Zadatak 061 (Sanja, informatika)

Pronađite asimptote grafa funkcije $y=\sqrt[3]{1-x^3}.$

Rješenje 061

Za pravac x = a kažemo da je vertikalna asimptota grafa funkcije y = f(x) ako je barem jedan od limesa

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \text{ ili } \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ jednak } +\infty \text{ ili } -\infty.$$

Graf zadane funkcije $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ nema vertikalne asimptote jer ne postoji takav realan broj a za koji bi jedan od limesa

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \text{ ili } \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ bio jednak } +\infty \text{ ili } -\infty.$$

Za graf zadane funkcije jedino vrijedi:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1-x^3} = -\infty \text{ i } \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{1-x^3} = +\infty.$$

Za pravac y = k · x + l kažemo da je kosa asimptota grafa funkcije y = f(x) kad x → ∞, ako vrijedi

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x)-(k \cdot x+l)\right]=0.$$

Koeficijente pravca određujemo kao

$$k=\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad , \quad l=\lim_{x \to \infty} \left[f(x)-k \cdot x\right].$$

Za graf funkcije $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ računamo:

$$k=\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}}=\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}}=\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=\sqrt[3]{0-1}=\sqrt[3]{-1}=-1.$$

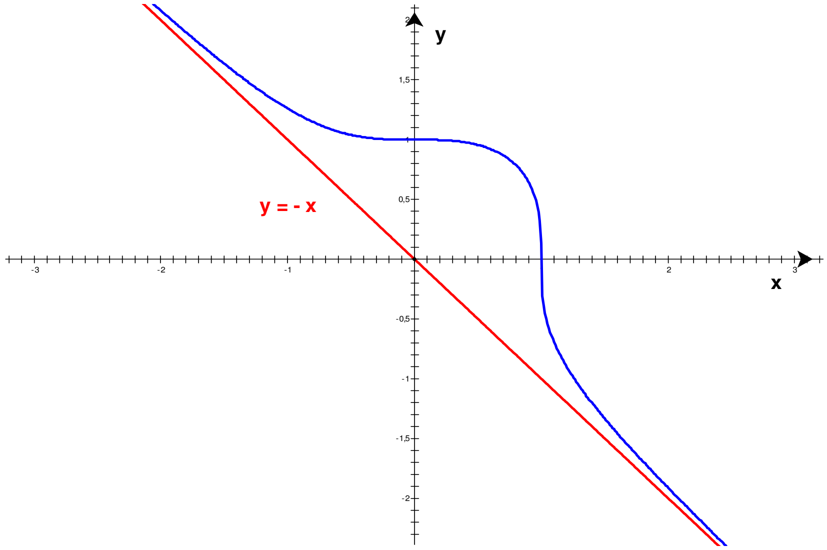
$$l=\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{1-x^3}-(-1) \cdot x\right]=\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{1-x^3}+x\right]=\left[\begin{array}{l} \text{zbroj kubova} \\ a^3+b^3=(a+b) \cdot \left(a^2-a \cdot b+b^2\right) \\ a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-a \cdot b+b^2} \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{1-x^3}+x\right] \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2-x \cdot \sqrt[3]{1-x^3}+x^2}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2-x \cdot \sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^3+x^3}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2-x \cdot \sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=$$

$$=\lim_{x \to \infty} \frac{1-x^3+x^3}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2-x \cdot \sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2-x \cdot \sqrt[3]{1-x^3}+x^2}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Asimptota ima jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} k=-1 \ , \ l=0 \\ y=k \cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow y=-x.$$



Vježba 061

Pronađite asimptote grafa funkcije $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$.

Rezultat: y = x.

Zadatak 062 (Astra, gimnazija)

Nađite m za koji je $f(x) = \log\left(x^2 - m \cdot x + 1\right)$ definiran za svaki x iz R.

Rješenje 062

Budući da je domena logaritamske funkcije interval $\langle 0, +\infty \rangle$, slijedi:

$$f(x) = \log\left(x^2 - m \cdot x + 1\right) \Rightarrow x^2 - m \cdot x + 1 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet da kvadratna funkcija} \\ \text{poprima samo pozitivne vrijednosti:} \\ a > 0 \;,\; D < 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -m \;,\; c = 1 \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow m^2 < 4 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |m| < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m \in \langle -2, 2 \rangle.$$

Vježba 062

Nađite m za koji je $f(x) = \log\left(2 \cdot x^2 - m \cdot x + 2\right)$ definiran za svaki x iz R.

Rezultat: $m \in \langle -4, 4 \rangle$.

Zadatak 063 (Astra, gimnazija)

U koliko se točaka sijeku krivulje: $y = 2^{\frac{|x|}{x}}$ i $y = x + \frac{3}{2}$?

Rješenje 063

Pretpostavimo da je x pozitivan broj:

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = 2^{\frac{x}{x}} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2 \\ y = x + \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = x + \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

Pretpostavimo da je x negativan broj:

$$x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow y=2^{\frac{-x}{x}} \Rightarrow y=2^{-1} \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=\frac{1}{2} \\ y=x+\frac{3}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}=x+\frac{3}{2} \Rightarrow x=-1 \Rightarrow B\left(-1, \frac{1}{2}\right).$$

Krivulje se sijeku u dvije točke.

Vježba 063

U koliko se točaka sijeku krivulje: $y=2^{\frac{|x|}{x}}$ i $y=x$?

Rezultat: Krivulje se sijeku u dvije točke.

Zadatak 064 (Maturant, gimnazija)

Neka je $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, a $g(x)=|x|$, $x \in R$. Kolika je maksimalna vrijednost koju poprima funkcija f ∘ g?

Rješenje 064

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(|x|)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}.$$

Za x = 0 funkcija poprima maksimalnu vrijednost koja iznosi

$$(f \circ g)(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|0|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1.$$

Vježba 064

Neka je $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, a $g(x)=|2 \cdot x|$, $x \in R$. Kolika je maksimalna vrijednost koju poprima

Rezultat: 1.

Zadatak 065 (Tiny, gimnazija)

Ako je $f(x)=\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x}}$, nađite $f^{-1}(4)+f^{-1}(16)$.

Rješenje 065

Očito je uvijek f(x) ≥ 0 jer je definirana za x ≥ 0.

$$f(x)=\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)=\sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{x} \Rightarrow f(x)=\sqrt[6]{x^3 \cdot x} \Rightarrow f(x)=\sqrt[6]{x^4} \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2}.$$

Inverzna funkcija glasi:

$$y=\sqrt[3]{x^2} \;/^3 \Rightarrow x^2=y^3 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow x=\sqrt{y^3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x^3}.$$

Računamo zadani izraz:

$$f^{-1}(4)+f^{-1}(16)=\sqrt{4^3}+\sqrt{16^3}=\sqrt{\left(2^2\right)^3}+\sqrt{\left(2^4\right)^3}=\sqrt{2^6}+\sqrt{2^{12}}=2^3+2^6=8+64=72.$$

Vježba 065

Ako je $f(x)=\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x}}$, nađite $f^{-1}(16)-f^{-1}(4)$.

Rezultat: 56.

Zadatak 066 (Carmen, ekonomska škola)

Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x)=2 \cdot \log_2(2 \cdot x)$.

Rješenje 066

Ponovimo!

$$b^{\log_b a}=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

1.inačica

$$y=2\cdot\log_2(2\cdot x) \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ x\leftrightarrow y\end{bmatrix} \Rightarrow x=2\cdot\log_2(2\cdot y) \Rightarrow 2\cdot\log_2(2\cdot y)=x \ /:2 \Rightarrow \log_2(2\cdot y)=\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\log_2(2\cdot y)}=2^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 2\cdot y=2^{\frac{x}{2}} \ /:2 \Rightarrow y=2^{\frac{x}{2}}:2 \Rightarrow y=2^{\frac{x}{2}-1} \Rightarrow y=2^{\frac{x-2}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=2^{\frac{x-2}{2}}.$$

2.inačica

$$f(x)=2\cdot\log_2(2\cdot x) \Rightarrow 2\cdot\log_2(2\cdot x)=f(x) \ /:2 \Rightarrow \log_2(2\cdot x)=\frac{f(x)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\log_2(2\cdot x)}=2^{\frac{f(x)}{2}} \Rightarrow 2\cdot x=2^{\frac{f(x)}{2}} \ /:2 \Rightarrow x=2^{\frac{f(x)}{2}}:2 \Rightarrow x=2^{\frac{f(x)}{2}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2^{\frac{f(x)-2}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x)=2^{\frac{x-2}{2}}.$$

Vježba 066

Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x)=\log_2(2\cdot x)$.

Rezultat: $f^{-1}(x)=2^{x-1}.$

Zadatak 067 (Carmen, ekonomska škola)

Ako je $f\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$, nađite $f(x)$.

Rješenje 067

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Najprije uvedemo supstituciju (zamjenu):

$$t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \ /^2 \Rightarrow t^2=\left(\sqrt{x}\right)^2+2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \Rightarrow t^2=x+2+\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{x}=t^2-2.$$

Sada je:

$$f\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(t)=2\cdot\left(t^2-2\right) \Rightarrow f(x)=2\cdot\left(x^2-2\right).$$

Vježba 067

Ako je $f\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=n\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$, nađite $f(x)$.

Rezultat: $f(x)=n\cdot\left(x^2-2\right).$

Zadatak 068 (Alen, tehnička škola)

Ako je $f(x)=\frac{2\cdot x+1}{x-2}$, nađite $f(f(x))$.

Rješenje 068

1.inačica

$$f(f(x))=f(f(x))=\frac{2\cdot f(x)+1}{f(x)-2}=\frac{2\cdot\frac{2\cdot x+1}{x-2}+1}{\frac{2\cdot x+1}{x-2}-2}=\frac{\frac{4\cdot x+2}{x-2}+1}{\frac{2\cdot x+1}{x-2}-2}=\frac{\frac{4\cdot x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2\cdot x+1-2\cdot(x-2)}{x-2}}=$$

$$=\frac{\frac{4\cdot x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2\cdot x+1-2\cdot x+4}{x-2}}=\frac{\frac{5\cdot x}{x-2}}{\frac{5}{x-2}}=\frac{5\cdot x}{5}=x.$$

2.inačica

$$f(f(x))=f(f(x))=f\left(\frac{2\cdot x+1}{x-2}\right)=\frac{2\cdot\frac{2\cdot x+1}{x-2}+1}{\frac{2\cdot x+1}{x-2}-2}=\frac{\frac{4\cdot x+2}{x-2}+1}{\frac{2\cdot x+1}{x-2}-2}=\frac{\frac{4\cdot x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2\cdot x+1-2\cdot(x-2)}{x-2}}=$$

$$=\frac{\frac{4\cdot x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2\cdot x+1-2\cdot x+4}{x-2}}=\frac{\frac{5\cdot x}{x-2}}{\frac{5}{x-2}}=\frac{5\cdot x}{5}=x.$$

Vježba 068

Ako je $f(x)=\frac{1}{x}$, nađite $f(f(x))$.

Rezultat: x.

Zadatak 069 (Silvija – sisi_18, studentica)

Nacrtajte graf funkcije $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

Rješenje 069

Ponovimo!

Determinanta trećeg reda ima oblik:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Specijalno se za računanje determinante trećeg reda rabi Sarrusovo pravilo:

- prva dva stupca prepišu se iza trećeg stupca

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- množe se po tri broja koja se nalaze na istovrsnim dijagonalama, ali pri tome padajuće dijagonale nose pozitivan predznak, a rastuće negativan predznak

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix}+ & + & +\end{matrix} \\
\left|\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}\right. \\
\begin{matrix}- & - & -\end{matrix}
\end{array},$$

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix}+ & + & +\end{matrix} \\
\left|\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}\right. \\
\begin{matrix}- & - & -\end{matrix}
\end{array} =$$

$$=\left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right)-\left(a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}\right).$$

Budući da je funkcija zadana pomoću determinante trećeg reda, najprije izračunamo tu determinantu:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c}
\begin{matrix}+ & + & +\end{matrix} \\
\left|\begin{array}{ccc|cc}
x & 1 & 1 & x & 1 \\
1 & x & 1 & 1 & x \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2
\end{array}\right. \\
\begin{matrix}- & - & -\end{matrix}
\end{array} =$$

$$=(x\cdot x\cdot 1+1\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot 2)-(1\cdot x\cdot 1+2\cdot 1\cdot x+1\cdot 1\cdot 1)=\left(x^2+1+2\right)-(x+2\cdot x+1)=$$

$$=x^2+1+2-x-2\cdot x-1=x^2+1+2-x-2\cdot x-1=x^2-3\cdot x+2.$$

Sada moramo nacrtati graf funkcije i opisati njezin tijek: f(x) = $x^2 - 3 \cdot x + 2$.

Ponovimo!

Graf kvadratne funkcije f(x) = $ax^2 + bx + c$ je parabola. Ovisno o mogućem predznaku vodećeg koeficijenta a parabola može biti okrenuta otvorom prema gore ili dolje.

Ako je a > 0, parabola je okrenuta otvorom prema gore.
Ako je a < 0, parabola je okrenuta otvorom prema dolje.

I.

U zadatku je a = 1 > 0 pa je parabola otvorom okrenuta prema gore.

II.

Nultočke kvadratne funkcije dobijemo tako da riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

U zadanom slučaju računamo:

$$x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=2 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2\end{array}\right\}.$$

Nultočke su: $N_1(1, 0)$, $N_2(2, 0)$.

III.

Tjeme parabole je točka $T(x_0, y_0)$, pri čemu je:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}, \qquad y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Za funkciju $f(x) = x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$ je:

$$a = 1, b = -3, c = 2$$

pa je

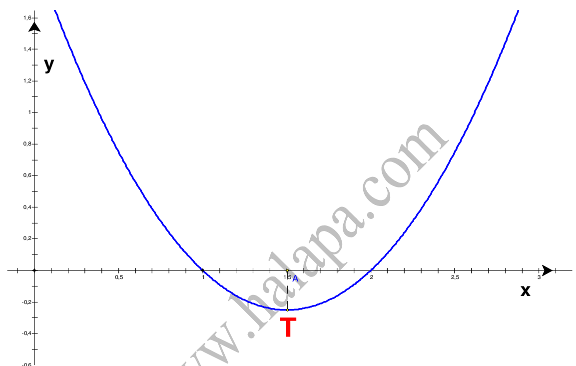
$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-3}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2},$$

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 2 - (-3)^2}{4 \cdot 1} = \frac{8-9}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Tjeme je: $T\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

IV.

Graf parabole:



V.

Ispisujemo tijek funkcije:

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		**2**		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\downarrow$	**0**	$\downarrow$	$-\frac{1}{4}$	$\uparrow$	**0**	$\uparrow$	$+\infty$

Funkcija pada na intervalu $\left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right\rangle$. Funkcija raste na intervalu $\left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$.

Vježba 069

Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}$.

Rezultat: Dobije se isti rezultat.

Zadatak 070 (Jan, Luka, Zoran, maturanti gimnazije)

Neka je $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, a $g(x) = |x|$, $x \in R$. Nađite maksimalnu (najveću) vrijednost koju poprima funkcija $f \circ g$.

Rješenje 070

Ponovimo!

$$a^0 = 1 \ , \ a \neq 0.$$

Kompozicija funkcija iznosi:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x|) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$$

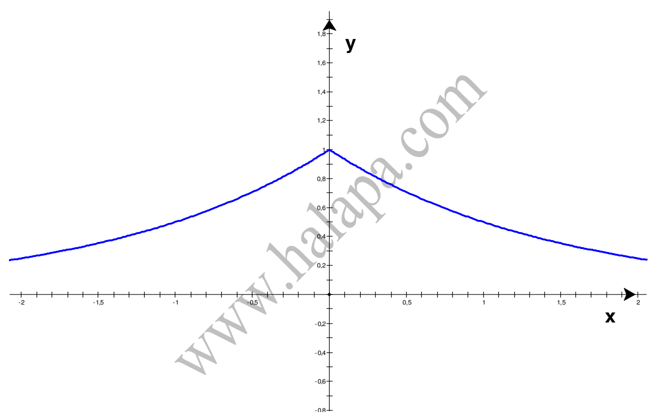
ili

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}.$$

Budući da je $|x| \geq 0$ za svaki realan broj x, vrijedi:

- kada $|x| \to +\infty$, tada $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \to 0$
- kada $|x| \to 0$, tada $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} \to 1.$

Zaključujemo da će maksimalna vrijednost biti za x = 0 i iznosit će 1:



$$(f \circ g)(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|0|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1.$$

Vježba 070

Neka je $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$, $a \ g(x) = |x|, x \in R.$ Nađite maksimalnu (najveću) vrijednost koju poprima funkcija f ○ g.

Rezultat: 1.

Zadatak 071 (Petra, gimnazija)

Ako je $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$ i $g(x) = \frac{3 \cdot x + x^3}{3 \cdot x^2 + 1}$, koliko je $(f \circ g)(x)$?

Rješenje 071

Ponovimo!

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad , \quad (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \log a^n = n\cdot\log a.$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\log\frac{1+g(x)}{1-g(x)}=\log\frac{1+\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{1-\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{3\cdot x^2+1-\left(3\cdot x+x^3\right)}{3\cdot x^2+1}}=$$

$$=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}{3\cdot x^2+1}}=\log\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}=\log\frac{1+3\cdot x+3\cdot x^2+x^3}{1-3\cdot x+3\cdot x^2-x^3}=\log\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3}=$$

$$=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3=3\cdot\log\frac{1+x}{1-x}=\left[f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}\right]=3\cdot f(x).$$

Vježba 071

Ako je $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$ i $g(x)=x$, koliko je $(f\circ g)(x)$?

Rezultat: f(x).

Zadatak 072 (Igor, gimnazija)

Ako je $f^{-1}(x+1)=\frac{3\cdot x+6}{1-x}$, izračunajte $f(1)$.

Rješenje 072

Ponovimo!

Za funkciju f i njoj inverznu funkciju f^{-1} vrijedi:

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x \quad , \quad \left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}(f(x))=x.$$

1.inačica

Najprije nađemo inverznu funkciju $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x+1)=\frac{3\cdot x+6}{1-x}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ x+1=t\Rightarrow x=t-1\end{array}\right]\Rightarrow f^{-1}(t)=\frac{3\cdot(t-1)+6}{1-(t-1)}\Rightarrow f^{-1}(t)=\frac{3\cdot t-3+6}{1-t+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(t)=\frac{3\cdot t+3}{2-t}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3\cdot x+3}{2-x}.$$

Računamo funkciju f(x):

$$f^{-1}(x)=\frac{3\cdot x+3}{2-x}\Rightarrow\left[y=f^{-1}(x)\right]\Rightarrow y=\frac{3\cdot x+3}{2-x}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ y\leftrightarrow x\end{array}\right]\Rightarrow x=\frac{3\cdot y+3}{2-y}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{računamo}\\ y\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\cdot y+3}{2-y}\ /\cdot(2-y)\Rightarrow x\cdot(2-y)=3\cdot y+3\Rightarrow 2\cdot x-x\cdot y=3\cdot y+3\Rightarrow 2\cdot x-3=3\cdot y+x\cdot y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x-3=y\cdot(x+3)\Rightarrow y=\frac{2\cdot x-3}{x+3}\Rightarrow[y=f(x)]\Rightarrow f(x)=\frac{2\cdot x-3}{x+3}\Rightarrow f(1)=\frac{2\cdot 1-3}{1+3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=\frac{2-3}{4}\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{4}\Rightarrow f(1)=-0.25.$$

2.inačica

Najprije nađemo inverznu funkciju $f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x+1)=\frac{3\cdot x+6}{1-x} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{supstitucija} \\ x+1=t \Rightarrow x=t-1\end{array}\right] \Rightarrow f^{-1}(t)=\frac{3\cdot(t-1)+6}{1-(t-1)} \Rightarrow f^{-1}(t)=\frac{3\cdot t-3+6}{1-t+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(t)=\frac{3\cdot t+3}{2-t} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3\cdot x+3}{2-x}.$$

Računamo f(1):

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(x)=\dfrac{3\cdot x+3}{2-x} \\ \left(f^{-1}\circ f\right)(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f^{-1}(x)=\dfrac{3\cdot x+3}{2-x} \\ f^{-1}(f(1))=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3\cdot f(1)+3}{2-f(1)}=1 \Rightarrow 3\cdot f(1)+3=2-f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot f(1)+f(1)=2-3 \Rightarrow 4\cdot f(1)=-1 \;/:4 \Rightarrow f(1)=-\frac{1}{4} \Rightarrow f(1)=-\,0.25.$$

Vježba 072

Ako je $f^{-1}(x+1)=\dfrac{3\cdot x+6}{1-x}$, izračunajte $f(2)$.

Rezultat: 0.2.

Zadatak 073 (Igor, gimnazija)

Odredi parnost funkcije: $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(a^{x}+a^{-x}\right)$.

Rješenje 073

Ponovimo!

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu:

$$f(-x)=\frac{1}{2}\cdot\left(a^{-x}+a^{-(-x)}\right) \Rightarrow f(-x)=\frac{1}{2}\cdot\left(a^{-x}+a^{x}\right) \Rightarrow f(-x)=\frac{1}{2}\cdot\left(a^{x}+a^{-x}\right) \Rightarrow f(-x)=f(x).$$

Funkcija je parna.

Vježba 073

Odredi parnost funkcije: $f(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\left(b^{x}+b^{-x}\right)$.

Rezultat: Parna.

Zadatak 074 (Igor, gimnazija)

Odredi parnost funkcije: $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$.

Rješenje 074

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}\quad,\quad \log a^{n}=n\cdot\log a.$$

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu:

$$f(-x)=\log\frac{1+(-x)}{1-(-x)} \Rightarrow f(-x)=\log\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow f(-x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} \Rightarrow f(-x)=-1\cdot\log\frac{1+x}{1-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = -1 \cdot f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Funkcija je neparna.

Vježba 074

Odredi parnost funkcije: $f(x) = \log \frac{2-x}{2+x}$.

Rezultat: Neparna.

Zadatak 075 (Igor, gimnazija)

Odredi parnost funkcije: $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Rješenje 075

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu:

$$f(-x) = \log\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) \Rightarrow f(-x) = \log\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija} \\ \text{brojnika}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = \log\left(\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right) \cdot \frac{-x-\sqrt{1+x^2}}{-x-\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow f(-x) = \log\left(\frac{(-x)^2 - \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{-x-\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = \log\left(\frac{x^2 - 1 - x^2}{-x-\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow f(-x) = \log\left(\frac{-1}{-x-\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow f(-x) = \log\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{-1} \Rightarrow f(-x) = -1 \cdot \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = -1 \cdot f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Funkcija je neparna.

Vježba 075

Odredi parnost funkcije: $f(x) = \log x^2$.

Rezultat: Parna.

Zadatak 076 (Valentina, gimnazija)

Ako je $f(x) = \frac{10^{2\cdot x} - 1}{1 + x \cdot 10^{x}}$, $g(x) = \log x$, nađite $(f \circ g)(1)$.

Rješenje 076

Ponovimo!

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad \log 1 = 0 \quad , \quad a^0 = 1.$$

1.inačica

$$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(g(1))=f(\log 1)=f(0)=\frac{10^{2\cdot 0}-1}{1+0\cdot 10^{0}}=\frac{10^{0}-1}{1+0}=\frac{1-1}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

2.inačica

$$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(g(1))=\frac{10^{2\cdot g(1)}-1}{1+g(1)\cdot 10^{g(1)}}=\frac{10^{2\cdot\log 1}-1}{1+\log 1\cdot 10^{\log 1}}=\frac{10^{2\cdot 0}-1}{1+0\cdot 10^{0}}=\frac{10^{0}-1}{1+0}=\frac{1-1}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

Vježba 076

Ako je $f(x)=\frac{10^{x}-1}{1+x\cdot 10^{x}}$, $g(x)=\ln x$, nađite $(f\circ g)(1)$.

Rezultat: 0.

Zadatak 077 (Mala, gimnazija)

Odredi temeljni period funkcije $f(x)=\frac{1}{2}\cdot|\sin 2x|$.

Rješenje 077

Ponovimo!

Ako za funkciju $f:D_f\to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P)=f(x),$$

za svaki $x\in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodična funkcija. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi

f(x + P) = f(x) nazivaju se periodi funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivan broj P, tada se taj P naziva temeljni period. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljni period za sinus i kosinus je 2π. Ako je P temeljni period funkcije y = f(x), tada je

$$\frac{P}{a},\ a>0$$

temeljni period funkcije y = f(a · x).

Funkcija f(x) = sin x ima temeljni period 2π pa period funkcije f(x) = sin 2x iznosi

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin x\ \Rightarrow\ P=2\cdot\pi \\ f(x)=\sin 2x\ \Rightarrow\ P=\frac{2\cdot\pi}{2}\ \Rightarrow\ P=\pi \end{array}\right\}.$$

Budući da je funkcija f(x) = sin 2x pod znakom apsolutne vrijednosti, period funkcije f upola je manji, tj.

$$P=\frac{\pi}{2}.$$

Vježba 077

Odredi temeljni period funkcije $f(x)=2\cdot|\sin 2x|$.

Rezultat: $P=\frac{\pi}{2}.$

Zadatak 078 (Mala, gimnazija)

Odredi temeljni period funkcije $f(x)=\sin^2(3\pi x)-\cos^2(3\pi x)$.

Rješenje 078

Ponovimo!

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.$$

Ako za funkciju $f:D_f\to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P)=f(x),$$

za svaki $x \in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodična funkcija. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi

f(x + P) = f(x) nazivaju se periodi funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivan broj P, tada se taj P naziva temeljni period. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljni period za sinus i kosinus je 2π. Ako je P temeljni period funkcije y = f(x), tada je

$$\frac{P}{a}\ ,\ a>0$$

temeljni period funkcije y = f(a · x).
Transformiramo zadanu funkciju:

$$f(x)=\sin^2(3\pi x)-\cos^2(3\pi x) \Rightarrow f(x)=-\left(\cos^2(3\pi x)-\sin^2(3\pi x)\right) \Rightarrow f(x)=-\cos^2(2\cdot 3\pi x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=-\cos^2(6\pi x).$$

Funkcija f(x) = cos x ima temeljni period 2π pa period funkcije f(x) = – cos (6πx)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\cos x \Rightarrow P=2\cdot\pi \\ f(x)=-\cos(6\pi x) \Rightarrow P=\dfrac{2\cdot\pi}{6\pi} \Rightarrow P=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

Vježba 078

Odredi temeljni period funkcije $f(x)=\sin^2(\pi x)-\cos^2(\pi x)$.

Rezultat: 1.

Zadatak 079 (Miroslav, gimnazija)

Odredi realne funkcije f(x) i g(x) iz sustava jednadžbi: $\begin{cases} f(x-1)-g(x+1)=x, \\ f(x-1)-2\cdot g(x+1)=2\cdot x+3. \end{cases}$

Rješenje 079

Najprije riješimo dani sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama f(x–1) i g(x+1):

$$\left.\begin{array}{l} f(x-1)-g(x+1)=x \\ f(x-1)-2\cdot g(x+1)=2\cdot x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x-1)-g(x+1)=x \\ f(x-1)-2\cdot g(x+1)=2\cdot x+3\ /\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x-1)-g(x+1)=x \\ -f(x-1)+2\cdot g(x+1)=-2\cdot x-3 \end{array}\right\} \Rightarrow g(x+1)=-x-3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g(x+1)=-x-3 \\ f(x-1)-g(x+1)=x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x-1)-(-x-3)=x \Rightarrow f(x-1)+x+3=x \Rightarrow f(x-1)=-3.$$

Tražimo funkciju f(x):

$$f(x-1)=-3 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ y=x-1\end{array}\right] \Rightarrow f(y)=-3.$$

Funkcija f(x) glasi:

f(x) = – 3.

Tražimo funkciju g(x):

$$g(x+1)=-x-3 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ y=x+1 \Rightarrow x=y-1\end{array}\right] \Rightarrow g(y)=-(y-1)-3 \Rightarrow g(y)=-y+1-3 \Rightarrow g(y)=-y-2.$$

Funkcija g(x) glasi:

g(x) = – x – 2.

Vježba 079

Odredi realne funkcije f(x) i g(x) iz sustava jednadžbi: $\begin{cases} f(x+1)+g(x-1)=2, \\ 2\cdot f(x+1)+g(x-1)=x+3. \end{cases}$

Rezultat: f(x) = x , g(x) = – x.

Zadatak 080 (Vedrana, maturantica)

Odredi temeljni period funkcije $f(x)=8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1.$

Rješenje 080

Ponovimo!

$$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad , \quad \cos 2\alpha=1-2\cdot\sin^2\alpha \quad , \quad a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n.$$

Ako za funkciju $f: D_f \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P)=f(x),$$

za svaki $x\in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodična funkcija. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi

f(x + P) = f(x) nazivaju se periodi funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivan broj P, tada se taj P naziva temeljni period. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljni period za sinus i kosinus je 2π. Ako je P temeljni period funkcije y = f(x), tada je

$$\frac{P}{a}\ ,\ a>0$$

temeljni period funkcije y = f(a · x).
Transformiramo zadanu funkciju:

$$f(x)=8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1=2\cdot 4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x-1=2\cdot\left(4\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right)-1=2\cdot(2\cdot\sin x\cdot\cos x)^2-1=$$

$$=2\cdot\sin^2 2\alpha-1==-\left(1-2\cdot\sin^2 2\alpha\right)=-\cos 4\alpha.$$

Funkcija f(x) = cos x ima temeljni period 2π pa period funkcije f(x) = – cos 4x iznosi

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\cos x \Rightarrow P=2\cdot\pi \\ f(x)=-\cos 4x \Rightarrow P=\dfrac{2\cdot\pi}{4} \Rightarrow P=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\}.$$

Vježba 080

Odredi temeljni period funkcije $f(x)=1-8\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x.$

Rezultat: $P=\frac{\pi}{2}.$