Zadatak 201 (Rijad, gimnazija)

U jednom razredu ima 25 učenika, u drugom 20, a u trećem 30 učenika. Na koliko različitih načina možemo formirati ekipu od 6 učenika tako da iz svakog razreda budu po 2 učenika?

Rješenje 201

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Kombinacije bez ponavljanja

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je $r \le n$. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r}.$$

Dva učenika iz razreda koji broji 25 učenika mogu se odabrati na

$$n_1 = C_{25}^2 = \binom{25}{2}$$

načina.

Dva učenika iz razreda koji broji 20 učenika mogu se odabrati na

$$n_2 = C_{20}^2 = \binom{20}{2}$$

načina.

Dva učenika iz razreda koji broji 30 učenika mogu se odabrati na

$$n_3 = C_{30}^2 = \binom{30}{2}$$

načina.

Prema načelu prebrojavanja broj načina na koji možemo formirati ekipu od 6 učenika tako da iz svakog razreda budu po 2 učenika iznosi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \Rightarrow N = C_{25}^2 \cdot C_{20}^2 \cdot C_{30}^2 \Rightarrow N = \binom{25}{2} \cdot \binom{20}{2} \cdot \binom{30}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} \cdot \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} \cdot \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} \Rightarrow N = 24795000.$$

Vježba 201

U jednom razredu ima 24 učenika, u drugom 22, a u trećem 20 učenika. Na koliko različitih načina možemo formirati ekipu od 6 učenika tako da iz svakog razreda budu po 2 učenika?

Rezultat: 12113640.

Zadatak 202 (Zvonimir, gimnazija)

Dokaži da za svaki prirodan broj n, $n \geq 2$, vrijedi $\binom{n}{n-2}+\binom{n+1}{n-1}=n^2$.

Rješenje 202

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n \cdot a^m=a^{n+m}.$$

Binomni koeficijent je broj koji se označava s $\binom{n}{r}$ i definira ovako:

$$\binom{n}{r}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ ...\ \cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot r},$$

gdje su $n,\ r \in N_0$, $0 \leq r \leq n$.

Svojstvo simetrije:

$$\boxed{\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\binom{n}{n-2}+\binom{n+1}{n-1}=\left[\begin{array}{c}\text{svojstvo simetrije}\\ \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\end{array}\right]=\binom{n}{n-(n-2)}+\binom{n+1}{n+1-(n-1)}=\binom{n}{n-n+2}+\binom{n+1}{n+1-n+1}=$$

$$=\binom{n}{n-n+2}+\binom{n+1}{n+1-n+1}=\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{(n+1)\cdot n}{1\cdot 2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\frac{(n+1)\cdot n}{2}=$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\frac{(n+1)\cdot n}{2}=\frac{n}{2}\cdot((n-1)+(n+1))=\frac{n}{2}\cdot(n-1+n+1)=\frac{n}{2}\cdot(n-1+n+1)=\frac{n}{2}\cdot 2\cdot n=\frac{n}{2}\cdot 2\cdot n=n^2.$$

Vježba 202

Dokaži da za svaki prirodan broj n, $n \geq 2$, vrijedi $\binom{n+1}{n-1}=n^2-\binom{n}{2}$.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 203 (Zvonimir, gimnazija)

Riješi u skupu N jednadžbu: $\binom{n+3}{3}=\binom{n+2}{2}+4\cdot\binom{n+1}{1}$.

Rješenje 203

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n \cdot a^m=a^{n+m}.$$

Binomni koeficijent je broj koji se označava s $\binom{n}{r}$ i definira ovako:

$$\binom{n}{r}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ ...\ \cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot r},$$

gdje su $n,\ r\in N_0$, $0\le r\le n.$

Svojstvo:

$$\boxed{\binom{n}{1}=n.}$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ \ ,\ \ n\ne 0\ \ ,\ \ n\ne 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ ili }\ b=0\ \text{ ili }\ a=b=0.$$

$$\binom{n+3}{3}=\binom{n+2}{2}+4\cdot\binom{n+1}{1}\ \Rightarrow\ \binom{n+3}{3}-\binom{n+2}{2}-4\cdot\binom{n+1}{1}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{1\cdot 2}-4\cdot(n+1)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)}{6}-\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}-4\cdot(n+1)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)}{6}-\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}-4\cdot(n+1)=0\ /\cdot 6\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)-3\cdot(n+2)\cdot(n+1)-24\cdot(n+1)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)-3\cdot(n+2)\cdot(n+1)-24\cdot(n+1)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (n+1)\cdot((n+3)\cdot(n+2)-3\cdot(n+2)-24)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (n+1)\cdot\left(n^2+2\cdot n+3\cdot n+6-3\cdot n-6-24\right)=0\ \Rightarrow\ (n+1)\cdot\left(n^2+2\cdot n+3\cdot n+6-3\cdot n-6-24\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (n+1)\cdot\left(n^2+2\cdot n+\cancel{3\cdot n}+\cancel{6}-\cancel{3\cdot n}-\cancel{6}-24\right)=0\ \Rightarrow\ (n+1)\cdot\left(n^2+2\cdot n-24\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} n+1=0 \\ n^2+2\cdot n-24=0 \end{array}\right\}.$$

Za

$$n+1=0$$

dobije se:

$$n+1=0\ \Rightarrow\ n=-1.$$

Nije rješenje jer – 1 nije prirodan broj.

Za

$$n^2+2\cdot n-24=0$$

dobije se:

$$n^2+2\cdot n-24=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n^2+2\cdot n-24=0 \\ a=1 \;,\; b=2 \;,\; c=-24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=2 \;,\; c=-24 \\ n_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-24)}}{2\cdot 1} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{2} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{100}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-2\pm 10}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=\dfrac{-2+10}{2} \\ n_2=\dfrac{-2-10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=\dfrac{8}{2} \\ n_2=-\dfrac{12}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=4 \\ n_2=-6 \end{array}\right\}.$$

Rješenje n = – 6 ne odgovara jer nije prirodan broj. Točan odgovor je n = 4.

Vježba 203

Riješi u skupu N jednadžbu: $\binom{n+3}{3}-4\cdot n-4=\binom{n+2}{2}$.

Rezultat: n = 4.

Zadatak 204 (Antonio, gimnazija)

Dokaži da je broj $C_{n+k}^{2}+C_{n+k+1}^{2}$ potpun kvadrat.

Rješenje 204

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n\,!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \dots\ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n ! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1 ! = 1,
2 ! = 1 · 2,
3 ! = 1 · 2 · 3,
4 ! = 1 · 2 · 3 · 4,
5 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Zapamti!

$$0\,!=1.$$

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n\,!=(n-1)\,!\cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

9! = 8! · 9,
9! = 7! · 8 · 9,
9! = 6! · 7 · 8 · 9,
9! = 5! · 6 · 7 · 8 · 9,
9! = 4! · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 itd.

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \frac{n\,!}{k\,! \cdot (n-k)\,!}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;\; , \;\; n \neq 0 \;\; , \;\; n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad , \qquad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2 = \frac{(n+k)\,!}{2\,! \cdot (n+k-2)\,!} + \frac{(n+k+1)\,!}{2\,! \cdot (n+k+1-2)\,!} = \frac{(n+k)\,!}{2 \cdot (n+k-2)\,!} + \frac{(n+k+1)\,!}{2 \cdot (n+k-1)\,!} =$$

$$= \frac{(n+k-2)\,! \cdot (n+k-1) \cdot (n+k)}{2 \cdot (n+k-2)\,!} + \frac{(n+k-1)\,! \cdot (n+k) \cdot (n+k+1)}{2 \cdot (n+k-1)\,!} =$$

$$= \frac{(n+k-2)\,! \cdot (n+k-1) \cdot (n+k)}{2 \cdot (n+k-2)\,!} + \frac{(n+k-1)\,! \cdot (n+k) \cdot (n+k+1)}{2 \cdot (n+k-1)\,!} =$$

$$= \frac{(n+k-1) \cdot (n+k)}{2} + \frac{(n+k) \cdot (n+k+1)}{2} = \frac{(n+k-1) \cdot (n+k) + (n+k) \cdot (n+k+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+k-1) \cdot (n+k) + (n+k) \cdot (n+k+1)}{2} = \frac{(n+k) \cdot ((n+k-1) + (n+k+1))}{2} =$$

$$= \frac{(n+k) \cdot (n+k-1+n+k+1)}{2} = \frac{(n+k) \cdot (n+k-1+n+k+1)}{2} = \frac{(n+k) \cdot (n+k+n+k)}{2} =$$

$$= \frac{(n+k) \cdot (2 \cdot n + 2 \cdot k)}{2} = \frac{(n+k) \cdot 2 \cdot (n+k)}{2} = \frac{(n+k) \cdot 2 \cdot (n+k)}{2} = (n+k) \cdot (n+k) = (n+k)^2.$$

Vježba 204

Dokaži da je broj $C_7^2 + C_8^2$ potpun kvadrat.

Rezultat: 7^2.

Zadatak 205 (Princ romantik, gimnazija)

Kolika je vjerojatnost da ćemo iz kutije u kojoj je 5 bijelih i 3 crne kuglice izvući 2 bijele i 1 crnu?

Rješenje 205

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ ... \ \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj n ! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1 ! = 1,
2 ! = 1 · 2,
3 ! = 1 · 2 · 3,
4 ! = 1 · 2 · 3 · 4,
5 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Ponovimo definiciju kombinacija bez ponavljanja!
Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ ... \ \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ ... \ \cdot k}.$$

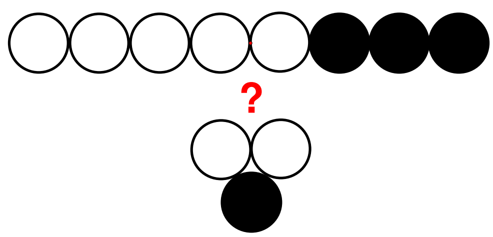
U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100}$, $81\ \% = \frac{81}{100}$, $4.5\ \% = \frac{4.5}{100}$, $0.3\ \% = \frac{0.3}{100}$, $p\ \% = \frac{p}{100}$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$



Da bismo postavili ispravan model zamislit ćemo da sve kuglice možemo razlikovati. (Možemo pretpostaviti da su sve one označene različitim brojevima, od 1 do 8). Tri kuglice (2 bijele + 1 crna) iz skupa od 8 kuglica (5 bijelih + 3 crne) možemo odabrati na

$$n = C_8^3 = \binom{8}{3}$$

načina. Dakle, broj svih mogućih ishoda (različitih kombinacija) je

$$n = C_8^3 = \binom{8}{3}$$

Dvije bijele kuglice između pet bijelih možemo odabrati na

$$m_1 = C_5^2 = \binom{5}{2}$$

načina, a jednu crnu između tri crne kuglice možemo odabrati na

$$m_2 = C_3^1 = \binom{3}{1}$$

načina.
Broj povoljnih ishoda (rezultata) događaja A (izvući 2 bijele i 1 crnu) je

$$m = m_1 \cdot m_2 = C_5^2 \cdot C_3^1 \Rightarrow m = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1}.$$

Zato je:

$$P(A) = \frac{m}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{8 \cdot 7}{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{8 \cdot 7}{1}} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{2 \cdot 7}{1}} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{28} \Rightarrow P(A) = 0.5357 = \frac{53.57}{100} = 53.57\%.$$

Vježba 205

Kolika je vjerojatnost da ćemo iz kutije u kojoj je 5 bijelih i 3 crne kuglice izvući 2 bijele i 2 crne?

Rezultat: 42.86%.

Zadatak 206 (Adela, gimnazija)

Neki se skup sastoji od n različitih elemenata. Ako tom skupu dodamo jedan element, onda će broj njegovih permutacija bez ponavljanja biti 6 puta veći. Koliki je n?

A. 5 *B.* 6 *C.* 7 *D.* 8

Rješenje 206

Ponovimo!

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj n ! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1 ! = 1,
2 ! = 1 · 2,
3 ! = 1 · 2 · 3,
4 ! = 1 · 2 · 3 · 4,
5 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Zapamti!

$$0! = 1.$$

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = (n-1)! \cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

9! = 8! · 9,
9! = 7! · 8 · 9,
9! = 6! · 7 · 8 · 9,
9! = 5! · 6 · 7 · 8 · 9,
9! = 4! · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 itd.

Permutacije bez ponavljanja

Permutacija skupa $S = \{ a_1, a_2, a_3, ..., a_n \}$ od n različitih elemenata uređena je n – torka svih njegovih članova. Broj različitih permutacija od n elemenata je

$$P_n = n! \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ ... \ \cdot (n-1) \cdot n \\ P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ ... \ \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array} \right\}.$$

Kako zapisati rečenicu "Broj b je n puta veći od broja a."?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Kada skup ima n različitih elemenata broj permutacija bez ponavljanja iznosi:

$$P_n = n!.$$

Kada skup ima n + 1 različit element broj permutacija bez ponavljanja iznosi:

$$P_{n+1} = (n+1)!.$$

Prema uvjetu zadatka je

$$P_{n+1} = 6 \cdot P_n \Rightarrow (n+1)! = 6 \cdot n! \Rightarrow n! \cdot (n+1) = 6 \cdot n! \Rightarrow n! \cdot (n+1) = 6 \cdot n! \, / \cdot \frac{1}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1 = 6 \Rightarrow n = 6-1 \Rightarrow n = 5.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 206

Neki se skup sastoji od n različitih elemenata. Ako tom skupu dodamo jedan element, onda će broj njegovih permutacija bez ponavljanja biti 7 puta veći. Koliki je n?

$A.\ 5 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ 7 \qquad D.\ 8$

Rezultat: B.

Zadatak 207 (Romana, veleučilište)

Koliko ima peteroznamenkastih parnih brojeva?

Rješenje 207

Ponovimo!

Prirodan broj je paran ako je višekratnik broja 2, odnosno ako je djeljiv brojem 2 bez ostatka.

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k$$

načina.

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

1.inačica

Skup peteroznamenkastih parnih brojeva shvatimo kao aritmetički niz. Prvi član je najmanji peteroznamenkasti paran broj, $a_1 = 10000$. Posljednji član je najveći peteroznamenkasti paran broj, $a_n = 99998$. Razlika je 2 jer parni brojevi rastu za 2. Tada vrijedi:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow a_1 + (n-1)\cdot d = a_n \Rightarrow (n-1)\cdot d = a_n - a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1)\cdot d = a_n - a_1 \ /\cdot \frac{1}{d} \Rightarrow n-1 = \frac{a_n - a_1}{d} \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = 10000 \\ a_n = 99998 \\ d = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{99998 - 10000}{2} + 1 \Rightarrow n = 45000.$$

Peteroznamenkastih parnih brojeva ima 45000.

2.inačica

Uočimo da za prvo mjesto peteroznamenkastog broja možemo koristiti sve znamenke osim nule, za drugo, treće i četvrto mjesto sve znamenke, a za peto mjesto samo parne znamenke.

Na prvo mjesto peteroznamenkastog broja možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, osim nule jer onda to ne bi bio peteroznamenkasti broj.

(to je 9 mogućnosti, $n_1 = 9$).

Na drugom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(to je 10 mogućnosti, $n_2 = 10$).

Na trećem mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(to je 10 mogućnosti, $n_3 = 10$).

Na četvrtom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(to je 10 mogućnosti, $n_4 = 10$).

Na petom mjestu može biti samo parna znamenka iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ jer broj je paran

(to je 5 mogućnosti, $n_5 = 5$).

Parnih peteroznamenkastih brojeva ima:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45000.$$

1, 2, 3, 4, 5 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, 9	0, 2, 4, 6, 8
9	**10**	**10**	**10**	**5**

Vježba 207

Koliko ima peteroznamenkastih neparnih brojeva?

Rezultat: 45000.

Zadatak 208 (Romana, veleučilište)

Koliko lozinki od 5 znamenaka možemo načiniti od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ako ne dopuštamo ponavljanje?

Rješenje 208

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Varijacije bez ponavljanja

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata bez ponavljanja jednak je

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

1.inačica

Problem ćemo riješiti primjenom načela o uzastopnom prebrojavanju.
Za prvu znamenku peteroznamenkastog broja možemo uzeti bilo koju znamenku iz zadanog skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Dakle, možemo je birati na $n_1 = 8$ načina.

1. znamenka				
ima 8 znamenaka				
8				

Kada je prva znamenka već izabrana za drugu znamenku možemo uzeti bilo koju od preostalih 7 znamenaka. Možemo je birati na $n_2 = 7$ načina jer znamenke moraju biti različite.

1. znamenka	2. znamenka			
ima 8 znamenaka	preostalo 7 znamenaka			
8	**7**			

Kada su prve dvije znamenke izabrane za treću znamenku možemo uzeti svaku od preostalih 6 znamenaka, a to možemo načiniti na $n_3 = 6$ načina.

1. znamenka	2. znamenka	3. znamenka		
ima 8 znamenaka	preostalo 7 znamenaka	preostalo 6 znamenaka		
8	**7**	**6**		

Za četvrtu znamenku može se uzeti bilo koja znamenka od preostalih 5 znamenaka. To možemo napraviti na $n_4 = 5$ načina.

1. znamenka	2. znamenka	3. znamenka	4. znamenka	
ima 8 znamenaka	preostalo 7 znamenaka	preostalo 6 znamenaka	preostalo 5 znamenaka	
8	**7**	**6**	**5**	

Peta znamenka može se izabrati na $n_5 = 4$ načina jer je toliko preostalo neizabranih znamenaka.

1. znamenka	2. znamenka	3. znamenka	4. znamenka	5. znamenka
ima 8 znamenaka	preostalo 7 znamenaka	preostalo 6 znamenaka	preostalo 5 znamenaka	preostale 4 znamenke
8	**7**	**6**	**5**	**4**

Prema načelu o uzastopnom prebrojavanju vrijedi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \Rightarrow N = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \Rightarrow N = 6720.$$

2.inačica

Iz skupa od 8 znamenaka treba uzeti 5 znamenaka pri čemu se ne dopušta njihovo ponavljanje. Riječ je o varijacijama petog razreda u skupu od osam elemenata bez ponavljanja. Zato je traženi broj:

$$N = V_8^5 \Rightarrow N = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \Rightarrow N = 6720.$$

Vježba 208

Koliko lozinki od 5 znamenaka možemo načiniti od znamenaka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ako ne dopuštamo ponavljanje?

Rezultat: 2520.

Zadatak 209 (Romana, veleučilište)

Koliko se peteroznamenkastih brojeva može sastaviti od znamenaka 0, 5, 6, 7 (dopuštamo ponavljanje)?

Rješenje 209

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:
Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza s_1, s_2, s_3, …, s_k jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Varijacije sa ponavljanjem
Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata sa ponavljanjem jednak je

$$\overline{V_n^r} = n^r.$$

1.inačica
Problem ćemo riješiti primjenom načela o uzastopnom prebrojavanju.
Raspolažemo sa 4 znamenke $\{0,\ 5,\ 6,\ 7\}$, od kojih 0 ne može biti na prvom mjestu. Stoga prvu znamenku peteroznamenkastog broja možemo izabrati na $n_1 = 3$ načina (bilo koja znamenka osim nule). Drugu, treću, četvrtu i petu biramo na 4 načina (na ta mjesta možemo napisati bilo koju od četiri ponuđene znamenke).

$$n_1 = 3 \quad , \quad n_2 = 4 \quad , \quad n_3 = 4 \quad , \quad n_4 = 4 \quad , \quad n_5 = 4.$$

5, 6, 7	0, 5, 6, 7	0, 5, 6, 7	0, 5, 6, 7	0, 5, 6, 7
3	**4**	**4**	**4**	**4**

Prema načelu o uzastopnom prebrojavanju vrijedi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \Rightarrow N = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow N = 768.$$

2.inačica
Iz skupa od 4 znamenke treba uzeti 5 znamenaka jer se dopušta njihovo ponavljanje. Riječ je o varijacijama petog razreda u skupu od četiri elementa sa ponavljanjem. Zato je traženi broj:

$$\overline{V_4^5}.$$

Budući da 0 ne može biti na prvom mjestu jer ne bismo imali peteroznamenkasti broj, moramo izuzeti četveroznamenkaste brojeve koji se mogu dobiti pomoću znamenaka 0, 5, 6 , 7. Riječ je o varijacijama četvrtog razreda u skupu od četiri elementa sa ponavljanjem.

$$\overline{V_4^4}.$$

Traženi broj peteroznamenkastih brojeva koji se mogu sastaviti od znamenaka 0, 5, 6, 7 iznosi:

$$N = \overline{V_4^5} - \overline{V_4^4} \Rightarrow N = 4^5 - 4^4 \Rightarrow N = 1024 - 256 \Rightarrow N = 768.$$

Vježba 209

Koliko se četveroznamenkastih brojeva može sastaviti od znamenaka 0, 5, 6, 7, 9 (dopuštamo ponavljanje)?

Rezultat: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500.$

Zadatak 210 (Mario, gimnazija)

Koliko različitih bacanja daju četiri kocke za igranje?

Rješenje 210

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Varijacije sa ponavljanjem

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata sa ponavljanjem jednak je

$$\overline{V_n^r} = n^r .$$

1.inačica

Problem ćemo riješiti primjenom načela o uzastopnom prebrojavanju.
Na kocki za igranje postoji šest brojeva: 1, 2, 3, 4, 5 i 6.
Na prvoj kocki može pasti bilo koji od 6 brojeva. Dakle, postoji $n_1 = 6$ načina.
Na drugoj kocki može pasti bilo koji od 6 brojeva. Dakle, postoji $n_2 = 6$ načina.
Na trećoj kocki može pasti bilo koji od 6 brojeva. Dakle, postoji $n_3 = 6$ načina.
Na četvrtoj kocki može pasti bilo koji od 6 brojeva. Dakle, postoji $n_4 = 6$ načina.

1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5, 6
6	**6**	**6**	**6**

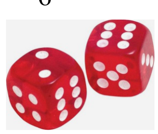
Prema načelu o uzastopnom prebrojavanju vrijedi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \Rightarrow N = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \Rightarrow N = 1296.$$

2.inačica

Iz skupa od 6 brojeva treba uzeti 4 broja pri čemu se dopušta njihovo ponavljanje. Riječ je o varijacijama četvrtog razreda u skupu od šest elemenata sa ponavljanjem. Zato je traženi broj:

$$N = \overline{V_6^4} \Rightarrow N = 6^4 \Rightarrow N = 1296.$$




Vježba 210

Koliko različitih bacanja daju tri kocke za igranje?

Rezultat: 216.

Zadatak 211 (Mario, gimnazija)

Koliko ima peteroznamenkastih telefonskih brojeva, ako znamo da su im sve znamenke neparne?

Rješenje 211

Ponovimo!

Prirodan broj je neparan, ako nije djeljiv sa 2. Neparne znamenke su: 1, 3, 5, 7 i 9.

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Varijacije sa ponavljanjem

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata sa ponavljanjem jednak je

$$\overline{V_n^r} = n^r.$$

1.inačica

Problem ćemo riješiti primjenom načela o uzastopnom prebrojavanju.

Raspolažemo sa 5 znamenaka $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Prvu znamenku biramo na 5 načina, $n_1 = 5$.

Drugu znamenku biramo na 5 načina, $n_2 = 5$ jer se znamenke mogu ponavljati.

Treću znamenku biramo na 5 načina, $n_3 = 5$ jer se znamenke mogu ponavljati.

Četvrtu znamenku biramo na 5 načina, $n_4 = 5$ jer se znamenke mogu ponavljati.

Petu znamenku biramo na 5 načina, $n_5 = 5$ jer se znamenke mogu ponavljati.

1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9	1, 3, 5, 7, 9
5	**5**	**5**	**5**	**5**

Prema načelu o uzastopnom prebrojavanju vrijedi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \Rightarrow N = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow N = 3125.$$

2.inačica

Iz skupa od 5 znamenaka treba uzeti 5 znamenaka pri čemu se dopušta njihovo ponavljanje. Riječ je o varijacijama petog razreda u skupu od pet elemenata sa ponavljanjem. Zato je traženi broj:

$$N = \overline{V_5^5} \Rightarrow N = 5^5 \Rightarrow N = 3125.$$

Vježba 211

Koliko ima sedmeroznamenkastih telefonskih brojeva, ako znamo da su im sve znamenke neparne?

Rezultat: $5^7 = 78125.$

Zadatak 212 (Sly, ekonomska škola)

Na koliko načina možemo iz špila od 40 karata odabrati 6 karata od kojih su 3 dame (u špilu se nalaze 4 dame)?

Rješenje 212

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\frac{n}{1} = n.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Kombinacije bez ponavljanja

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je $r \leq n$. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r}.$$

Špil ima 40 karata:

- 4 karte su dame
- 40 – 4 = 36 karata nisu dame ☺.

Pri odabiru poredak karata nije bitan. Od 4 dame 3 dame možemo odabrati na

$$\binom{4}{3}$$

načina. Od preostalih 36 karata bilo koje 3 karte možemo odabrati na

$$\binom{36}{3}$$

načina (ukupno mora biti odabrano 6 karata).

Prema načelu uzastopnog prebrojavanja šesteročlanih skupova karata u kojima su točno 3 karte dame ima:

$$N = \binom{4}{3} \cdot \binom{36}{3} \Rightarrow N = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Rightarrow N = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; N = 4 \cdot 6 \cdot 35 \cdot 34 \; \Rightarrow \; N = 28560.$$

Vježba 212

Na koliko načina možemo iz špila od 40 karata odabrati 6 karata od kojih su 3 kralja (u špilu se nalaze 4 kralja)?

Rezultat: 28560.

Zadatak 213 (Sly, ekonomska škola)

U skupu od 10 proizvoda 7 je oštećenih. Na koliko načina možemo odabrati uzorak od 3 proizvoda u kojem su točno 2 oštećena?

Rješenje 213

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

$$\frac{n}{1} = n.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza s_1, s_2, s_3, …, s_k jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Kombinacije bez ponavljanja

Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je $r \leq n$. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r}.$$

Ukupno ima 10 proizvoda:

- 7 proizvoda je oštećeno
- 10 – 7 = 3 su neoštećena proizvoda.

Pri odabiru poredak proizvoda nije bitan. Od 7 oštećenih proizvoda 2 možemo odabrati na

$$\binom{7}{2}$$

načina. Od preostala 3 neoštećena proizvoda 1 možemo odabrati na

$$\binom{3}{1}$$

načina (ukupno mora biti odabrano 3 proizvoda).

Prema načelu uzastopnog prebrojavanja tročlanih skupova proizvoda u kojima su točno 2 proizvoda oštećena ima:

$$N=\binom{7}{2}\cdot\binom{3}{1}\Rightarrow N=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{3}{1}\Rightarrow N=\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{3}{1}\Rightarrow N=7\cdot 3\cdot 3\Rightarrow N=63.$$

Vježba 213

U skupu od 11 proizvoda 8 je oštećenih. Na koliko načina možemo odabrati uzorak od 3 proizvoda u kojem su točno 2 oštećena?

Rezultat: $\binom{8}{2}\cdot\binom{3}{1}=84.$

Zadatak 214 (Sly, ekonomska škola)

U skupu od 8 proizvoda 3 su oštećena. Na koliko načina možemo odabrati 4 proizvoda tako da među njima bude najviše 2 oštećena?

Rješenje 214

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\frac{n}{1}=n.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja (načelo zbrajanja):
Ako su A i B konačni skupovi koji nemaju zajedničkih elemenata tada je broj elemenata unije $A\cup B$ jednak zbroju broja elemenata skupa A i skupa B, tj.

$$|A\cup B|=|A|+|B|.$$

Broj elemenata skupa S nazivamo kardinalni broj od S i označavamo $|S|$.

Načelo uzastopnog prebrojavanja (načelo umnoška):
Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza s_1, s_2, s_3, …, s_k jednak

$$N=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ ...\ \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N=n_1\cdot n_2\cdot n_3\cdot\ ...\ \cdot n_k$$

načina.

Kombinacije bez ponavljanja
Neka je S skup od n elemenata i neka je r prirodan broj ili nula takav da je r ≤ n. Kombinacija r – tog razreda u skupu S je svaki r – člani podskup skupa S. Broj svih kombinacija r – tog razreda jednak je binomnom koeficijentu $\binom{n}{r}$:

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ ...\ \cdot(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot r}.$$

$$\binom{n}{0}=1.$$

Izraz "najviše 2 oštećena proizvoda" znači da su 2 proizvoda oštećena ili 1 proizvod oštećen ili nijedan. Dakle, izbor proizvoda može biti sastavljen na sljedeći način:

- 2 oštećena proizvoda + 2 neoštećena proizvoda
- 1 oštećen proizvod + 3 neoštećena proizvoda
- 4 neoštećena proizvoda.

Računamo broj načina kada su 2 proizvoda oštećena.
Ukupno ima 8 proizvoda:

- 3 proizvoda su oštećena
- 8 – 3 = 5 je neoštećenih proizvoda.

Pri odabiru poredak proizvoda nije bitan. Od 3 oštećena proizvoda 2 možemo odabrati na

$$\binom{3}{2}$$

načina. Od preostalih 5 neoštećenih proizvoda 2 možemo odabrati na

$$\binom{5}{2}$$

načina (ukupno mora biti odabrano 4 proizvoda).
Prema načelu uzastopnog prebrojavanja četveročlanih skupova proizvoda u kojima su točno 2 proizvoda oštećena ima:

$$N_1 = \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2}.$$

Računamo broj načina kada je 1 proizvod oštećen.
Ukupno ima 8 proizvoda:

- 3 proizvoda su oštećena
- 8 – 3 = 5 je neoštećenih proizvoda.

Pri odabiru poredak proizvoda nije bitan. Od 3 oštećena proizvoda 1 možemo odabrati na

$$\binom{3}{1}$$

načina. Od preostalih 5 neoštećenih proizvoda 3 možemo odabrati na

$$\binom{5}{3}$$

načina (ukupno mora biti odabrano 4 proizvoda).
Prema načelu uzastopnog prebrojavanja četveročlanih skupova proizvoda u kojima je točno 1 proizvod oštećen ima:

$$N_2 = \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{3}.$$

Računamo broj načina kada je 0 proizvoda oštećeno.
Ukupno ima 8 proizvoda:

- 3 proizvoda su oštećena
- 8 – 3 = 5 je neoštećenih proizvoda.

Pri odabiru poredak proizvoda nije bitan. Od 3 oštećena proizvoda 0 možemo odabrati na

$$\binom{3}{0}$$

načina. Od preostalih 5 neoštećenih proizvoda 4 možemo odabrati na

$$\binom{5}{4}$$

načina (ukupno mora biti odabrano 4 proizvoda).
Prema načelu uzastopnog prebrojavanja četveročlanih skupova proizvoda u kojima nijedan proizvod nije oštećen ima:

$$N_3 = \binom{3}{0} \cdot \binom{5}{4}.$$

Ukupno rješenje je:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \Rightarrow N = \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2} + \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{3} + \binom{3}{0} \cdot \binom{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{3}{1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 1 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Rightarrow N = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{3}{1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 1 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 5 \Rightarrow N = 65.$$

Vježba 214

U skupu od 9 proizvoda 3 su oštećena. Na koliko načina možemo odabrati 4 proizvoda tako da među njima bude najviše 2 oštećena?

Rezultat: $\binom{3}{2} \cdot \binom{6}{2} + \binom{3}{1} \cdot \binom{6}{3} + \binom{3}{0} \cdot \binom{6}{4} = 120.$

Zadatak 215 (Matrix, gimnazija)

Neka je $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Jesu li A i B nezavisni događaji?

Rješenje 215

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Unija događaja
Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja A, B nazivamo unija, suma ili zbroj događaja i označavamo s $A \cup B,\ A + B,\ A \text{ ili } B.$
Presjek događaja
Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila oba događaja A i B zovemo presjek, produkt ili umnožak dvaju događaja i označavamo ga s $A \cap B,\ A \cdot B,\ A \text{ i } B.$
Za bilo koja dva događaja A i B iz istog skupa svih elementarnih događaja Ω vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Događaji A i B iz istog skupa svih elementarnih događaja Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Iz formule

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

slijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P(A)=\frac{1}{2} \ , \ P(B)=\frac{1}{2} \\ P(A\cup B)=\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3+3-4}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{6} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{6} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}.$$

Dakle, vrijedi

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}.$$

Prema definiciji događaji A i B su nezavisni ako je

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

U našem primjeru imamo:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow \begin{bmatrix} P(A)=\frac{1}{2} \\ P(B)=\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{3}.$$

Događaji A i B nisu nezavisni događaji.

Vježba 215

Neka je $P(A)=0.5,\ P(B)=0.5,\ P(A\cup B)=\frac{2}{3}.$ Jesu li A i B nezavisni događaji?

Rezultat: Nisu.

Zadatak 216 (Matrix, gimnazija)

Neka je $P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(A\cup B)=\frac{3}{4}.$ Jesu li A i B nezavisni događaji?

Rješenje 216

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Unija događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja A, B nazivamo unija, suma ili zbroj događaja i označavamo s $A\cup B,\ A+B,\ A$ ili $B.$

Presjek događaja

Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila oba događaja A i B zovemo presjek, produkt ili umnožak dvaju događaja i označavamo ga s $A\cap B,\ A\cdot B,\ A$ i $B.$

Za bilo koja dva događaja A i B iz istog skupa svih elementarnih događaja Ω vrijedi

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Događaji A i B iz istog skupa svih elementarnih događaja Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Iz formule

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

slijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P(A) = \frac{1}{2} \;,\; P(B) = \frac{1}{2} \\ P(A \cup B) = \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2+2-3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Dakle, vrijedi

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Prema definiciji događaji A i B su nezavisni ako je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

U našem primjeru imamo:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \begin{bmatrix} P(A) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Događaji A i B su nezavisni događaji.

Vježba 216

Neka je $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.5,\ P(A \cup B) = \frac{3}{4}.$ Jesu li A i B nezavisni događaji?

Rezultat: Jesu.

Zadatak 217 (Matrix, gimnazija)

Neka je $P(A) = 0.4,\ P(B) = p,\ P(A \cup B) = 0.8.$ Treba naći p tako da vrijedi A i B su nezavisni događaji?

Rješenje 217

Ponovimo!

Unija događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja A, B nazivamo unija, suma ili zbroj događaja i označavamo s $A \cup B,\ A + B,\ A \text{ ili } B.$

Presjek događaja

Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila oba događaja A i B zovemo presjek, produkt ili umnožak dvaju događaja i označavamo ga s $A \cap B,\ A \cdot B,\ A \text{ i } B.$

Za bilo koja dva događaja A i B iz istog skupa svih elementarnih događaja Ω vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Događaji A i B iz istog skupa svih elementarnih događaja Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Iz formule

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

slijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} P(A)=0.4 \ , \ P(B)=p \\ P(A\cup B)=0.8 \end{bmatrix} \Rightarrow P(A\cap B)=0.4+p-0.8 \Rightarrow P(A\cap B)=p-0.4.$$

Dakle, vrijedi

$$P(A\cap B)=p-0.4.$$

Prema definiciji događaji A i B su nezavisni ako je

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

U našem primjeru imamo:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Rightarrow \begin{bmatrix} P(A)=0.4 \\ P(B)=p \end{bmatrix} \Rightarrow P(A\cap B)=0.4\cdot p.$$

Budući da događaji A i B moraju biti nezavisni, slijedi:

$$\left.\begin{aligned} P(A\cap B)&=p-0.4 \\ P(A\cap B)&=0.4\cdot p \end{aligned}\right\} \Rightarrow p-0.4=0.4\cdot p \Rightarrow p-0.4\cdot p=0.4 \Rightarrow 0.6\cdot p=0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.6\cdot p=0.4 \ /\cdot 5 \Rightarrow 3\cdot p=2 \Rightarrow 3\cdot p=2 \ /:3 \Rightarrow p=\frac{2}{3}.$$

Vježba 217

Neka je $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=p$, $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$. Treba naći p tako da vrijedi A i B su nezavisni događaji?

Rezultat: $p=\frac{2}{3}.$

Zadatak 218 (Matrix, gimnazija)

Neka je $P(A)=0.4$, $P(B)=p$, $P(A\cup B)=0.8$. Treba naći p tako da vrijedi $P(A\cap B)=0$.

Rješenje 218

Ponovimo!

Unija događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja A, B nazivamo unija, suma ili zbroj događaja i označavamo s $A\cup B$, $A+B$, A ili B.

Presjek događaja

Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila oba događaja A i B zovemo presjek, produkt ili umnožak dvaju događaja i označavamo ga s $A\cap B$, $A\cdot B$, A i B.

Za bilo koja dva događaja A i B iz istog skupa svih elementarnih događaja Ω vrijedi

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Iz formule

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

slijedi

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \begin{bmatrix} P(A)=0.4 \ , \ P(B)=p \\ P(A\cup B)=0.8 \ , \ P(A\cap B)=0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.8=0.4+p-0 \Rightarrow 0.8=0.4+p \Rightarrow 0.4+p=0.8 \Rightarrow p=0.8-0.4 \Rightarrow p=0.4.$$

Vježba 218

Neka je $P(A)=0.3$, $P(B)=p$, $P(A\cup B)=0.7$. Treba naći p tako da vrijedi $P(A\cap B)=0$.

Rezultat: $p = 0.4.$

Zadatak 219 (Kaja, gimnazija)

U kutiji je a bijelih i b crnih kuglica. Iz kutije se slučajno uzima jedna kuglica i pošto je utvrđeno da je bijele boje ona se više ne vraća u kutiju. Zatim se iz kutije uzima još jedna kuglica. Kolika je vjerojatnost da je i ona bijele boje?

Rješenje 219

Ponovimo!

Pokus je djelatnost (definiran proces, postupak mjerenja, opažanja, ...) iz koje izvire neki rezultat. Rezultat pokusa naziva se ishodom. Pokus je slučajan ako se u definiranim uvjetima može ponavljati, ako postoje barem dva različita ishoda te ako se ishodi ne mogu predvidjeti sa sigurnošću. Prostor elementarnih događaja Ω je skup svih mogućih različitih ishoda slučajnog pokusa. Događaj je elementaran ako se ne može rastaviti u jednostavnije događaje.
Stohastičkim pokusom nazivamo svaki pokus čiji ishod nije unaprijed određen. Ishod takva pokusa zovemo elementarni događaj. Skup svih mogućih ishoda, svih elementarnih događaja, označavamo slovom Ω.
U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Iz kutije u kojoj se nalazi a bijelih i b crnih kuglica uzima se jedna bijela kuglica pa je sada u kutiji a – 1 bijela i b crnih kuglica.
Prostor elementarnih događaja Ω je

$$\Omega = \{\text{sve bijele i crne kuglice}\} \Rightarrow n = a - 1 + b \Rightarrow n = a + b - 1.$$

Neka je događaj

$$A = \{\text{sve bijele kuglice}\} \Rightarrow m = a - 1.$$

Tada je:

$$P(A) = \frac{m}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{a-1}{a+b-1}.$$

Vježba 219

U kutiji je a bijelih i b crnih kuglica. Iz kutije se slučajno uzima jedna kuglica i pošto je utvrđeno da je crne boje ona se više ne vraća u kutiju. Zatim se iz kutije uzima još jedna kuglica. Kolika je vjerojatnost da je i ona crne boje?

Rezultat: $P(A) = \frac{b-1}{a+b-1}.$

Zadatak 220 (Kaja, gimnazija)

Bira se jedan dvoznamenkasti broj. Kolika je vjerojatnost da su mu znamenke jednake?

Rješenje 220

Ponovimo!

$$\frac{n}{1} = n.$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja:
Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

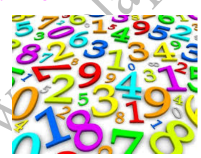
$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.
Pokus je djelatnost (definiran proces, postupak mjerenja, opažanja, ...) iz koje izvire neki rezultat. Rezultat pokusa naziva se ishodom. Pokus je slučajan ako se u definiranim uvjetima može ponavljati, ako postoje barem dva različita ishoda te ako se ishodi ne mogu predvidjeti sa sigurnošću. Prostor elementarnih događaja Ω je skup svih mogućih različitih ishoda slučajnog pokusa. Događaj je elementaran ako se ne može rastaviti u jednostavnije događaje.
Stohastičkim pokusom nazivamo svaki pokus čiji ishod nije unaprijed određen. Ishod takva pokusa zovemo elementarni događaj. Skup svih mogućih ishoda, svih elementarnih događaja, označavamo slovom Ω.
U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



Dvoznamenkasti brojevi su: 11, 12, 13, 14, … , 99. Koliko ima dvoznamenkastih brojeva?

1.inačica

Skup dvoznamenkastih brojeva shvatimo kao aritmetički niz. Prvi član je najmanji dvoznamenkasti broj, $a_1 = 10$. Posljednji član je najveći dvoznamenkasti broj, $a_n = 99$. Razlika je 1 jer brojevi rastu za 1, $d = 1$. Tada vrijedi:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \ \Rightarrow \ a_1 + (n-1) \cdot d = a_n \ \Rightarrow \ (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \ / \cdot \frac{1}{d} \ \Rightarrow \ n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} \ \Rightarrow \ n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} a_1 = 10 \\ a_n = 99 \\ d = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ n = \frac{99 - 10}{1} + 1 \ \Rightarrow \ n = 89 + 1 \ \Rightarrow \ n = 90.$$

Dvoznamenkastih brojeva ima 90.

2.inačica

Uočimo da za prvo mjesto dvoznamenkastog broja možemo koristiti sve znamenke osim nule, za drugo sve znamenke.
Na prvo mjesto dvoznamenkastog broja možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, osim nule jer onda to ne bi bio dvoznamenkasti broj (to je 9 mogućnosti, $n_1 = 9$).

Na drugom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (to je 10 mogućnosti, $n_2 = 10$).
Dvoznamenkastih brojeva ima:

$$N = n_1 \cdot n_2 = 9 \cdot 10 = 90.$$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
9	**10**

Dvoznamenkastih brojeva ima 90.
Prostor elementarnih događaja Ω je

$$\Omega = \{\text{svi dvoznamenkasti brojevi}\} \Rightarrow n = 90.$$

Neka je događaj

$$A = \{\text{dvoznamenkasti brojevi jednakih znamenaka}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\} \Rightarrow m = 9.$$

Tada je:

$$P(A) = \frac{9}{90} \Rightarrow P(A) = \frac{9}{90} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{10}.$$

Vježba 220

Bira se jedan troznamenkasti broj. Kolika je vjerojatnost da su mu znamenke jednake?

Rezultat: $\frac{1}{100}.$