Zadatak 101 (Kate, studentica)

Je li funkcija $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ parna ili neparna?

Rješenje 101

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a} \quad , \quad \ln a^n=n\cdot\ln a.$$

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području $-a\le x\le a$ nazivamo:

- parnom, ako je $f(-x)=f(x)$
- neparnom, ako je $f(-x)=-f(x)$.

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu:

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)\Rightarrow f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow f(-x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{brojnika}\end{array}\right]\Rightarrow f(-x)=\ln\left(\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku je}\\ \text{razlika kvadrata}\end{array}\right]\Rightarrow f(-x)=\ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\ln\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}\Rightarrow f(-x)=\ln\frac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x}\Rightarrow f(-x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}\Rightarrow f(-x)=-1\cdot\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\Rightarrow f(-x)=-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow f(-x)=-\underbrace{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}_{f(x)}\Rightarrow f(-x)=-f(x).$$

Funkcija je neparna.

Vježba 101

Je li funkcija $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$ parna ili neparna?

Rezultat: Neparna je.

Zadatak 102 (Kate, studentica)

Zadane su funkcije $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, $g(x)=\sqrt{x^2+4}$. Dokaži da vrijedi

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)+g\left(x-\frac{1}{x}\right)=2\cdot x,\ x>1.$$

Rješenje 102

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0.$$

Uoči da iz uvjeta x > 1 slijedi:

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \;/\cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} > 0.$$

Sada računamo:

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)+g\left(x-\frac{1}{x}\right)=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}=$$

$$=\sqrt{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2-4}+\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2+4}=$$

$$=\sqrt{x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-4}+\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+4}=\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}-4}+\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}+4}=$$

$$=\sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=\left[x-\frac{1}{x}>0\;,\;x+\frac{1}{x}>0\right]=$$

$$=x-\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x}=2\cdot x.$$

Dokaz gotov.

Vježba 102

Zadane su funkcije $f(x)=\sqrt{x^2+4}$, $g(x)=\sqrt{x^2-4}$. Dokaži da vrijedi $f\left(x-\frac{1}{x}\right)+g\left(x+\frac{1}{x}\right)=2\cdot x,\; x>1.$

Rezultat: Točno je.

Zadatak 103 (Kate, studentica)

Nađi kompoziciju funkcija f ○ g, g ○ f ako je f(x) = 2 · x + 1, g(x) = x + 1.

Rješenje 103

Ponovimo!

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Uoči da vrijedi (☺):

$$f(x)=2\cdot x+1 \Rightarrow f(\blacklozenge)=2\cdot\blacklozenge+1 \quad , \quad g(x)=x+1 \Rightarrow g(\blacklozenge)=\blacklozenge+1.$$

1.inačica

Računamo kompoziciju f ○ g.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\cdot g(x)+1=\left[g(x)=x+1\right]=2\cdot(x+1)+1=2\cdot x+2+1=2\cdot x+3.$$

Računamo kompoziciju g ○ f.

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=f(x)+1=\left[f(x)=2\cdot x+1\right]=2\cdot x+1+1=2\cdot x+2=2\cdot(x+1).$$

2.inačica

Računamo kompoziciju f ○ g.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=\left[f(x)=2\cdot x+1\right]=2\cdot(x+1)+1=2\cdot x+2+1=2\cdot x+3.$$

Računamo kompoziciju g ○ f.

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\cdot x+1)=\left[g(x)=x+1\right]=2\cdot x+1+1=2\cdot x+2=2\cdot(x+1).$$

Vježba 103

Nađi kompoziciju funkcija f ○ g ako je f(x) = 3 · x + 1, g(x) = x + 1.

Rezultat: 3 · x + 4.

Zadatak 104 (Kate, studentica)

$$\text{Nađi nultočke funkcije: } f(x)=\frac{5\cdot x-4\cdot x^2-x^3}{3\cdot x^2+5}.$$

Rješenje 104

Ponovimo!

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \;\text{ ili }\; b=0 \;\text{ ili }\; a=b=0.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Razlomak, koji ima nazivnik različit od nule, jednak je nuli ako je brojnik jednak nuli.

$$\frac{a}{b}=0 \;,\; b\neq 0 \;\Rightarrow\; a=0.$$

Odredimo nultočke funkcije $f(x)=\frac{5\cdot x-4\cdot x^2-x^3}{3\cdot x^2+5}$. Iz f(x) = 0 slijedi:

$$\frac{5\cdot x-4\cdot x^2-x^3}{3\cdot x^2+5}=0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\text{brojnik izjednačimo}\\ \text{s nulom}\end{array}\right] \;\Rightarrow\; 5\cdot x-4\cdot x^2-x^3=0 \;\Rightarrow\; -x^3-4\cdot x^2+5\cdot x=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -x^3-4\cdot x^2+5\cdot x=0 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; x^3+4\cdot x^2-5\cdot x=0 \;\Rightarrow\; x\cdot\left(x^2+4\cdot x-5\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+4\cdot x-5=0 \end{array}\right\}.$$

Prvo rješenje je

$$x_1 = 0.$$

Ostala dva rješenja glase:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+4\cdot x-5=0 \\ a=1 \;,\; b=4 \;,\; c=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=4 \;,\; c=-5 \\ x_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm 6}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=\dfrac{-4+6}{2} \\ x_3=\dfrac{-4-6}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=\dfrac{2}{2} \\ x_3=-\dfrac{10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=1 \\ x_3=-5 \end{array}\right\}.$$

Provjerimo je li nazivnik za svaku od dobivenih vrijednosti $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -5$ različit od nule.

- $$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ 3\cdot x^2+5 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0^2+5=3\cdot 0+5=5\neq 0.$$

- $$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ 3\cdot x^2+5 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 1^2+5=3\cdot 1+5=8\neq 0.$$
- $$\left.\begin{array}{l} x=-5 \\ 3\cdot x^2+5 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot(-5)^2+5=3\cdot 25+5=80\neq 0.$$

Znači da su nultočke zadane funkcije:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -5.$$

Ili ovako!
Nazivnik izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu.

$$3\cdot x^2+5=0 \Rightarrow 3\cdot x^2=-5 \Rightarrow 3\cdot x^2=-5 \ /:3 \Rightarrow x^2=-\frac{5}{3}\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{5}{3}} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot i.$$

Vidimo da su nultočke nazivnika različite od nultočaka brojnika što znači da funkcija

$$f(x)=\frac{5\cdot x-4\cdot x^2-x^3}{3\cdot x^2+5}$$

ima nultočke:

$$x_1=0 \quad , \quad x_2=1 \quad , \quad x_3=-5.$$

Vježba 104

Nađi nultočke funkcije: $f(x)=\dfrac{5-4\cdot x-x^2}{3\cdot x^2+5}.$

Rezultat: $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Zadatak 105 (Kate, studentica)

Nađi nultočku funkcije: $f(x)=2^{x+1}-2.$

Rješenje 105

Ponovimo!

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x) \quad , \quad a^1=a.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Odredimo nultočku funkcije $f(x)=2^{x+1}-2.$ Iz f(x) = 0 slijedi:

$$2^{x+1}-2=0 \Rightarrow 2^{x+1}=2 \Rightarrow 2^{x+1}=2^1 \Rightarrow x+1=1 \Rightarrow x=1-1 \Rightarrow x=0.$$

Vježba 105

Nađi nultočku funkcije: $f(x)=3^{x+1}-3.$

Rezultat: x = 0.

Zadatak 106 (Dijanchy, studentica)

Odredite globalne ekstreme (najveću i najmanju vrijednost) funkcije

$$f(x)=2\cdot x^3-3\cdot x^2-36\cdot x-8 \text{ na segmentu } [-3,\ 6].$$

Rješenje 106

Ponovimo!

$$\text{Derivacija zbroja: } (f+g)'=f'+g'.$$

$$\text{Derivacija umnoška konstantnog faktora i funkcije: } (c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
x	1
c, konstanta	0

Najmanja (ili najveća) vrijednost neprekinute funkcije f(x) na zadanom segmentu [a, b] dobije se ili u stacionarnim točkama funkcije (kritičnim točkama) koje pripadaju segmentu ili na krajevima segmenta [a, b].

Ekstremi funkcije mogu biti maksimum ili minimum ili oboje. Moramo najprije naći prvu derivaciju:

$$f'(x)=\left(2\cdot x^3-3\cdot x^2-36\cdot x-8\right)' \Rightarrow f'(x)=\left(2\cdot x^3\right)'-\left(3\cdot x^2\right)'-(36\cdot x)'-8' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=2\cdot\left(x^3\right)'-3\cdot\left(x^2\right)'-36\cdot x'-8' \Rightarrow f'(x)=2\cdot 3\cdot x^2-3\cdot 2\cdot x-36\cdot 1-0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=6\cdot x^2-6\cdot x-36.$$

Sada prvu derivaciju izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu.

$$6\cdot x^2-6\cdot x-36=0 \Rightarrow 6\cdot x^2-6\cdot x-36=0 \;/:6 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-x-6=0 \\ a=1\;,\;b=-1\;,\;c=-6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\;,\;b=-1\;,\;c=-6 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{1+5}{2} \\ x_2=\dfrac{1-5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{6}{2} \\ x_2=-\dfrac{4}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\}.$$

Rješenja su $x_1 = 3$ i $x_2 = -2$. Uočimo da točke pripadaju zadanom segmentu.

Te se točke zovu stacionarne točke. Hoće li u njima biti maksimum ili minimum, znat ćemo ako nađemo drugu derivaciju.

U drugu derivaciju uvrstimo x = 3. Ako je druga derivacija pozitivna, funkcija ima minimum, ako je pak druga derivacija negativna, funkcija ima maksimum.

U drugu derivaciju uvrstimo x = – 2. Ako je druga derivacija pozitivna, funkcija ima minimum, ako je pak druga derivacija negativna, funkcija ima maksimum.

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(6\cdot x^2-6\cdot x-36\right)'=\left(6\cdot x^2\right)'-(6\cdot x)'-36'=6\cdot\left(x^2\right)'-6\cdot x'-36'=$$

$$=6\cdot 2\cdot x-6\cdot 1-0=12\cdot x-6.$$

- Uvrstimo x = 3:

$$f''(3)=12\cdot 3-6=36-6=30>0.$$

Dakle, druga derivacija je pozitivna pa funkcija u točki x = 3 ima minimum. Vrijednost minimuma dobit ćemo tako da x = 3 uvrstimo u zadanu funkciju:

$$\left.\begin{matrix} x=3 \\ f(x)=2\cdot x^3-3\cdot x^2-36\cdot x-8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(3)=2\cdot 3^3-3\cdot 3^2-36\cdot 3-8=-89.$$

Minimum će biti u točki m(3, – 89).

- Uvrstimo x = – 2:

$$f''(-2)=12\cdot(-2)-6=-24-6=-30<0.$$

Dakle, druga derivacija je negativna pa funkcija u točki x = – 2 ima maksimum. Vrijednost maksimuma dobit ćemo tako da x = – 2 uvrstimo u zadanu funkciju:

$$\left.\begin{array}{l} x=-2 \\ f(x)=2\cdot x^{3}-3\cdot x^{2}-36\cdot x-8 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)=2\cdot(-2)^{3}-3\cdot(-2)^{2}-36\cdot(-2)-8=36.$$

Maksimum će biti u točki M(– 2, 36).

Sada računamo vrijednosti funkcije u rubnim točkama segmenta $[-3, 6]$.

- x = – 3

Vrijednost funkcije dobit ćemo tako da x = – 3 uvrstimo u zadanu funkciju:

$$\left.\begin{array}{l} x=-3 \\ f(x)=2\cdot x^{3}-3\cdot x^{2}-36\cdot x-8 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-3)=2\cdot(-3)^{3}-3\cdot(-3)^{2}-36\cdot(-3)-8=19.$$

- x = 6

Vrijednost funkcije dobit ćemo tako da x = 6 uvrstimo u zadanu funkciju:

$$\left.\begin{array}{l} x=6 \\ f(x)=2\cdot x^{3}-3\cdot x^{2}-36\cdot x-8 \end{array}\right\} \Rightarrow f(6)=2\cdot 6^{3}-3\cdot 6^{2}-36\cdot 6-8=100.$$

Ako usporedimo vrijednosti funkcije u stacionarnim točkama

$$x=3 \Rightarrow f(3)=-89 \text{ minimum} \quad , \quad x=-2 \Rightarrow f(-2)=36 \text{ maksimum}$$

sa vrijednostima funkcije na krajevima segmenta $[-3, 6]$

$$x=-3 \Rightarrow f(-3)=19 \quad , \quad x=6 \Rightarrow f(6)=100$$

zaključujemo da najmanju vrijednost m = – 89 funkcija ima u točki (u točki minimuma) x = 3 i ona iznosi – 89

$$m(3, -89),$$

a najveću vrijednost M = 100 funkcija ima u točki x = 6 (na desnoj strani segmenta) i ona iznosi

$$M(6, 100).$$

Vježba 106

Odredite globalne ekstreme (najveću i najmanju vrijednost) funkcije

$$f(x)=2\cdot x^{3}+3\cdot x^{2}-12\cdot x+1 \text{ na segmentu } [-1, 5].$$

Rezultat: $m(1, -6)$ minimum , $M(5, 266)$ maksimum.

Zadatak 107 (Snježana, gimnazija)

Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $y=2\cdot\sin 2x$, $x\in[0, 2\pi]$.

Rješenje 107

Ponovimo!

Podsjetimo se svojstava funkcije f(x) = sin x:

- Period funkcije sinus je 2π.
- Nultočke (točke u kojima graf siječe x-os ili apscisu) su 0, π, 2π, 3π, ..., tj. kπ, k je cijeli broj. Mi ćemo samo promatrati dio grafa na segmentu [0 , 2π].
- Maksimum funkcije je u

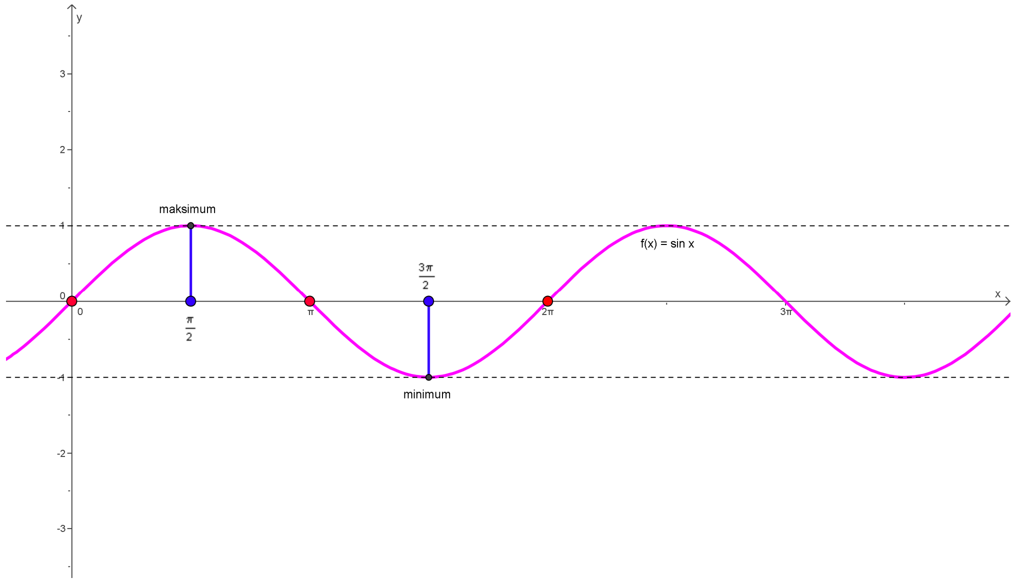
$$\frac{\pi}{2}$$

i iznosi +1.

- Minimum funkcije je u

$$\frac{3\pi}{2}$$

i iznosi – 1.



Zadana funkcija f(x) = 2 · sin 2x ima amplitudu 2 što znači da će maksimum biti + 2, a minimum – 2. Nultočke funkcije nađemo tako da vrijednost argumenta 2x izjednačimo s nultočkama funkcije sinus: 0, π, 2π, 3π, 4π.

$$2 \cdot x = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot x = 0 \;/:2 \;\Rightarrow\; x = 0$$

$$2 \cdot x = \pi \;\Rightarrow\; 2 \cdot x = \pi \;/:2 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2}$$

$$2 \cdot x = 2 \cdot \pi \;\Rightarrow\; 2 \cdot x = 2 \cdot \pi \;/:2 \;\Rightarrow\; x = \pi.$$

$$2 \cdot x = 3 \cdot \pi \;\Rightarrow\; 2 \cdot x = 3 \cdot \pi \;/:2 \;\Rightarrow\; x = \frac{3 \cdot \pi}{2}.$$

$$2 \cdot x = 4 \cdot \pi \;\Rightarrow\; 2 \cdot x = 4 \cdot \pi \;/:2 \;\Rightarrow\; x = 2 \cdot \pi.$$

Nultočke naše funkcije su:

$$0 \;,\; \frac{\pi}{2} \;,\; \pi \;,\; \frac{3 \cdot \pi}{2} \;,\; 2 \cdot \pi.$$

Funkcija sinus imala je maksimum u točki

$$\frac{\pi}{2}.$$

Sada argument 2x zadane funkcije izjednačimo s

$$\frac{\pi}{2}$$

pa je

$$2 \cdot x = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; 2 \cdot x = \frac{\pi}{2} \;/:2 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4}.$$

Dakle, funkcija f(x) = 2 · sin 2x ima maksimum u

$$\frac{\pi}{4} \quad , \quad \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5 \cdot \pi}{4}$$

koji iznosi + 2.

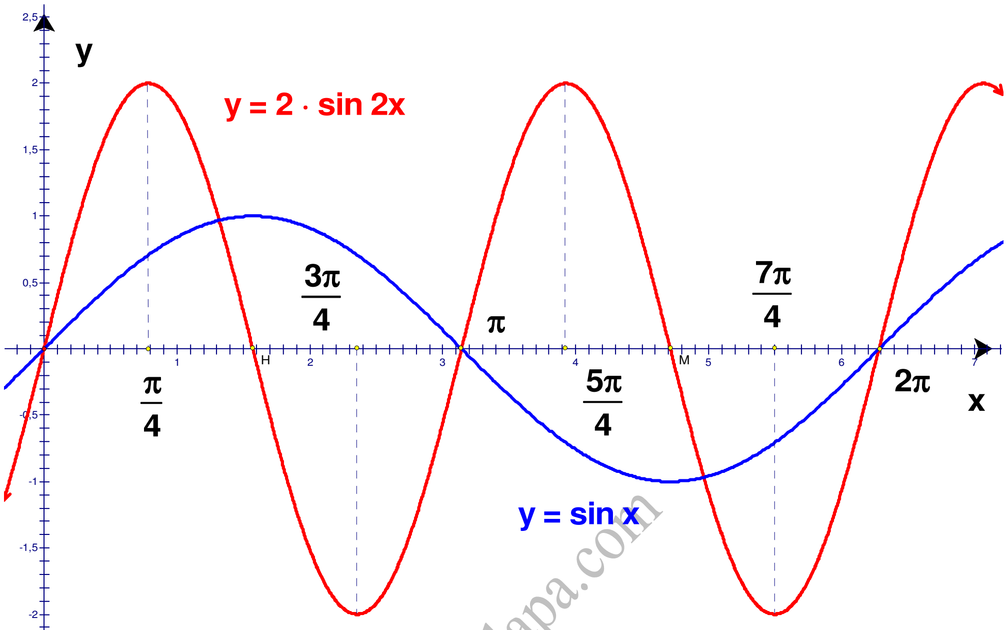
Analogno je za minimum:

$$2 \cdot x = \frac{3 \cdot \pi}{2} \Rightarrow 2 \cdot x = \frac{3 \cdot \pi}{2} \; /:2 \Rightarrow x = \frac{3 \cdot \pi}{4}.$$

Dakle, funkcija f(x) = 2 · sin 2x ima minimum u

$$\frac{3 \cdot \pi}{4} \quad , \quad \frac{3 \cdot \pi}{4} + \pi = \frac{7 \cdot \pi}{4}$$

koji iznosi – 2.



Tablični prikaz (tok funkcije)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3 \cdot \pi}{4}$	π	$\frac{5 \cdot \pi}{4}$	$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	$\frac{7 \cdot \pi}{4}$	$2 \cdot \pi$
y	0	2	0	– 2	0	2	0	– 2	0
	↗	↘	↘	↗	↗	↘	↘	↗	

Vježba 107

Ispitaj tok i nacrtaj graf funkcije $y = 3 \cdot \sin 2x$, $x \in [0, 2\pi]$.

Rezultat:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3 \cdot \pi}{4}$	π	$\frac{5 \cdot \pi}{4}$	$\frac{3 \cdot \pi}{2}$	$\frac{7 \cdot \pi}{4}$	$2 \cdot \pi$
y	0	3	0	– 3	0	3	0	– 3	0
	↗	↘	↘	↗	↗	↘	↘	↗	

Zadatak 108 (Katarina Patuljčica Kate ☺, studentica)

Za realne funkcije $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $g(x) = |x|$ odredi kompozicije $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$.

Kompozicije prikaži grafički.

Rješenje 108

Ponovimo!

Za realne funkcije f i g definira se kompozicija na sljedeći način:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

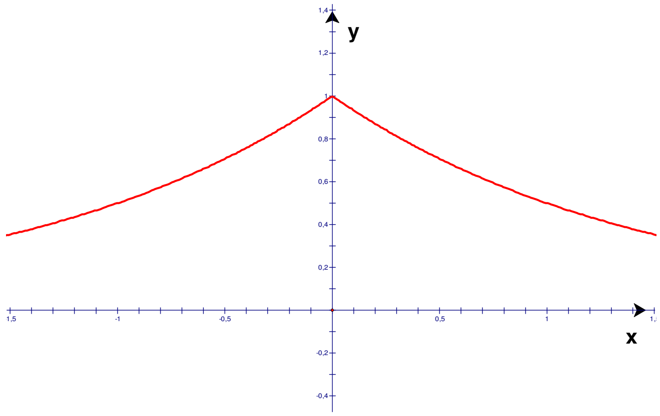
Kompozicija funkcija f ○ g tada je jednaka:

1.inačica

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x)) = f(|x|) = f(|x|) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}.$$

2.inačica

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}.$$



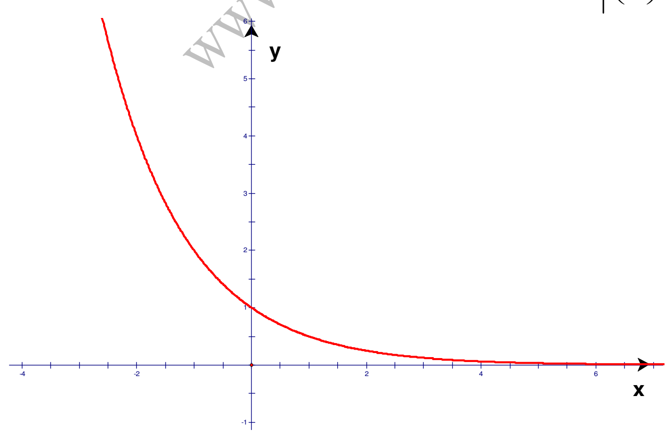
Kompozicija funkcija g ○ f tada je jednaka:

1.inačica

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x)) = g\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = g\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|.$$

2.inačica

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x)) = |f(x)| = |f(x)| = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|.$$



Vježba 108

Za realne funkcije $f(x) = 2^x$ i $g(x) = |x|$ odredi kompoziciju $(f \circ g)(x)$.

Rezultat: $2^{|x|}$.

Zadatak 109 (Ivana, gimnazija)

Približan broj bakterija u kulturi A jednak je $A(t) = 1000 \cdot 2^t$, a u kulturi B je $B(t) = 100 \cdot 2^{2t}$, gdje je t vrijeme mjereno u satima.

1. Koliko je bakterija na početku mjerenja bilo u kulturi A, a koliko u kulturi B?
2. Koliko je bakterija bilo u jednoj, a koliko u drugoj kulturi 3 sata nakon početka mjerenja?

Rješenje 109

Ponovimo!

$$a^0 = 1.$$

1.

$$\left.\begin{array}{l} t = 0\ h \\ A(t) = 1000 \cdot 2^t \end{array}\right\} \Rightarrow A(0) = 1000 \cdot 2^0 \Rightarrow A(0) = 1000 \cdot 1 \Rightarrow A(0) = 1000.$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0\ h \\ B(t) = 100 \cdot 2^{2 \cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow B(0) = 100 \cdot 2^{2 \cdot 0} \Rightarrow B(0) = 100 \cdot 2^0 \Rightarrow B(0) = 100 \cdot 1 \Rightarrow B(0) = 100.$$

Na početku mjerenja u kulturi A bilo je 1000, a u kulturi B 100 bakterija.

2.

$$\left.\begin{array}{l} t = 3\ h \\ A(t) = 1000 \cdot 2^t \end{array}\right\} \Rightarrow A(3) = 1000 \cdot 2^3 \Rightarrow A(3) = 1000 \cdot 8 \Rightarrow A(3) = 8000.$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 3\ h \\ B(t) = 100 \cdot 2^{2 \cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow B(3) = 100 \cdot 2^{2 \cdot 3} \Rightarrow B(3) = 100 \cdot 2^6 \Rightarrow B(3) = 100 \cdot 64 \Rightarrow B(0) = 6400.$$

Nakon 3 sata u kulturi A bilo je 8000, a u kulturi B 6400 bakterija.

Vježba 109

Približan broj bakterija u kulturi A jednak je $A(t) = 1000 \cdot 2^t$, a u kulturi B je $B(t) = 100 \cdot 2^{2t}$, gdje je t vrijeme mjereno u satima. Koliko je bakterija bilo u jednoj, a koliko u drugoj kulturi 2 sata nakon početka mjerenja?

Rezultat: Nakon 2 sata u kulturi A bilo je 4000, a u kulturi B 1600 bakterija.

Zadatak 110 (Mirza, elektrotehnička škola)

Nacrtati i ispitati funkciju $y = \left| \log_3 x \right|$.

Rješenje 110

Ponovimo!

$$\log_b b = 1 \quad , \quad \log_b 1 = 0 \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^1 = a.$$

Logaritamska funkcija s bazom b realna je funkcija oblika

$$f(x) = \log_b x,$$

gdje je $b > 0$ i $b \neq 1$. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Najprije provedemo diskusiju (tražimo domenu funkcije):

$$y = \log_3 x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -x, \ x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 7 | = 7.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 4 | = – (– 4) = 4.

Crtamo graf logaritamske funkcije $y = \log_3 x$:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2} \\ y = \log_3 x \end{array}\right\} \Rightarrow y = \log_3 3^{-2} \Rightarrow y = -2 \cdot \log_3 3 \Rightarrow y = -2 \cdot 1 \Rightarrow y = -2$$

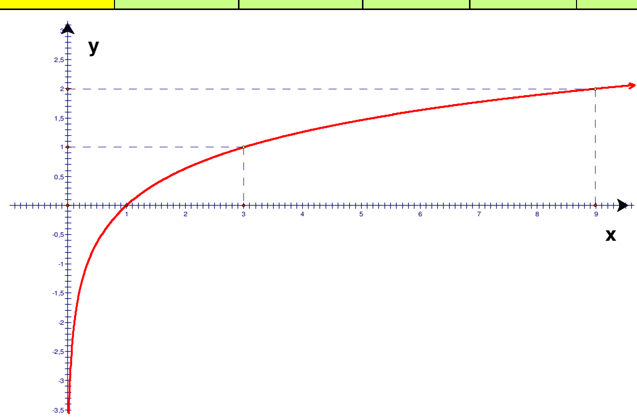
$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} = 3^{-1} \\ y = \log_3 x \end{array}\right\} \Rightarrow y = \log_3 3^{-1} \Rightarrow y = -1 \cdot \log_3 3 \Rightarrow y = -1 \cdot 1 \Rightarrow y = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \log_3 x \end{array}\right\} \Rightarrow y = \log_3 1 \Rightarrow y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \log_3 x \end{array}\right\} \Rightarrow y = \log_3 3 \Rightarrow y = 1$$

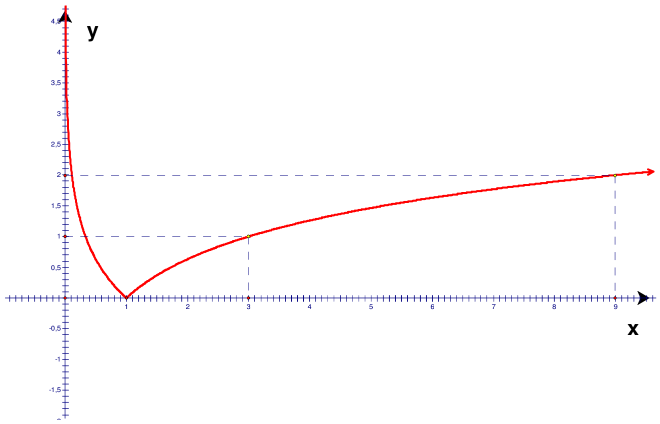
$$\left.\begin{array}{l} x = 9 = 3^2 \\ y = \log_3 x \end{array}\right\} \Rightarrow y = \log_3 3^2 \Rightarrow y = 2 \cdot \log_3 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 \Rightarrow y = 2.$$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_3 x$	– 2	– 1	0	1	2



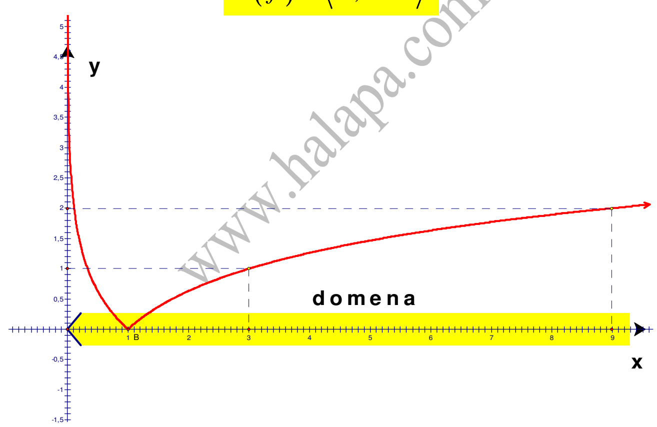
Crtamo graf logaritamske funkcije $y = \left| \log_3 x \right|$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y = \log_3 x$	2	1	0	1	2



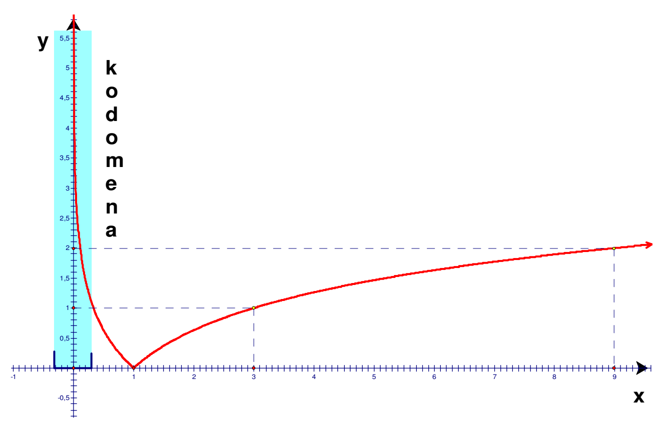
Domena zadane funkcije:

$$D(f) = \langle 0, +\infty \rangle.$$



Kodomena zadane funkcije.

$$R(f) = [\, 0, +\infty \rangle.$$



Sa slika vidi se:

- na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ funkcija je padajuća,
- x = 1 je nultočka funkcije,
- na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ funkcija je rastuća,
- pravac x = 0 (y – os) je asimptota funkcije.

Vježba 110

Nacrtati i ispitati funkciju $y = \left| \log_2 x \right|$.

Rezultat: Analogno.

Zadatak 111 (Mirza, elektrotehnička škola)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $y = \sqrt{\log \frac{2 \cdot x + 3}{x}}$.

Rješenje 111

Ponovimo!

$$\log 10 = 1 \quad , \quad \log 1 = 0 \quad , \quad \log f(x) \ge \log g(x) \;\Rightarrow\; f(x) \ge g(x).$$

$$\frac{a}{b} > 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}\right\} \text{ i } \left.\begin{matrix} a < 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \quad , \quad \frac{a}{b} \ge 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a \ge 0 \\ b > 0 \end{matrix}\right\} \text{ i } \left.\begin{matrix} a \le 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\}.$$

Logaritamska funkcija s bazom 10 realna je funkcija oblika

$$f(x) = \log x.$$

Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$D(f) = \langle 0, +\infty \rangle.$$

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f) = [\, 0, +\infty \rangle.$$

Najprije provedemo diskusiju za funkciju $y = \log \frac{2 \cdot x + 3}{x}$, tj. tražimo skup realnih brojeva za koje je ona definirana:

- $$\frac{2 \cdot x + 3}{x} > 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} 2 \cdot x + 3 > 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} 2 \cdot x > -3 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} 2 \cdot x > -3 \; /:2 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x > -\frac{3}{2} \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{gledamo presjek ove} \\ \text{dvije nejednadžbe,} \\ \text{zajednički skup} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; x > 0 \;\Rightarrow\; x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

- $$\frac{2 \cdot x + 3}{x} > 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} 2 \cdot x + 3 < 0 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} 2 \cdot x < -3 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} 2 \cdot x < -3 \; /:2 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x < -\frac{3}{2} \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{gledamo presjek ove} \\ \text{dvije nejednadžbe,} \\ \text{zajednički skup} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; x < -\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle.$$

Dakle, funkcija $y = \log \frac{2 \cdot x + 3}{x}$ definirana je na skupu

$$\left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle 0, +\infty \right\rangle.$$

Sada tražimo područje definicije (domenu) funkcije $y=\sqrt{\log\frac{2\cdot x+3}{x}}$.

$$y=\sqrt{\log\frac{2\cdot x+3}{x}} \Rightarrow \log\frac{2\cdot x+3}{x}\geq 0 \Rightarrow \log\frac{2\cdot x+3}{x}\geq \log 1 \Rightarrow \frac{2\cdot x+3}{x}\geq 1 \Rightarrow \frac{2\cdot x+3}{x}-1\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot x+3-x}{x}\geq 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x}\geq 0.$$

- $\frac{x+3}{x}\geq 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3\geq 0 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\geq -3 \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{gledamo presjek ove} \\ \text{dvije nejednadžbe,} \\ \text{zajednički skup} \end{matrix}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow x>0 \Rightarrow x\in\left\langle 0, +\infty \right\rangle.$$

- $\frac{x+3}{x}\geq 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3\leq 0 \\ x<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\leq -3 \\ x<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{gledamo presjek ove} \\ \text{dvije nejednadžbe,} \\ \text{zajednički skup} \end{matrix}\right] \Rightarrow$

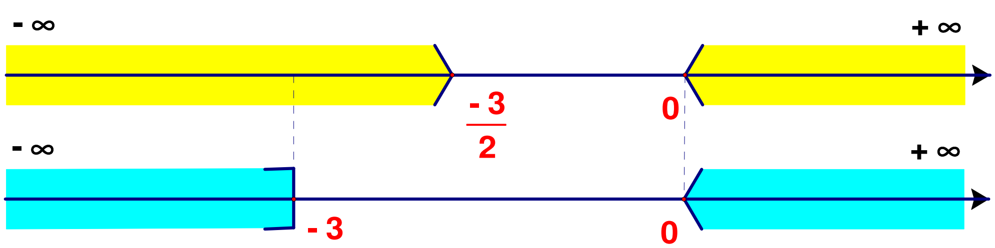
$$\Rightarrow x\leq -3 \Rightarrow x\in\left\langle -\infty, -3 \right].$$

Dakle, funkcija $y=\sqrt{\log\frac{2\cdot x+3}{x}}$ definirana je na skupu

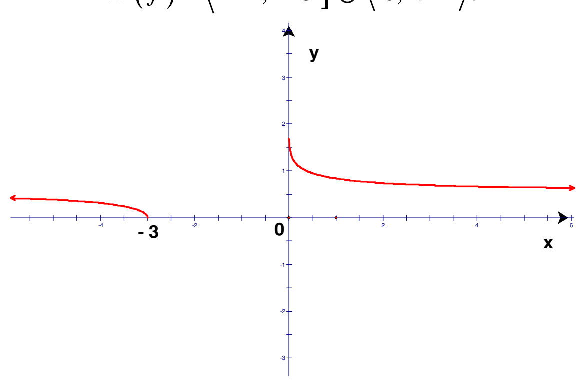
$$\left\langle -\infty, -3 \right] \cup \left\langle 0, +\infty \right\rangle.$$

Područje definicije funkcije $y=\sqrt{\log\frac{2\cdot x+3}{x}}$ je presjek skupova

$$\left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \left\langle 0, +\infty \right\rangle \quad \text{i} \quad \left\langle -\infty, -3 \right] \cup \left\langle 0, +\infty \right\rangle.$$



$$D(f)=\left\langle -\infty, -3 \right] \cup \left\langle 0, +\infty \right\rangle.$$



Vježba 111

Odredi područje definicije funkcije (domenu) $y=\sqrt{\log x}$.

Rezultat: $D(f)=[1,\ +\infty\rangle.$

Zadatak 112 (Doris, srednja škola)

Za linearnu funkciju $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-1$ jedna je od četiriju tvrdnji istinita:

A) ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije poraste za $\frac{1}{3}$.
B) ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije poraste za 3.
C) ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije bude 3 puta veća.
D) ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije padne za $\frac{1}{3}$.

Rješenje 112

Ponovimo!

$$a-b=c\ \Rightarrow\ a=b+c\quad,\quad a-b>0\ \Rightarrow\ a>b.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju glasi:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Ako varijablu x povećamo za 1 vrijednost funkcije iznosi:

$$f(x+1)=\frac{1}{3}\cdot(x+1)-1\ \Rightarrow\ f(x+1)=\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{3}-1\ \Rightarrow\ f(x+1)=\frac{1}{3}\cdot x-1+\frac{1}{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x+1)=\left(\frac{1}{3}\cdot x-1\right)+\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \left[\ f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-1\ \right]\ \Rightarrow\ f(x+1)=f(x)+\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ f(x+1)=f(x)+\frac{1}{3}.$$

Dakle, ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije poraste za $\frac{1}{3}$.

Odgovor je pod A.

2.inačica

Računamo razliku vrijednosti linearne funkcije za varijable x + 1 i x.

$$\left.\begin{array}{l} f(x+1)=\frac{1}{3}\cdot(x+1)-1 \\ f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f(x+1)-f(x)=\frac{1}{3}\cdot(x+1)-1-\left(\frac{1}{3}\cdot x-1\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x+1)-f(x)=\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{3}-1-\frac{1}{3}\cdot x+1\ \Rightarrow\ f(x+1)-f(x)=\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{3}-1-\frac{1}{3}\cdot x+1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x+1)-f(x)=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ f(x+1)=f(x)+\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ f(x+1)=f(x)+\frac{1}{3}.$$

Dakle, ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije poraste za $\frac{1}{3}$.

Odgovor je pod A.

3.inačica

Nađemo razliku vrijednosti linearne funkcije za dva realna broja koji se razlikuju za 1, na primjer,

$$f(4)-f(3)=\frac{1}{3}\cdot 4-1-\left(\frac{1}{3}\cdot 3-1\right) \Rightarrow f(4)-f(3)=\frac{4}{3}-1-\left(\frac{1}{3}\cdot 3-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(4)-f(3)=\frac{4}{3}-1-(1-1) \Rightarrow f(4)-f(3)=\frac{4}{3}-1-0 \Rightarrow f(4)-f(3)=\frac{4}{3}-\frac{1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(4)-f(3)=\frac{4-3}{3} \Rightarrow f(4)-f(3)=\frac{1}{3}.$$

Dakle, ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije poraste za $\frac{1}{3}$.

Odgovor je pod A.

Vježba 112

Za linearnu funkciju $f(x)=3\cdot x-1$ jedna je od četiriju tvrdnji istinita:

A) ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije poraste za $\frac{1}{3}$.
B) ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije poraste za 3.
C) ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije bude 3 puta veća.
D) ako se varijabla x poveća za 1, vrijednost funkcije padne za $\frac{1}{3}$.

Rezultat: B.

Zadatak 113 (Helena, gimnazija)

Ako je $f(x)+3\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$, $x\neq 0$, izračunaj $f(2)$.

Rješenje 113

Ponovimo!

$$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}.$$

Napišemo jednadžbe za:

- $x=2$

$$f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=2^2 \Rightarrow f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=4,$$

- $x=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot f\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot f(2)=\frac{1}{4}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se f(2).

$$\left.\begin{array}{l} f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=4 \\ 3\cdot f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=4 \\ 3\cdot f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \quad /\cdot(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=4 \\ -9\cdot f(2)-3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -8\cdot f(2)=4-\frac{3}{4} \Rightarrow -8\cdot f(2)=\frac{16-3}{4} \Rightarrow -8\cdot f(2)=\frac{13}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8\cdot f(2)=\frac{13}{4} \;/\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) \Rightarrow f(2)=-\frac{13}{32}.$$

Vježba 113

Ako je $f(x)+3\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x,\ x\neq 0,$ izračunaj $f(2)$.

Rezultat: $-\frac{1}{16}.$

Zadatak 114 (Rade, gimnazija)

Ako je $f\left(\frac{2005\cdot x-1}{2006}\right)=2005\cdot x,$ nađi $f(x)$.

Rješenje 114

Ponovimo!

Uvodimo zamjenu (supstituciju)

$$t=\frac{2005\cdot x-1}{2006}.$$

Stara varijabla x iznosi:

$$t=\frac{2005\cdot x-1}{2006} \Rightarrow t=\frac{2005\cdot x-1}{2006} \;/\cdot 2006 \Rightarrow 2006\cdot t=2005\cdot x-1 \Rightarrow 2005\cdot x-1=2006\cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2005\cdot x=2006\cdot t+1 \Rightarrow 2005\cdot x=2006\cdot t+1 \;/:2005 \Rightarrow x=\frac{2006\cdot t+1}{2005}.$$

Sada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{2005\cdot x-1}{2006}\right)=2005\cdot x \\ t=\frac{2005\cdot x-1}{2006}\ ,\ x=\frac{2006\cdot t+1}{2005} \end{array}\right\} \Rightarrow f(t)=2005\cdot\frac{2006\cdot t+1}{2005} \Rightarrow f(t)=2005\cdot\frac{2006\cdot t+1}{2005} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=2006\cdot t+1 \Rightarrow f(t)=1+2006\cdot t \Rightarrow f(x)=1+2006\cdot x.$$

Vježba 114

Ako je $f\left(\frac{2010\cdot x-1}{2011}\right)=2010\cdot x,$ nađi $f(x)$.

Rezultat: $f(x)=1+2011\cdot x.$

Zadatak 115 (Maturanti, HTT)

Ovisnost temperature T u ledenici i protekloga vremena t nakon uključivanja dana je formulom

$$T=-1.2\cdot t+22.$$

Temperatura T izražena je u °C, a vrijeme t u minutama.

a) Kolika je temperatura u ledenici nakon 20 minuta?

b) Ledenicu treba staviti na tihi rad nakon što temperatura u njoj padne na – 12 °C. Koliko vremena nakon uključivanja treba ledenicu staviti na tihi rad? Vrijeme izrazite u minutama i sekundama.
c) Koliko je dugo nakon uključivanja temperatura u ledenici bila iznad 0 °C? Vrijeme izrazite u minutama i sekundama.

Rješenje 115

a)

$$\left.\begin{array}{l} T=-1.2\cdot t+22 \\ t=20 \text{ min} \end{array}\right\} \Rightarrow T=-1.2\cdot 20+22 \Rightarrow T=-2\ {}^{0}C.$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} T=-1.2\cdot t+22 \\ T=-12\ {}^{0}C \end{array}\right\} \Rightarrow -12=-1.2\cdot t+22 \Rightarrow 1.2\cdot t=22+12 \Rightarrow 1.2\cdot t=34 \Rightarrow 1.2\cdot t=34\ /:1.2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=28.33333333 \text{ min}=28 \text{ min}+0.33333333 \text{ min}=28 \text{ min}+\left[0.33333333\cdot 60\right]=28 \text{ min } 20\ s.$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} T=-1.2\cdot t+22 \\ T>0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1.2\cdot t+22>0 \Rightarrow -1.2\cdot t>-22 \Rightarrow -1.2\cdot t>-22\ /:(-1.2) \Rightarrow t<\frac{22}{1.2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t<18.33333333 \text{ min} \Rightarrow t<18 \text{ min}+0.33333333 \text{ min} \Rightarrow t<18 \text{ min}+\left[0.33333333\cdot 60\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t<18 \text{ min } 20\ s.$$

Vježba 115

Ovisnost temperature T u ledenici i proteklog vremena t nakon uključivanja dana je formulom

$$T=-1.2\cdot t+22.$$

Temperatura T izražena je u °C, a vrijeme t u minutama. Kolika je temperatura u ledenici nakon 30 minuta?

Rezultat: – 14 °C.

Zadatak 116 (Biba, gimnazija)

Ako za afinu funkciju vrijedi $f(x)+f(x+1)=2\cdot x-1,$ za svaki realni broj x, odredite f.

Rješenje 116

Ponovimo!
Neka su a i b realni brojevi. Funkcija $f: R \to R$ dana pravilom f(x) = a · x + b naziva se afina funkcija.
Polinom stupnja n je funkcija $f: R \to R$ definirana s:

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ \dots\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su a_0, a_1, a_2, …, a_n realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve a_0, a_1, a_2, …, a_n nazivamo koeficijentima polinoma. Gornji zapis nazivamo kanonskim oblikom polinoma.
Jednakost polinoma
Dva su polinoma f i g jednaka ako za svaki $x \in R$ vrijedi f(x) = g(x). Polinomi f i g jednaki su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki (ili ako im se koeficijenti u kanonskom prikazu podudaraju).
Budući da za afinu funkciju f(x) = a · x + b vrijedi

$$f(x)+f(x+1)=2\cdot x-1,$$

dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x+b \\ f(x+1)=a\cdot(x+1)+b \\ f(x)+f(x+1)=2\cdot x-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot x+b+a\cdot(x+1)+b=2\cdot x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot x+b+a\cdot x+a+b=2\cdot x-1 \Rightarrow 2\cdot a\cdot x+a+2\cdot b=2\cdot x-1.$$

Uoči da su na obje strane jednakosti polinomi istog stupnja (prvog stupnja). Uporabom poučka o jednakosti polinoma izračunamo koeficijente a i b.

$$2\cdot a\cdot x+a+2\cdot b=2\cdot x-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a=2 \\ a+2\cdot b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a=2 \;/:2 \\ a+2\cdot b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ a+2\cdot b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2\cdot b=-1 \Rightarrow 2\cdot b=-1-1 \Rightarrow 2\cdot b=-2 \Rightarrow 2\cdot b=-2 \;/:2 \Rightarrow b=-1.$$

Afina funkcija glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=-1 \\ f(x)=a\cdot x+b \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=1\cdot x-1 \Rightarrow f(x)=x-1.$$

Vježba 116

Ako za afinu funkciju vrijedi $f(x+1)+1=2\cdot x-f(x)$, za svaki realni broj x, odredite f.

Rezultat: $f(x)=x-1.$

Zadatak 117 (Davor, gimnazija)

Ako je f afina funkcija f(x) = a · x + b te ako je

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ \ldots\ +f(8)+f(9)+f(10)=-20$$

i

$$f(1)-f(2)+f(3)-\ \ldots\ -f(8)+f(9)-f(10)=20,$$

koliko je f(x)?

Rješenje 117

Ponovimo!

$$1+2+3+\ \ldots\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Neka su a i b realni brojevi. Funkcija $f:R\to R$ dana pravilom f(x) = a · x + b naziva se afina funkcija.

Iz prvog uvjeta za afinu funkciju f(x) = a · x + b dobije se linearna jednadžba po varijablama a i b.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=a\cdot 1+b=a+b \\ f(2)=a\cdot 2+b=2\cdot a+b \\ f(3)=a\cdot 3+b=3\cdot a+b \\ \ldots \\ f(8)=a\cdot 8+b=8\cdot a+b \\ f(9)=a\cdot 9+b=9\cdot a+b \\ f(10)=a\cdot 10+b=10\cdot a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[f(1)+f(2)+f(3)+\ \ldots\ +f(8)+f(9)+f(10)=-20\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+2\cdot a+b+3\cdot a+b+\ \ldots\ +8\cdot a+b+9\cdot a+b+10\cdot a+b=-20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+2\cdot a+3\cdot a+\ \ldots\ +8\cdot a+9\cdot a+10\cdot a)+10\cdot b=-20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot(1+2+3+\ \dots\ +8+9+10)+10\cdot b=-20 \Rightarrow a\cdot\frac{10\cdot(10+1)}{2}+10\cdot b=-20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10\cdot b=-20 \Rightarrow 5\cdot 11\cdot a+10\cdot b=-20 \Rightarrow 55\cdot a+10\cdot b=-20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 55\cdot a+10\cdot b=-20\ /:5 \Rightarrow 11\cdot a+2\cdot b=-4.$$

Iz drugog uvjeta za afinu funkciju f(x) = a · x + b dobije se linearna jednadžba po varijabli a.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=a\cdot 1+b=a+b \\ f(2)=a\cdot 2+b=2\cdot a+b \\ f(3)=a\cdot 3+b=3\cdot a+b \\ \dots \\ f(8)=a\cdot 8+b=8\cdot a+b \\ f(9)=a\cdot 9+b=9\cdot a+b \\ f(10)=a\cdot 10+b=10\cdot a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[f(1)-f(2)+f(3)-\ \dots\ -f(8)+f(9)-f(10)=20\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)-(2\cdot a+b)+(3\cdot a+b)-\ \dots\ -(8\cdot a+b)+(9\cdot a+b)-(10\cdot a+b)=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b-2\cdot a-b+3\cdot a+b-\ \dots\ -8\cdot a-b+9\cdot a+b-10\cdot a-b=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b-2\cdot a-b+3\cdot a+b-\ \dots\ -8\cdot a-b+9\cdot a+b-10\cdot a-b=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-2\cdot a+3\cdot a-\ \dots\ -8\cdot a+9\cdot a-10\cdot a=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-2\cdot a)+(3\cdot a-4\cdot a)+(5\cdot a-6\cdot a)+(7\cdot a-8\cdot a)+(9\cdot a-10\cdot a)=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a-a-a-a-a=20 \Rightarrow -5\cdot a=20 \Rightarrow -5\cdot a=20\ /:(-5) \Rightarrow a=-4.$$

Računamo koeficijent b.

$$\left.\begin{array}{l} a=-4 \\ 11\cdot a+2\cdot b=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 11\cdot(-4)+2\cdot b=-4 \Rightarrow -44+2\cdot b=-4 \Rightarrow 2\cdot b=-4+44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot b=40 \Rightarrow 2\cdot b=40\ /:2 \Rightarrow b=20.$$

Afina funkcija glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=-4\ ,\ b=20 \\ f(x)=a\cdot x+b \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-4\cdot x+20.$$

Vježba 117

Ako je f afina funkcija f(x) = a · x + b te ako je

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ \dots\ +f(8)+f(9)+f(10)=-20$$

i

$$f(1)-f(2)+f(3)-\ \dots\ -f(8)+f(9)-f(10)=20,$$

koliko je f(5)?

Rezultat: 0.

Zadatak 118 (Magdalena, gimnazija)

S a ∘ b = a – a · b + b zadana je algebarska operacija u skupu realnih brojeva. Ako je 3 ∘ (x ∘ 2) = 9, onda je

$A)\ x=7 \qquad B)\ x=3 \qquad C)\ x=5 \qquad D)\ x=1$

Rješenje 118

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Najprije obavimo algebarsku operaciju u zagradi.

$$x\circ 2=\begin{bmatrix} a\circ b=a-a\cdot b+b \\ a=x \\ b=2 \end{bmatrix}=x-x\cdot 2+2=x-2\cdot x+2=-x+2=2-x.$$

Sada računamo x.

$$3\circ(x\circ 2)=9 \Rightarrow 3\circ(2-x)=9 \Rightarrow \begin{bmatrix} a\circ b=a-a\cdot b+b \\ a=3 \\ b=2-x \end{bmatrix} \Rightarrow 3-3\cdot(2-x)+2-x=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-6+3\cdot x+2-x=9 \Rightarrow 3\cdot x-x=9-3+6-2 \Rightarrow 2\cdot x=10 \Rightarrow 2\cdot x=10 \;/:2 \Rightarrow x=5.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 118

S a ∘ b = a – a · b + b zadana je algebarska operacija u skupu realnih brojeva. Ako je (x ∘ 2) ∘ 3 = 9, onda je

$A)\ x=7 \qquad B)\ x=3 \qquad C)\ x=5 \qquad D)\ x=1$

Rezultat: C.

Zadatak 119 (Jasna, gimnazija)

Ako je $f\left(2^{x+1}\right)=4^{x-1}$, koliko je $f(4)$?

Rješenje 119

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m}=\left(a^{m}\right)^{n}=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad (a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}.$$

Možemo zapisati

$$f\left(2^{x+1}\right)=4^{x-1} \Rightarrow f\left(2^{x+1}\right)=\left(2^{2}\right)^{x-1} \Rightarrow f\left(2^{x+1}\right)=\left(2^{x-1}\right)^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(2^{x+1}\right)=\left(2^{x+1}\cdot 2^{-2}\right)^{2} \Rightarrow f\left(2^{x+1}\right)=\left(2^{x+1}\right)^{2}\cdot\left(2^{-2}\right)^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(2^{x+1}\right)=\left(2^{x+1}\right)^{2}\cdot 2^{-4} \Rightarrow f\left(2^{x+1}\right)=\left(2^{x+1}\right)^{2}\cdot\frac{1}{2^{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(2^{x+1}\right)=\left(2^{x+1}\right)^{2}\cdot\frac{1}{16} \Rightarrow f\left(2^{x+1}\right)=\frac{1}{16}\cdot\left(2^{x+1}\right)^{2}.$$

Zaključujemo da je

$$f(x)=\frac{1}{16}\cdot x^{2}.$$

Tada je

$$f(4)=\frac{1}{16}\cdot 4^{2} \Rightarrow f(4)=\frac{1}{16}\cdot 16 \Rightarrow f(4)=\frac{1}{16}\cdot\frac{16}{1} \Rightarrow f(4)=\frac{1}{16}\cdot\frac{16}{1} \Rightarrow f(4)=1.$$

Vježba 119

Ako je $f\left(2^{x+1}\right)=4^{x-1}$, koliko je $f(8)$?

Rezultat: 4.

Zadatak 120 (Ivan, gimnazija)

Ako je $f(x)=\frac{2\cdot x-1}{x+1}$, $x\neq -1$, te $f(m)=n$, onda je:

$$A)\ m=\frac{n-1}{n+2}\qquad B)\ m=\frac{n+2}{1-n}\qquad C)\ m=\frac{n+1}{2-n}\qquad D)\ m=\frac{n}{2-n}$$

Rješenje 120

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Računamo f(m).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{2\cdot x-1}{x+1} \\ x=m \end{array}\right\}\Rightarrow f(m)=\frac{2\cdot m-1}{m+1}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(m)=\frac{2\cdot m-1}{m+1} \\ f(m)=n \end{array}\right\}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right]\Rightarrow \frac{2\cdot m-1}{m+1}=n\Rightarrow \frac{2\cdot m-1}{m+1}=n\ /\cdot(m+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot m-1=n\cdot(m+1)\Rightarrow 2\cdot m-1=n\cdot m+n\Rightarrow 2\cdot m-n\cdot m=n+1\Rightarrow m\cdot(2-n)=n+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot(2-n)=n+1\ /\cdot\frac{1}{2-n}\Rightarrow m=\frac{n+1}{2-n}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 120

Ako je $f(x)=\frac{2\cdot x}{x+1}$, $x\neq -1$, te $f(m)=n$, onda je:

$$A)\ m=\frac{n-1}{n+2}\qquad B)\ m=\frac{n+2}{1-n}\qquad C)\ m=\frac{n+1}{2-n}\qquad D)\ m=\frac{n}{2-n}$$

Rezultat: D.