Zadatak 121 (Karolina, srednja škola)

Ako je f(x) = x + c linearna funkcija te vrijedi $f \circ f \circ f \circ \ \ldots \ \circ f(1) = m, \ (n \text{ puta})$, onda je:

$$A) \ c = \frac{m-1}{n} \qquad B) \ c = \frac{m}{n-1} \qquad C) \ c = \frac{m-n}{2} \qquad D) \ c = \frac{n+1}{m}$$

Rješenje 121

Ponovimo!

Kompozicija funkcija f i g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Nađemo vrijednost funkcije f(x) = x + c za x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ f(x) = x + c \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = 1 + c.$$

Računamo redom kompozicije funkcije f u točki x = 1.

- $$\begin{cases} (f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1+c) = 1 + c + c = 1 + 2 \cdot c \\ \text{ili} \\ (f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) + c = 1 + c + c = 1 + 2 \cdot c \end{cases}$$

- $$\begin{cases} (f \circ f \circ f)(1) = f(f(f(1))) = f(f(1+c)) = f(1+c+c) = f(1+2\cdot c) = 1 + 2 \cdot c + c = 1 + 3 \cdot c \\ \text{ili} \\ (f \circ f \circ f)(1) = f(f(f(1))) = f(f(1)) + c = f(1) + c + c = f(1) + 2 \cdot c = 1 + c + 2 \cdot c = 1 + 3 \cdot c \end{cases}$$

$$\ldots$$

- $$\underbrace{(f \circ f \circ f \circ f \circ \ \ldots \ \circ f)}_{n \text{ funkcija}}(1) = 1 + n \cdot c.$$

Budući da je

$$f \circ f \circ f \circ \ \ldots \ \circ f(1) = m,$$

slijedi:

$$1 + n \cdot c = m \Rightarrow n \cdot c = m - 1 \Rightarrow n \cdot c = m - 1 \ /: n \Rightarrow c = \frac{m-1}{n}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 121

Ako je f(x) = x + c linearna funkcija te vrijedi $f \circ f \circ f \circ \ \ldots \ \circ f(1) = n, \ (m \text{ puta})$, onda je:

$$A) \ c = \frac{n-1}{m} \qquad B) \ c = \frac{n}{m-1} \qquad C) \ c = \frac{m-n}{2} \qquad D) \ c = \frac{m+1}{n}$$

Rezultat: A.

Zadatak 122 (Tina, gimnazija)

Je li funkcija $f(x) = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$ parna ili neparna ili nije ni parna ni neparna?

Rješenje 122

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0.$$

www.halapa.com

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

Budući da je ova funkcija definirana za sve realne brojeve x, znači da ima smisla računati f(– x).

1.inačica

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu:

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-3^{-x}}{2^{-x}+3^{-x}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{proširimo, pomnožimo brojnik} \\ \text{i nazivnik razlomka s } 2^{x}\cdot 3^{x}\end{array}\right] \Rightarrow f(-x)=\frac{2^{-x}-3^{-x}}{2^{-x}+3^{-x}}\cdot\frac{2^{x}\cdot 3^{x}}{2^{x}\cdot 3^{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\frac{2^{x}\cdot 3^{x}\cdot\left(2^{-x}-3^{-x}\right)}{2^{x}\cdot 3^{x}\cdot\left(2^{-x}+3^{-x}\right)} \Rightarrow f(-x)=\frac{2^{x}\cdot 3^{x}\cdot 2^{-x}-2^{x}\cdot 3^{x}\cdot 3^{-x}}{2^{x}\cdot 3^{x}\cdot 2^{-x}+2^{x}\cdot 3^{x}\cdot 3^{-x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\frac{2^{0}\cdot 3^{x}-2^{x}\cdot 3^{0}}{2^{0}\cdot 3^{x}+2^{x}\cdot 3^{0}} \Rightarrow f(-x)=\frac{1\cdot 3^{x}-2^{x}\cdot 1}{1\cdot 3^{x}+2^{x}\cdot 1} \Rightarrow f(-x)=\frac{3^{x}-2^{x}}{3^{x}+2^{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\frac{-\left(2^{x}-3^{x}\right)}{2^{x}+3^{x}} \Rightarrow f(-x)=-\frac{2^{x}-3^{x}}{2^{x}+3^{x}} \Rightarrow f(-x)=-f(x).$$

Funkcija je neparna.

2.inačica

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu:

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-3^{-x}}{2^{-x}+3^{-x}} \Rightarrow f(-x)=\frac{\frac{1}{2^{x}}-\frac{1}{3^{x}}}{\frac{1}{2^{x}}+\frac{1}{3^{x}}} \Rightarrow f(-x)=\frac{\frac{3^{x}-2^{x}}{2^{x}\cdot 3^{x}}}{\frac{3^{x}+2^{x}}{2^{x}\cdot 3^{x}}} \Rightarrow f(-x)=\frac{\frac{3^{x}-2^{x}}{2^{x}\cdot 3^{x}}}{\frac{3^{x}+2^{x}}{2^{x}\cdot 3^{x}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\frac{\frac{3^{x}-2^{x}}{1}}{\frac{3^{x}+2^{x}}{1}} \Rightarrow f(-x)=\frac{3^{x}-2^{x}}{3^{x}+2^{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\frac{-\left(2^{x}-3^{x}\right)}{2^{x}+3^{x}} \Rightarrow f(-x)=-\frac{2^{x}-3^{x}}{2^{x}+3^{x}} \Rightarrow f(-x)=-f(x).$$

Funkcija je neparna.

Vježba 122

Je li funkcija $f(x)=\frac{3^{x}-5^{x}}{3^{x}+5^{x}}$ parna ili neparna ili nije ni parna ni neparna?

Rezultat: Neparna.

www.halapa.com

Zadatak 123 (Mira, gimnazija)

Zadane su funkcije $f(x)=\frac{2}{x+5}$ i $g(x)=\sqrt[3]{3\cdot x+1}$. $(f\circ g)(21)=$

$$A.\ \frac{2}{9}\qquad B.\ \sqrt[3]{\frac{16}{13}}\qquad C.\ \frac{8}{13}\qquad D.\ \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Rješenje 123

Ponovimo!

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))\quad,\quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

$$\sqrt[n]{a^n}=a\ ,\ a\ge 0.$$

1.inačica

$$(f\circ g)(21)=f(g(21))=\left[g(x)=\sqrt[3]{3\cdot x+1}\right]=f(g(21))=f\left(\sqrt[3]{3\cdot 21+1}\right)=f\left(\sqrt[3]{3\cdot 21+1}\right)=$$

$$=f\left(\sqrt[3]{63+1}\right)=f\left(\sqrt[3]{64}\right)=f\left(\sqrt[3]{4^3}\right)=f\left(\sqrt[3]{4^3}\right)=f(4)=\left[f(x)=\frac{2}{x+5}\right]=\frac{2}{4+5}=\frac{2}{9}.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$(f\circ g)(21)=f(g(21))=\left[f(x)=\frac{2}{x+5}\right]=f(g(21))=\frac{2}{g(21)+5}=\frac{2}{g(21)+5}=\left[g(x)=\sqrt[3]{3\cdot x+1}\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt[3]{3\cdot 21+1}+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{3\cdot 21+1}+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{63+1}+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{64}+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{4^3}+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{4^3}+5}=\frac{2}{4+5}=\frac{2}{9}.$$

Odgovor je pod A.

www.halapa.com

Vježba 123

Zadane su funkcije $f(x)=\frac{2}{x+5}$ i $g(x)=\sqrt[3]{x+1}$. $(f\circ g)(7)=$

$$A.\ \frac{2}{7}\qquad B.\ \frac{7}{2}\qquad C.\ 7\qquad D.\ \frac{1}{7}$$

Rezultat: A.

Zadatak 124 (Andreja, gimnazija)

Zadana je funkcija: $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. Nađite:

$$f(0)\ ,\ f(1)\ ,\ f(-x)\ ,\ f(x+1)\ ,\ f(x-1)\ ,\ f\left(-\frac{1}{x}\right)\ ,\ f(x)+1\ ,\ f\left(\frac{1}{x}\right)+1\ ,\ f\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\ \frac{1}{f(x)}.$$

Rješenje 124

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Zadatak rješavamo tako da u zadanu funkciju umjesto x uvrstimo redom:

$$0,\ 1,\ -x,\ x+1,\ x-1,\ -\frac{1}{x},\ \frac{1}{x}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1-x}{1+x} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{1-0}{1+0}=\frac{1}{1}=1.$$

- $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1-x}{1+x} \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0.$$

- $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1-x}{1+x} \\ x=-x \end{array}\right\} \Rightarrow f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1-x}{1+x} \\ x=x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{1-x-1}{1+x+1}=\frac{1-x-1}{1+x+1}=\frac{-x}{x+2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1-x}{1+x} \\ x=x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x-1)=\frac{1-(x-1)}{1+(x-1)}=\frac{1-x+1}{1+x-1}=\frac{1-x+1}{1+x-1}=\frac{2-x}{x}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1-x}{1+x} \\ x=-\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\left(-\frac{1}{x}\right)}{1+\left(-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\frac{x+1}{1}}{\frac{x-1}{1}}=\frac{x+1}{x-1}.$$

- $$f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{1}=\frac{1-x+1+x}{1+x}=\frac{1-x+1+x}{1+x}=\frac{2}{1+x}.$$

- $$f\left(\frac{1}{x}\right)+1=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+1=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{1}=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}+\frac{1}{1}=\frac{\frac{x-1}{1}}{\frac{x+1}{1}}+\frac{1}{1}=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{1}=\frac{x-1+x+1}{x+1}=\frac{x-1+x+1}{x+1}=\frac{2\cdot x}{x+1}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1-x}{1+x} \\ x=\dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{\frac{x-1}{1}}{\frac{x+1}{1}}=\frac{x-1}{x+1}.$$

- $$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

www.halapa.com

Vježba 124

Zadana je funkcija: $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$. Nađite: $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Rezultat: 1 + x.

Zadatak 125 (Ivana, srednja škola)

Za funkciju $f(x)=a^{x}$ vrijedi $f(-1)=\dfrac{1}{2}$. Koliko je $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$?

Rješenje 125

Ponovimo!

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad \sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{n}{m}} \quad , \quad \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}.$$

Ako je zadana funkcija f(x) = a^x, tada je f(– 1) = a^{-1}. Budući da za funkciju f(x) = a^x vrijedi $f(-1)=\frac{1}{2}$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=a^{-1} \\ f(-1)=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{komparacije}\end{array}\right] \Rightarrow a^{-1}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2^{x} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}.$$

Vježba 125

Za funkciju $f(x)=a^{x}$ vrijedi $f(-1)=\frac{1}{3}$. Koliko je $f\left(\frac{1}{2}\right)$?

Rezultat: $\sqrt{3}$.

Zadatak 126 (Milly, srednja škola)

Zadane su funkcije $f(x)=\frac{2}{x+5}$ i $g(x)=\sqrt[3]{3\cdot x+1}$. $(f\circ g)(21)=$

$A.\ \frac{2}{9}$ $\quad B.\ \sqrt[3]{\frac{16}{13}}$ $\quad C.\ \frac{8}{13}$ $\quad D.\ \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$

www.halapa.com

Rješenje 126

Ponovimo!

$$\sqrt[3]{a^{3}}=a.$$

Kompozicija funkcija:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

1.inačica

$$(f\circ g)(21)=f(g(21))=f(g(21))=\frac{2}{g(21)+5}=\frac{2}{g(21)+5}=\frac{2}{g(21)+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{3\cdot 21+1}+5}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt[3]{3\cdot 21+1}+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{63+1}+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{64}+5}=\frac{2}{\sqrt[3]{4^{3}}+5}=\frac{2}{4+5}=\frac{2}{9}.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$(f\circ g)(21)=f(g(21))=f\left(\sqrt[3]{3\cdot 21+1}\right)=f\left(\sqrt[3]{3\cdot 21+1}\right)=f\left(\sqrt[3]{63+1}\right)=f\left(\sqrt[3]{64}\right)=$$

$$=f\left(\sqrt[3]{4^{3}}\right)=f(4)=f(4)=\frac{2}{4+5}=\frac{2}{4+5}=\frac{2}{9}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 126

Zadane su funkcije $f(x)=\frac{2}{x+5}$ i $g(x)=\sqrt[3]{3\cdot x+1}$. $(f\circ g)(0)=$

$$A.\ \frac{2}{5} \qquad B.\ \sqrt[3]{\frac{11}{7}} \qquad C.\ \frac{1}{3} \qquad D.\ \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Rezultat: C.

Zadatak 127 (Crnka, gimnazija)

Naći domenu funkcije f(x) = cos x.

Rješenje 127

Ponovimo!

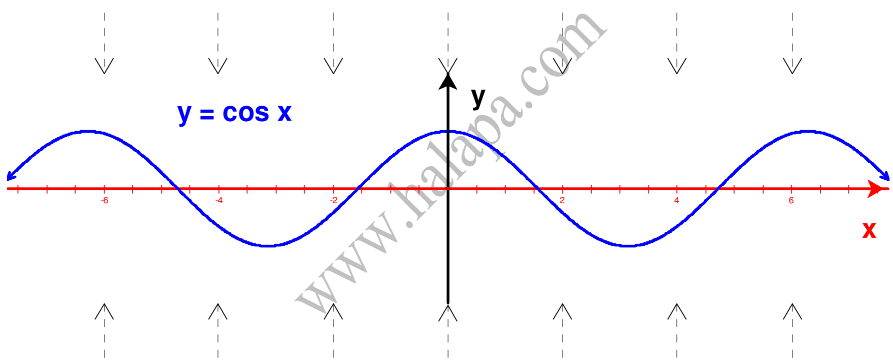
Neka su A i B dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x\in R$ pridružen točno jedan element $y\in R$, kažemo da je definirana funkcija sa skupa A u skup B i pišemo

$$f: A\rightarrow B.$$

Skup A zove se područje definicije funkcije ili domena, a skup B područje vrijednosti funkcije ili kodomena. Ako funkcija f elementu x pridružuje element y to zapisujemo

$$y=f(x) \ \text{ili}\ \ f: x\mapsto y.$$

Pod područjem definicije realne funkcije f podrazumijevamo skup $x\in R$, takvih da je i f(x) realan broj.



www.halapa.com

Domena je projekcija grafa funkcije na os apscisu.
Uzmemo li bilo koji realan broj x, dobit ćemo realnu vrijednost funkcije f(x) = cos x pa je ta funkcija definirana za svaki realni broj x, tj. njezina domena je

$$D(f)=R \quad \text{ili} \quad D(f)=\langle -\infty, +\infty\rangle.$$

Vježba 127

Naći domenu funkcije f(x) = sin x.

Rezultat: $D(f)=R$ ili $D(f)=\langle -\infty, +\infty\rangle$.

Zadatak 128 (Crnka, gimnazija)

Naći domenu funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

Rješenje 128

Ponovimo!

Neka su A i B dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x\in A$ pridružen točno jedan element $y\in B$, kažemo da je definirana funkcija sa skupa A u skup B i pišemo

$$f: A\rightarrow B.$$

Skup A zove se područje definicije funkcije ili domena, a skup B područje vrijednosti funkcije ili kodomena. Ako funkcija f elementu x pridružuje element y to zapisujemo

$$y = f(x) \text{ ili } f : x \mapsto y.$$

Pod područjem definicije realne funkcije f podrazumijevamo skup $x \in R$, takvih da je i f(x) realan broj.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je $x \geq 0$ ili $x \in \left[0, +\infty\right\rangle$.

Razlomak je pozitivan ako su brojnik i nazivnik oba pozitivni ili ako su brojnik i nazivnik oba negativni. Uočimo da je razlomak jednak nuli samo ako je brojnik jednak nuli, a nazivnik različit od nule.

$$\frac{a}{b} \geq 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a \geq 0 \\ b > 0 \end{array}\right\} \text{ ili } \left.\begin{array}{l} a \leq 0 \\ b < \end{array}\right\}.$$

Budući da realna funkcija f mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u tom skupu, slijedi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{x+2} \geq 0.$$

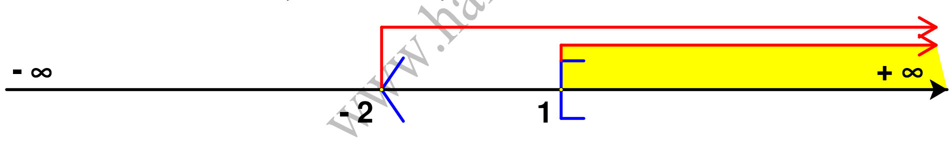
Taj količnik (razlomak) bit će pozitivan ako su brojnik i nazivnik oba pozitivni (1.slučaj) ili ako su oba negativni (2.slučaj).

1.slučaj

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{array}\right\}.$$

Rješenje sustava nejednadžbi odredimo tako da svaku nejednadžbu posebno riješimo, a onda tražimo presjek tih rješenja, tj. zajednički dio.

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x > -2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x \geq 1 \;\Rightarrow\; x \in \left[1, +\infty\right\rangle.$$



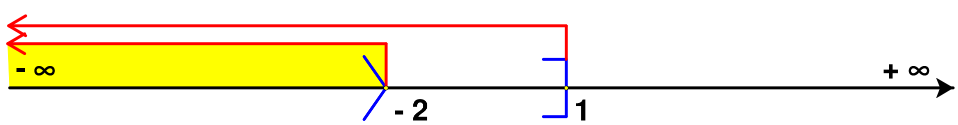
www.halapa.com

2.slučaj

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x-1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \end{array}\right\}.$$

Rješenje sustava nejednadžbi odredimo tako da svaku nejednadžbu posebno riješimo, a onda tražimo presjek tih rješenja, tj. zajednički dio.

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \leq 0 \\ x+2 < 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x < -2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x < -2 \;\Rightarrow\; x \in \left\langle -\infty, -2\right\rangle.$$



Domena zadane funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ je unija rješenja 1.slučaja i 2.slučaja.

$$D(f) = \left\langle -\infty, -2\right\rangle \cup \left[1, +\infty\right\rangle.$$

Ili

$$D(f) = R \setminus \left[-2, 1\right\rangle.$$

Vježba 128

Naći domenu funkcije $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}.$

Rezultat: $D(f)=\langle -\infty, -3\rangle \cup [1, +\infty\rangle.$

Zadatak 129 (Ivana, gimnazija)

Dane su funkcije $f(x)=2\cdot x^2+4$ i $g(x)=x+h.$ Koliko je $f(g(0))-g(f(0))$?

$A)\ h-32 \qquad B)\ 32-h \qquad C)\ h\cdot(2\cdot h-1) \qquad D)\ 0$

Rješenje 129

Ponovimo!

Kompozicija funkcija

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

Ako su zadane funkcije

$$\begin{cases} f(x)=2\cdot x^2+4 \\ g(x)=x+h, \end{cases}$$

uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=2\cdot a^2+4 \\ g(a)=a+h \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(m)=2\cdot m^2+4 \\ g(m)=m+h \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(\blacktriangle)=2\cdot\blacktriangle^2+4 \\ g(\blacktriangle)=\blacktriangle+h \end{array}\right\}.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x^2+4 \\ g(x)=x+h \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(0))-g(f(0))=f(g(0))-g(f(0))=f(0+h)-g\left(2\cdot 0^2+4\right)=$$

$$=f(0+h)-g\left(2\cdot 0^2+4\right)=f(h)-g(0+4)=f(h)-g(4)=2\cdot h^2+4-(4+h)=$$

$$=2\cdot h^2+4-4-h=2\cdot h^2+4-4-h=2\cdot h^2-h=h\cdot(2\cdot h-1).$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x^2+4 \\ g(x)=x+h \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(0))-g(f(0))=f(g(0))-g(f(0))=2\cdot(g(0))^2+4-(f(0)+h)=$$

$$=2\cdot(g(0))^2+4-f(0)-h=2\cdot(0+h)^2+4-\left(2\cdot 0^2+4\right)-h=2\cdot h^2+4-(0+4)-h=$$

$$=2\cdot h^2+4-4-h=2\cdot h^2+4-4-h=2\cdot h^2-h=h\cdot(2\cdot h-1).$$

Odgovor je pod C.

Vježba 129

Dane su funkcije $f(x)=2\cdot x^2+4$ i $g(x)=x+h.$ Koliko je $g(f(0))-f(g(0))$?

$A)\ h-32 \qquad B)\ 32-h \qquad C)\ h\cdot(1-2\cdot h) \qquad D)\ 0$

Rezultat: C.

www.halapa.com

Zadatak 130 (Kika, srednja škola)

Za koji argument x funkcija $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ poprima vrijednost 5?

Rješenje 130

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Funkcija ili preslikavanje je pridruživanje elemenata jednog skupa (domene) u drugi (kodomenu). Pritom preslikavanje mora biti jedinstveno, tj. svaki član domene preslika se u točno jedan član kodomene.
Funkcija ili preslikavanje je uređena trojka (D, K, f) koja sadrži skupove D, K i neko pravilo $f : D \rightarrow K$ po kojem se svakom elementu x iz skupa D pridružuje jedinstveni element y iz skupa K tako da je

$$y = f(x).$$

Skup D naziva se područje definicije ili domena funkcije f, a skup K područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. Element domene x je nezavisna varijabla ili argument funkcije f, a element kodomene y je zavisna varijabla funkcije f.
Računamo argument x.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x + \frac{1}{2} \\ f(x) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow -x + \frac{1}{2} = 5 \Rightarrow -x = 5 - \frac{1}{2} \Rightarrow -x = \frac{5}{1} - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = \frac{10-1}{2} \Rightarrow -x = \frac{9}{2} \Rightarrow -x = \frac{9}{2} \;/ \cdot (-1) \Rightarrow x = -\frac{9}{2}.$$

Vježba 130

Za koji argument x funkcija $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ poprima vrijednost 1?

Rezultat: $-\frac{1}{2}.$

www.halapa.com

Zadatak 131 (Iva, srednja škola)

Za koje realne brojeve a postoji realan broj x takav da je $\sin x = \frac{1}{a-1}$?

Rješenje 131

Ponovimo!

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad , \quad |x| \geq a \;,\; a > 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a \end{array}\right\} \quad , \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}.$$

Funkcija ili preslikavanje je pridruživanje elemenata jednog skupa (domene) u drugi (kodomenu). Pritom preslikavanje mora biti jedinstveno, tj. svaki član domene preslika se u točno jedan član kodomene.
Funkcija ili preslikavanje je uređena trojka (D, K, f) koja sadrži skupove D, K i neko pravilo $f : D \rightarrow K$ po kojem se svakom elementu x iz skupa D pridružuje jedinstveni element y iz skupa K tako da je

$$y = f(x).$$

Skup D naziva se područje definicije ili domena funkcije f, a skup K područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. Element domene x je nezavisna varijabla ili argument funkcije f, a element kodomene y je zavisna varijabla funkcije f. Funkcija

$$f(x) = \sin x$$

je omeđena, tj. njezina kodomena (područje vrijednosti) je segment

$$[-1,\ 1].$$

Dakle, vrijedi:

$$-1 \le \sin x \le 1 \ \Rightarrow\ |\sin x| \le 1.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Tražimo realne brojeve a za koje je valjana zadana jednakost.

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{a-1} \\ |\sin x| \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{1}{a-1}\right| \le 1 \ \Rightarrow\ \frac{|1|}{|a-1|} \le 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{|a-1|} \le 1 \ \Rightarrow\ |a-1| \ge 1.$$

Dobivena nejednakost ekvivalentna je (ima isti skup rješenja) sustavu nejednadžbi.

$$|a-1| \ge 1 \ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a-1 \ge 1 \\ a-1 \le -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \ge 1+1 \\ a \le -1+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \ge 2 \\ a \le 0 \end{array}\right\}.$$

Rješenje je:

$$a \in \langle -\infty,\ 0\,] \cup [\,2,\ +\infty \rangle.$$

www.halapa.com

Vježba 131

Za koje realne brojeve a postoji realan broj x takav da je $\cos x = \dfrac{1}{a-1}$?

Rezultat: $a \in \langle -\infty,\ 0\,] \cup [\,2,\ +\infty \rangle.$

Zadatak 132 (Mario, gimnazija)

Ako je $f(1 - x) - x \cdot f(1 + x) = x$ za svaki realan broj x, koliko je f(0) i f(2)?

Rješenje 132

Ponovimo!

Funkcija ili preslikavanje je pridruživanje elemenata jednog skupa (domene) u drugi (kodomenu). Pritom preslikavanje mora biti jedinstveno, tj. svaki član domene preslika se u točno jedan član kodomene.
Funkcija ili preslikavanje je uređena trojka (D, K, f) koja sadrži skupove D, K i neko pravilo $f : D \to K$ po kojem se svakom elementu x iz skupa D pridružuje jedinstveni element y iz skupa K tako da je

$$y = f(x).$$

Skup D naziva se područje definicije ili domena funkcije f, a skup K područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. Element domene x je nezavisna varijabla ili argument funkcije f, a element kodomene y je zavisna varijabla funkcije f.
Iz dane jednakosti nakon uvrštavanja x = 1 i x = – 1 dobije se sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{matrix} x=1\ ,\ f(1-x)-x\cdot f(1+x)=x \\ x=-1\ ,\ f(1-x)-x\cdot f(1+x)=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(1-1)-1\cdot f(1+1)=1 \\ f(1-(-1))-(-1)\cdot f(1+(-1))=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f(1-1)-1\cdot f(1+1)=1 \\ f(1+1)+1\cdot f(1-1)=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(0)-f(2)=1 \\ f(2)+f(0)=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(0)-f(2)=1 \\ f(0)+f(2)=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 2\cdot f(0)=0 \Rightarrow 2\cdot f(0)=0\ /:2 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f(0)=0 \\ f(0)+f(2)=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0+f(2)=-1 \Rightarrow f(2)=-1.$$

Vježba 132

Ako je f(1 – x) – x · f(1 + x) = x^2 za svaki realan broj x, koliko je f(0)?

Rezultat: 1.

Zadatak 133 (Martina, srednja škola)

Neka je $f\left(\frac{2\cdot x-1}{x}\right)=x.$ Odredite $f(4)$.

Rješenje 133

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Uvedemo zamjenu (supstituciju)

$$t=\frac{2\cdot x-1}{x}$$

i odredimo x.

$$t=\frac{2\cdot x-1}{x} \Rightarrow \frac{2\cdot x-1}{x}=t \Rightarrow \frac{2\cdot x-1}{x}=t\ /\cdot x \Rightarrow 2\cdot x-1=t\cdot x \Rightarrow 2\cdot x-t\cdot x=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(2-t)=1 \Rightarrow x\cdot(2-t)=1\ /\cdot\frac{1}{2-t} \Rightarrow x=\frac{1}{2-t}.$$

Funkcija glasi:

$$f(t)=\frac{1}{2-t} \quad \text{ili} \quad f(x)=\frac{1}{2-x}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{matrix} f(x)=\frac{1}{2-x} \\ x=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(4)=\frac{1}{2-4} \Rightarrow f(4)=\frac{1}{-2} \Rightarrow f(4)=-\frac{1}{2}.$$

Vježba 133

Neka je $f\left(\frac{2\cdot x-1}{x}\right)=x.$ Odredite $f(1)$.

Rezultat: 1.

Zadatak 134 (Vesna, gimnazija)

Zadana je funkcija f(x) = x^3 – 3 · x^2. Odredite nultočke funkcije i koordinte točke T grafa kojoj je apscisa 1.

www.halapa.com

Rješenje 134

Ponovimo!

Nultočka polinoma

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ \dots\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$$

je svaki kompleksni broj x_0 za koji je

$$f(x_0)=0.$$

Ako je x_0 realan broj, onda se x_0 zove realna nultočka, a ako je x_0 kompleksan broj onda se x_0 zove kompleksna nultočka. Broj x_0 je nultočka polinoma f ako i samo ako je f djeljiv polinomom

$$g(x)=x-x_0.$$

Ako je polinom f djeljiv polinomom

$$g(x)=(x-x_0)^k\ ,\ k\in N,$$

a nije djeljiv polinomom

$$h(x)=(x-x_0)^{k+1}$$

onda kažemo da je $x = x_0$ k – struka nultočka od f ili da je kratnost (višestrukost) nultočke $x = x_0$ jednaka k.

Računamo nultočke zadane funkcije.

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x^3-3\cdot x^2 \\ f(x)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3-3\cdot x^2=0 \Rightarrow x^2\cdot(x-3)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2=0 \\ x-3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2=0\ /\sqrt{\ } \\ x-3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{1,2}=0\ \text{dvostruka nultočka} \\ x_3=3 \end{matrix}\right\}.$$

Funkcija ima tri nultočke.

Budući da točka T, kojoj je apscisa 1, leži na grafu

$$y=x^3-3\cdot x^2,$$

njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu krivulje.

$$\left.\begin{matrix} T(x,\ y)=T(1,\ y) \\ y=x^3-3\cdot x^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=1^3-3\cdot 1^2 \Rightarrow y=1-3\cdot 1 \Rightarrow y=1-3 \Rightarrow y=-2.$$

Koordinate točke T glase:

$$T(x,\ y)=T(1,\ -2).$$

Vježba 134

Zadana je funkcija $f(x) = x^3 - 2\cdot x^2$. Odredite nultočke funkcije.

Rezultat: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Zadatak 135 (Silvana, srednja škola)

Zadana je funkcija $f(x)=\frac{1-x}{x}$. Nađite inverznu funkciju.

Rješenje 135

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

www.halapa.com

Tražimo inverznu funkciju:

1.inačica

$$f(x)=\frac{1-x}{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pišemo} \\ y=f(x) \end{bmatrix} \Rightarrow y=\frac{1-x}{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamijenimo } y \text{ i } x \\ y \leftrightarrow x \end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{1-y}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{računamo } y] \Rightarrow x=\frac{1-y}{y} \,/\cdot y \Rightarrow x\cdot y=1-y \Rightarrow x\cdot y+y=1 \Rightarrow y\cdot(x+1)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\cdot(x+1)=1 \,/\cdot \frac{1}{x+1} \Rightarrow y=\frac{1}{x+1} \Rightarrow y=\frac{1}{1+x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pišemo} \\ y=f^{-1}(x) \end{bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{1+x}.$$

2.inačica

$$f(x)=\frac{1-x}{x} \Rightarrow f(x)=\frac{1-x}{x} \,/\cdot x \Rightarrow x\cdot f(x)=1-x \Rightarrow x\cdot f(x)+x=1 \Rightarrow x\cdot(f(x)+1)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(f(x)+1)=1 \,/\cdot \frac{1}{f(x)+1} \Rightarrow x=\frac{1}{f(x)+1} \Rightarrow x=\frac{1}{1+f(x)}.$$

Sada pišemo:

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Vježba 135

Zadana je funkcija $f(x)=\frac{1+x}{x}$. Nađite inverznu funkciju.

Rezultat: $f^{-1}(x)=\frac{1}{x-1}.$

Zadatak 136 (Suncokret, gimnazija)

Ako je $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, izračunaj $(f\circ f)\left(\sqrt{x^2-1}\right)$.

www.halapa.com

Rješenje 136

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

1.inačica

$$(f\circ f)\left(\sqrt{x^2-1}\right)=f\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)=f\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)=f\left(\sqrt{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}\right)=$$

$$=f\left(\sqrt{x^2-1+1}\right)=f\left(\sqrt{x^2-1+1}\right)=f\left(\sqrt{x^2}\right)=f\left(\sqrt{x^2}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2}\right)^2+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

2.inačica

$$(f\circ f)\left(\sqrt{x^2-1}\right)=f\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)=f\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)=\sqrt{\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)^2+1}=$$

$$=\sqrt{\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)^2+1}=\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2-1+1}\right)^2+1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x^2-1+1}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2}\right)^2+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

3.inačica

$$\left(f\circ f\right)\left(\sqrt{x^2-1}\right)=f\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)=f\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)=\sqrt{\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)^2+1}=$$

$$=\sqrt{\left(f\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right)^2+1}=\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+1}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+1+1}=$$

$$=\sqrt{x^2-1+1+1}=\sqrt{x^2-1+1+1}=\sqrt{x^2+1}.$$

Vježba 136

Ako je $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, izračunaj $(f\circ f)(1)$.

Rezultat: $\sqrt{2}.$

www.halapa.com

Zadatak 137 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{1-x}$.

Rješenje 137

Ponovimo!

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x\in D$ pridružen točno jedan element $f(x)\in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f:D\to K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f)=[0,+\infty\rangle.$$

Budući da funkcija

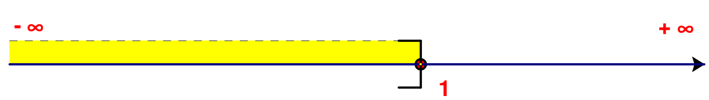
$$f(x)=\sqrt{1-x}$$

mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x)=\sqrt{1-x}\ \Rightarrow\ 1-x\ge 0\ \Rightarrow\ -x\ge -1\ \Rightarrow\ -x\ge -1\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ x\le 1.$$

Domena funkcije je polusegment.

$$x\le 1\ \Rightarrow\ D(f)=\langle -\infty,\ 1].$$



Vježba 137

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{2-x}$.

Rezultat: $D(f)=\langle -\infty,\ 2\,]$.

Zadatak 138 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{1-|x|}$.

Rješenje 138

Ponovimo!

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \to K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f)=[\,0,\ +\infty\,\rangle.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

www.halapa.com

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| \le a\ ,\ a > 0 \ \Rightarrow\ -a \le x \le a \ \Rightarrow\ x \in [\,-a,\ a\,].$$

Budući da funkcija

$$f(x)=\sqrt{1-|x|}$$

mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x)=\sqrt{1-|x|} \ \Rightarrow\ 1-|x| \ge 0 \ \Rightarrow\ -|x| \ge -1 \ \Rightarrow\ -|x| \ge -1 \ /\cdot(-1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |x| \le 1 \ \Rightarrow\ -1 \le x \le 1 \ \Rightarrow\ x \in [\,-1,\ 1\,].$$

Domena funkcije je segment.

$$-1 \le x \le 1 \ \Rightarrow\ D(f)=[\,-1,\ 1\,].$$

Vježba 138

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{2-|x|}$.

Rezultat: $D(f)=[\,-2,\ 2\,]$.

Zadatak 139 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Rješenje 139

Ponovimo!

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \to K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f)=\left[\,0, +\infty\right\rangle.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| \le a \;,\; a>0 \;\Rightarrow\; -a \le x \le a \;\Rightarrow\; x \in [-a, a].$$

$$\sqrt{x^2}=|x|.$$

Budući da funkcija

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x)=\sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; 1-x^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; -x^2 \ge -1 \;\Rightarrow\; -x^2 \ge -1 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 \le 1 \;\Rightarrow\; x^2 \le 1 \;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow\; |x| \le \sqrt{1} \;\Rightarrow\; |x| \le 1 \;\Rightarrow\; -1 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; x \in [-1, 1].$$

Domena funkcije je segment.

$$-1 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; D(f)=[-1, 1].$$

Vježba 139

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

Rezultat: $D(f)=[-2, 2]$.

Zadatak 140 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{1-x^3}$.

Rješenje 140

Ponovimo!

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \rightarrow K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f)=\left[\,0, +\infty\right\rangle.$$

Budući da funkcija

$$f(x)=\sqrt{1-x^3}$$

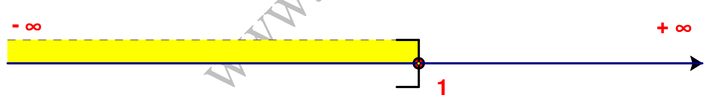
mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x)=\sqrt{1-x^3} \Rightarrow 1-x^3 \geq 0 \Rightarrow -x^3 \geq -1 \Rightarrow -x^3 \geq -1 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 \leq 1 \Rightarrow x^3 \leq 1 \;/\sqrt[3]{} \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{1} \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow -\infty \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in \left\langle -\infty, 1\right].$$

Domena funkcije je polusegment.

$$x \leq 1 \Rightarrow D(f)=\left\langle -\infty, 1\right].$$



www.halapa.com

Vježba 140

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{8-x^3}$.

Rezultat: $D(f)=\left\langle -\infty, 2\right].$