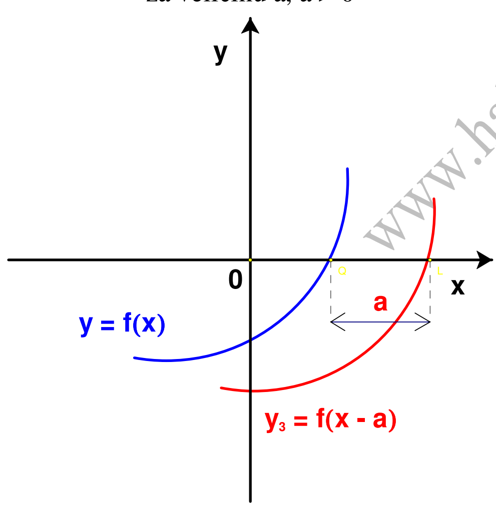
$y_2 = f(-x)$

zrcaljenje grafa funkcije y = f(x)
na osi y



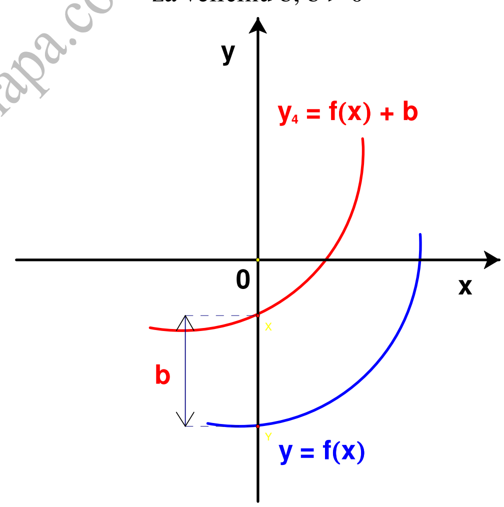
$y_3 = f(x-a)$

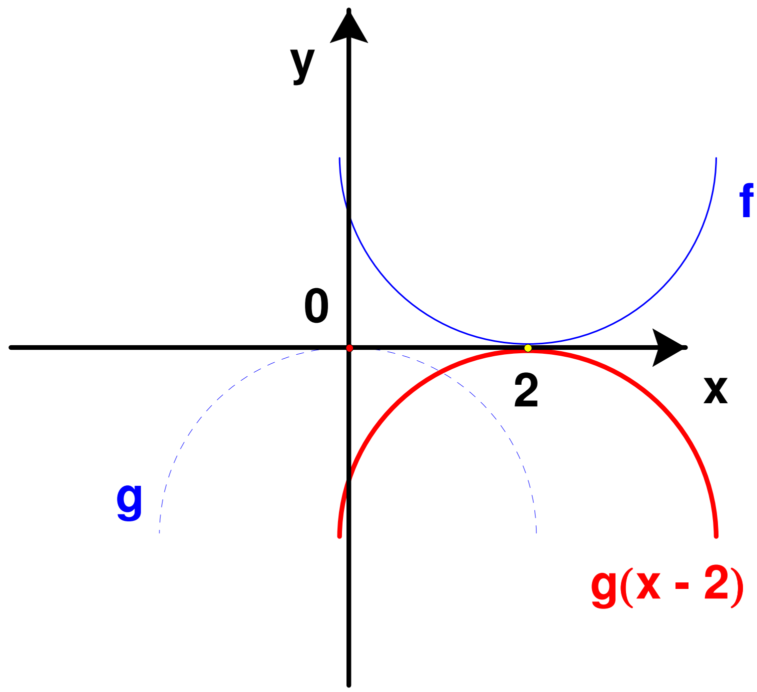
graf funkcije y = f(x) pomaknut je u
pozitivnom smjeru na osi x (+ x)
za veličinu a, a > 0



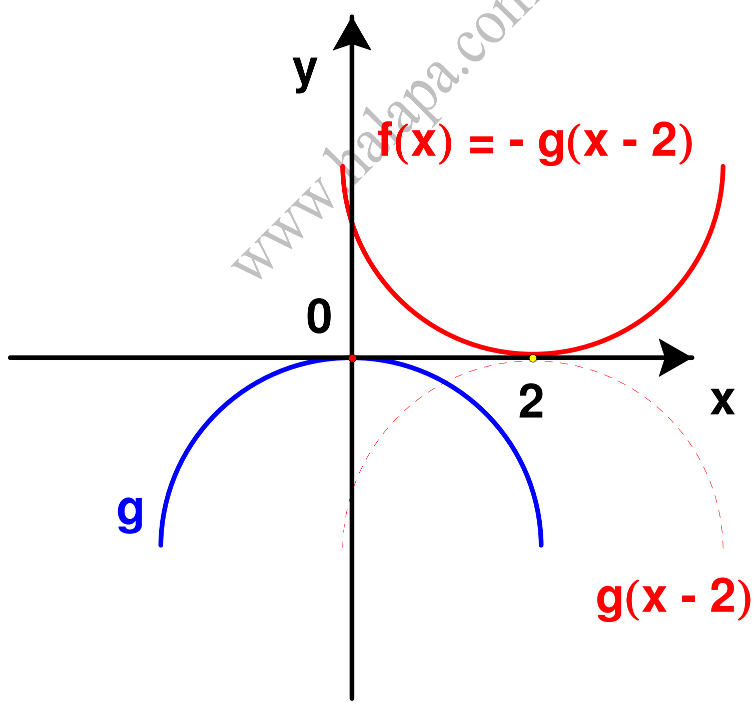
$y_4 = f(x) + b$

graf funkcije y = f(x) pomaknut je u
pozitivnom smjeru na osi y (+ y)
za veličinu b, b > 0





Graf funkcije g pomaknut je za dvije mjerne jedinice u pozitivnom smjeru osi x.



Zrcaljenje grafa funkcije g(x – 2) na osi x daje – g(x – 2).
Slijedi:

$$f(x) = -g(x-2) \Rightarrow g(x-2) = -f(x).$$

Odgovor je pod A.

Vježba 252

Djeco, nemate ništa za domaću zadaću!

Rezultat:

Zadatak 253 (Vinko, gimnazija)

Neka je $f : R \to R$ parna funkcija. Pokažite da je graf funkcije $g : R \to R$ zadane sa $g(x) = f(x-a),\ x \in R,$ simetričan s obzirom na pravac x = a.

Rješenje 253

Ponovimo!

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Ako je graf funkcije g simetričan s obzirom na pravac x = a mora se pokazati da je ispunjena jednakost

$$g(a-x) = g(a+x)$$

za svaki realan broj x. Zaista,

$$\left.\begin{array}{l} g(a-x) = f((a-x)-a) \\ g(a+x) = f((a+x)-a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(a-x) = f(a-x-a) \\ g(a+x) = f(a+x-a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(a-x) = f(a-x-a) \\ g(a+x) = f(a+x-a) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(a-x) = f(-x) \\ g(a+x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} f \text{ je parna funkcija} \\ f(-x) = f(x) \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(a-x) = f(x) \\ g(a+x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow g(a-x) = g(a+x).$$

Vježba 253

Neka je $f : R \to R$ parna funkcija. Pokažite da je graf funkcije $g : R \to R$ zadane sa $g(x) = f(x-2),\ x \in R,$ simetričan s obzirom na pravac x = 2.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 254 (Iva, gimnazija)

Nađi periodu funkcije $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c),$ gdje su a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0 konstante, a x neovisna varijabla.

Rješenje 254

Ponovimo!

$$\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x = k \cdot \pi,\ k \in Z \quad , \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Funkcija f je periodična s periodom P (P ≠ 0), ako za svaki x vrijedi: Ako je funkcija f definirana u jednoj od točaka x, x + P, onda je definirana u obje te točke i vrijedi

$$f(x + P) = f(x).$$

Broj P zove se perioda funkcije f. Najmanja pozitivna perioda funkcije f (ako postoji) zove se **temeljna perioda** funkcije f.

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x|\ge 0 \text{ za svaki realan broj x}.$$

Skup cijelih brojeva:

$$Z=\{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Pretpostavimo da je zadana funkcija

$$f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)$$

periodična sa periodom P. Tada je:

$$f(x+P)=f(x) \;\Rightarrow\; a\cdot\sin(b\cdot(x+P)+c)=a\cdot\sin(b\cdot x+c) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a\cdot\sin(b\cdot(x+P)+c)=a\cdot\sin(b\cdot x+c) \;/\cdot\frac{1}{a} \;\Rightarrow\; \sin(b\cdot(x+P)+c)=\sin(b\cdot x+c) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \sin(b\cdot(x+P)+c)-\sin(b\cdot x+c)=0 \;\Rightarrow\; \sin(b\cdot x+b\cdot P+c)-\sin(b\cdot x+c)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot\cos\frac{b\cdot x+b\cdot P+c+b\cdot x+c}{2}\cdot\sin\frac{b\cdot x+b\cdot P+c-(b\cdot x+c)}{2}=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot\cos\frac{2\cdot b\cdot x+b\cdot P+2\cdot c}{2}\cdot\sin\frac{b\cdot x+b\cdot P+c-b\cdot x-c}{2}=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot\cos\frac{2\cdot b\cdot x+2\cdot c+b\cdot P}{2}\cdot\sin\frac{b\cdot x+b\cdot P+c-b\cdot x-c}{2}=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot\cos\frac{2\cdot b\cdot x+2\cdot c+b\cdot P}{2}\cdot\sin\frac{b\cdot P}{2}=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot\cos\frac{2\cdot b\cdot x+2\cdot c+b\cdot P}{2}\cdot\sin\frac{b\cdot P}{2}=0 \;/:2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \cos\left(\frac{2\cdot b\cdot x}{2}+\frac{2\cdot c}{2}+\frac{b\cdot P}{2}\right)\cdot\sin\frac{b\cdot P}{2}=0 \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{2\cdot b\cdot x}{2}+\frac{2\cdot c}{2}+\frac{b\cdot P}{2}\right)\cdot\sin\frac{b\cdot P}{2}=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \cos\left(b\cdot x+c+\frac{b\cdot P}{2}\right)\cdot\sin\frac{b\cdot P}{2}=0.$$

Umnožak je jednak nuli, ako je jedan od faktora nula. Faktor

$$\cos\left(b\cdot x+c+\frac{b\cdot P}{2}\right)$$

sadrži varijablu x i nije identički jednak nuli.

Budući da je $P \ne 0$, drugi faktor mora biti nula pa vrijedi:

$$\sin\frac{b\cdot P}{2}=0 \;\Rightarrow\; \frac{b\cdot P}{2}=\sin^{-1}0 \;\Rightarrow\; \frac{b\cdot P}{2}=k\cdot\pi \;\Rightarrow\; \frac{b\cdot P}{2}=k\cdot\pi \;/\cdot\frac{2}{b} \;\Rightarrow\; P=\frac{k\cdot 2\cdot\pi}{b},\; k\in Z.$$

Broj b može biti pozitivan, $b > 0$ ili negativan, $b < 0$. Zato je temeljna perioda za $k = 1$ jednaka

$$P = \frac{2 \cdot \pi}{|b|}.$$

Vježba 254

Nađi periodu funkcije $f(x) = a \cdot \sin(x + c)$, gdje su a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0 konstante, a x neovisna varijabla.

Rezultat: $P = 2 \cdot \pi.$

Zadatak 255 (Matko, srednja škola)

Za koji realan broj a funkcija f(x) = a · x + 10 ima nultočku (– 2, 0)?

Rješenje 255

Ponovimo!

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_\circ) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = a \cdot x + 10 \\ f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{nultočka} \\ x = -2 \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(-2) = a \cdot (-2) + 10 \\ f(-2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a \cdot (-2) + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot a + 10 = 0 \Rightarrow -2 \cdot a = -10 \Rightarrow -2 \cdot a = -10 \ /:(-2) \Rightarrow a = 5.$$

Vježba 255

Za koji realan broj a funkcija f(x) = a · x + 10 ima nultočku (2, 0)?

Rezultat: a = – 5.