Zadatak 181 (Maturanti, HTT)

Koliko ima troznamenkastih brojeva sa svim različitim znamenkama?

Rješenje 181

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Varijacije bez ponavljanja

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata bez ponavljanja jednak je

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) .$$

1.inačica

Budući da imamo deset brojeva koje možemo koristiti

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

slijedi da je n = 10. Ispisujemo troznamenkaste brojeve pa je r = 3.

Računamo koliko ima svih troznamenkastih brojeva sa različitim znamenkama (čak i kada je 0 na prvom mjestu) ako je zadan skup znamenaka $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Riječ je o varijacijama bez ponavljanja od 10 elemenata trećeg razreda jer ne koristimo sve elemente, važan nam je redoslijed, brojevi se ne smiju ponavljati, a znamenke moraju biti različite.

$$V_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Računamo koliko ima "troznamenkastih brojeva" kojima je 0 na prvom mjestu. Riječ je o varijacijama bez ponavljanja od 9 elemenata $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ drugog razreda.

$$V_9^2 = 9 \cdot 8 = 72.$$

Broj traženih troznamenkastih brojeva sa svim različitim znamenkama jednak je broju varijacija trećeg razreda od deset elemenata umanjenih za broj varijacija drugog razreda od devet elemenata (zato što na prvom mjestu ne može biti znamenka nula).

Troznamenkastih brojeva s različitim znamenkama iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ima:

$$N = V_{10}^3 - V_9^2 = 720 - 72 = 648.$$

2.inačica

Prvu znamenku, znamenku tisućica, troznamenkastog broja biramo iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jer nula ne može biti na prvom mjestu (to je 9 mogućnosti, $n_1 = 9$).

Drugu znamenku, znamenku stotica, biramo iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ali pritom moramo paziti da ne odaberemo već prije odabranu znamenku (to je ponovno 9 mogućnosti, $n_2 = 9$).

Treću znamenku, znamenku jedinica, biramo iz skupa svih znamenki $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ različitih od prve dvije znamenke koje smo odabrali (to je 8 mogućnosti, $n_3 = 8$).

Troznamenkastih brojeva s različitim znamenkama iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ima:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

Vježba 181

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva sa svim različitim znamenkama?

Rezultat: 4536.

Zadatak 182 (Maturanti, HTT)

Test se sastoji od 5 pitanja na koja se odgovara zaokruživanjem odgovora A, B ili C. Na koliko načina možemo riješiti test ako odgovorimo na sva pitanja?

Rješenje 182

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Varijacije sa ponavljanjem

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata sa ponavljanjem jednak je

$$\overline{V_n^r} = n^r.$$

1.inačica

Na prvo pitanje možemo odgovoriti na tri načina (to su 3 mogućnosti, $n_1 = 3$).
Na drugo pitanje možemo odgovoriti na tri načina (to su 3 mogućnosti, $n_2 = 3$).
Na treće pitanje možemo odgovoriti na tri načina (to su 3 mogućnosti, $n_3 = 3$).
Na četvrto pitanje možemo odgovoriti na tri načina (to su 3 mogućnosti, $n_4 = 3$).
Na peto pitanje možemo odgovoriti na tri načina (to su 3 mogućnosti, $n_5 = 3$).

Test možemo riješiti na 243 načina:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243.$$

2.inačica

Budući da imamo tri odgovora koje možemo koristiti

$$\{A, B, C\},$$

slijedi da je n = 3. Zadano je pet zadataka pa je razred r = 5.
Broj načina na koji možemo riješiti test jednak je varijacijama sa ponavljanjem od 3 elemenata petog razreda:

$$\overline{V_3^5} = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243.$$

Vježba 182

Test se sastoji od 4 pitanja na koja se odgovara zaokruživanjem odgovora A, B ili C. Na koliko načina možemo riješiti test ako odgovorimo na sva pitanja?

Rezultat: 81.

Zadatak 183 (Maturanti, HTT)

Koliko ima neparnih četveroznamenkastih brojeva?

Rješenje 183

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k$$

načina.

Neparan broj je prirodan broj koji nije djeljiv sa 2.

Uočimo da za prvo mjesto četveroznamenkastog broja možemo koristiti sve znamenke osim nule, za drugo i treće mjesto sve znamenke, a za četvrto mjesto samo neparne znamenke.

Na prvo mjesto četveroznamenkastog broja možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, osim nule jer onda to ne bi bio četveroznamenkasti broj.

(to je 9 mogućnosti, $n_1 = 9$).

Na drugom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(to je 10 mogućnosti, $n_2 = 10$).

Na trećem mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(to je 10 mogućnosti, $n_3 = 10$).

Na četvrtom mjestu može biti samo neparna znamenka iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ jer broj je neparan

(to je 5 mogućnosti, $n_4 = 5$).

Neparnih četveroznamenkastih brojeva ima:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500.$$

Vježba 183

Koliko ima parnih četveroznamenkastih brojeva ?

Rezultat: 4500.

Zadatak 184 (Maturanti, HTT)

Koliko ima parnih peteroznamenkastih brojeva ?

Rješenje 184

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k$$

načina.

Paran broj je prirodan broj koji je djeljiv sa 2.

Uočimo da za prvo mjesto peteroznamenkastog broja možemo koristiti sve znamenke osim nule, za drugo, treće i četvrto mjesto sve znamenke, a za peto mjesto samo parne znamenke.

Na prvo mjesto peteroznamenkastog broja možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, osim nule jer onda to ne bi bio peteroznamenkasti broj.

(to je 9 mogućnosti, $n_1 = 9$).

Na drugom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(to je 10 mogućnosti, $n_2 = 10$).

Na trećem mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(to je 10 mogućnosti, $n_3 = 10$).

Na četvrtom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(to je 10 mogućnosti, $n_4 = 10$).
Na petom mjestu može biti samo parna znamenka iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ jer broj je paran
(to je 5 mogućnosti, $n_5 = 5$).
Parnih peteroznamenkastih brojeva ima:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45\,000.$$

Vježba 184

Koliko ima neparnih peteroznamenkastih brojeva ?

Rezultat: 45000.

Zadatak 185 (Maturanti, HTT)

Koliko ima parnih troznamenkastih brojeva?

Rješenje 185

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Paran broj je prirodan broj koji je djeljiv sa 2.

Uočimo da za prvo mjesto troznamenkastog broja možemo koristiti sve znamenke osim nule, za drugo mjesto sve znamenke, a za treće mjesto samo parne znamenke.
Na prvo mjesto troznamenkastog broja možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, osim nule jer onda to ne bi bio troznamenkasti broj.
(to je 9 mogućnosti, $n_1 = 9$).
Na drugom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
(to je 10 mogućnosti, $n_2 = 10$).
Na trećem mjestu može biti samo parna znamenka iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ jer broj je paran
(to je 5 mogućnosti, $n_3 = 5$).
Parnih troznamenkastih brojeva ima:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 9 \cdot 10 \cdot 5 = 450.$$

Vježba 185

Koliko ima neparnih troznamenkastih brojeva?

Rezultat: 450.

Zadatak 186 (Maturanti, HTT)

Koliko ima troznamenkastih brojeva koji u svojem zapisu ne sadrže znamenku 5?

Rješenje 186

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k$$

načina.
Na prvo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku osim 0 i 5, dakle znamenke iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Nula ne smije biti na prvom mjestu jer onda to nije troznamenkasti broj, a broj 5 zbog uvjeta u zadatku ne piše se. (to je 8 mogućnosti, $n_1 = 8$)
Na drugom mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ jer 5 se ne uzima zbog uvjeta zadatka (to je 9 mogućnosti, $n_2 = 9$).
Na trećem mjestu može biti bilo koja znamenka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ jer 5 se ne uzima zbog uvjeta zadatka (to je 9 mogućnosti, $n_3 = 9$).
Broj troznamenkastih brojeva koji u svojem zapisu ne sadrže znamenku 5 iznosi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648.$$

Vježba 186

Koliko ima troznamenkastih brojeva koji u svom zapisu ne sadrže znamenku 7?

Rezultat: 648.

Zadatak 187 (Maturanti, HTT)

Koliko se različitih peteroznamenkastih brojeva može napisati pomoću znamenaka 0, 2, 2, 3, 3?

Rješenje 187

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ ... \ \cdot n_k$$

načina.

Permutacije sa ponavljanjem

Ako je zadano n elemenata, jedan element se ponavlja r puta (r < n), a drugi element se ponavlja s puta (s < n) tada se permutacije sa ponavljanjem računaju po formuli:

$$P_n^{r,\ s} = \frac{n\,!}{r\,! \cdot s\,!}.$$

Pomoću pet znamenaka trebamo napisati sve moguće peteroznamenkaste brojeve. U zadatku koristimo sve znamenke, važan je redoslijed i neke se znamenke ponavljaju. Riječ je o permutacijama sa ponavljanjem skupa od pet elemenata, n = 5, među kojima se broj dva ponavlja 2 puta, r = 2, a broj tri ponavlja se 2 puta, s = 2. Od toga treba oduzeti brojeve kojima je 0 na prvom mjestu jer su to četveroznamenkasti brojevi, dakle treba oduzeti permutacije sa ponavljanjem od 4 elementa, n = 4, gdje se dva elementa ponavljaju dva puta, r = 2, s = 2.

$$P_5^{2,\ 2} - P_4^{2,\ 2} = \frac{5\,!}{2\,! \cdot 2\,!} - \frac{4\,!}{2\,! \cdot 2\,!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30 - 6 = 24.$$

Vježba 187

Koliko se različitih peteroznamenkastih brojeva može napisati pomoću znamenaka 0, 5, 5, 7, 7?

Rezultat: 24.

Zadatak 188 (Maturanti, HTT)

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinice i desetice jednak 4?

Rješenje 188

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

- na prvo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, nula ne može biti na prvom mjestu jer tada ne bi bio peteroznamenkasti broj
  ... to je 9 načina, $n_1 = 9$
- na drugo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
  ... to je 10 načina, $n_2 = 10$
- na treće mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
  ... to je 10 načina, $n_3 = 10$
- $\left.\begin{matrix}\text{na četvrto mjesto}\\ \text{i}\\ \text{na peto mjesto}\end{matrix}\right\}$ moramo staviti brojeve iz skupa $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kojima je zbroj jednak $4:$

$$\left.\begin{matrix}0+4=4\\ 4+0=4\\ 1+3=4\\ 3+1=4\\ 2+2=4\end{matrix}\right\} \ldots \text{ to je 5 načina, } n_4 = 5.$$

Broj peteroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinice i desetice jednak 4 iznosi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500.$$

Vježba 188

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka stotice i desetice jednak 4?

Rezultat: 4500.

Zadatak 189 (Maturanti, HTT)

Koliko ima parnih četveroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinica i desetica jednak 4?

Rješenje 189

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

- na prvo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, nula ne može biti na prvom mjestu jer tada ne bi bio četveroznamenkasti broj
  ... to je 9 načina, $n_1 = 9$
- na drugo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
  ... to je 10 načina, $n_2 = 10$
- $\left.\begin{array}{c}\text{na treće mjesto}\\ \text{i}\\ \text{na četvrto mjesto}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{moramo staviti brojeve kojima je zbroj jednak 4,}\\ \text{a zadnja znamenka, znamenka jedinica, mora biti parna}\end{array}\right\}:$

$$\left.\begin{array}{l}0+4=4\\ 2+2=4\\ 4+0=4\end{array}\right\} \ldots \text{ to je 3 načina, } n_3 = 3.$$

Broj parnih četveroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinica i desetica jednak 4 iznosi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 9 \cdot 10 \cdot 3 = 270.$$

Vježba 189

Koliko ima parnih četveroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinica i desetica jednak 6?

Rezultat: 360.

Zadatak 190 (Maturanti, HTT)

Koliko ima neparnih četveroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinica i desetica jednak 3?

Rješenje 190

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

- na prvo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, nula ne može biti na prvom mjestu jer tada ne bi bio četveroznamenkasti broj
  ... to je 9 načina, $n_1 = 9$
- na drugo mjesto možemo staviti bilo koju znamenku iz skupa {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
  ... to je 10 načina, $n_2 = 10$
- $\left.\begin{array}{c}\text{na treće mjesto}\\ \text{i}\\ \text{na četvrto mjesto}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\text{moramo staviti brojeve kojima je zbroj jednak 3,}\\ \text{a zadnja znamenka, znamenka jedinica, mora biti neparna}\end{array}\right\}:$

$$\left.\begin{array}{l}0+3=3\\ 2+1=3\end{array}\right\} \ldots \text{ to su 2 načina, } n_3 = 2.$$

Broj neparnih četveroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinica i desetica jednak 3 iznosi:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180.$$

Vježba 190

Koliko ima parnih četveroznamenkastih brojeva kojima je zbroj znamenaka jedinica i desetica jednak 3?

Rezultat: 90.

Zadatak 191 (Maturanti, HTT)

Kolika je vjerojatnost da ćemo iz kutije u kojoj imamo 4 bijele, 3 crne i 4 crvene kuglice, izvući 2 bijele ili 2 crvene?

Rješenje 191

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Ponovimo definiciju kombinacija bez ponavljanja!

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

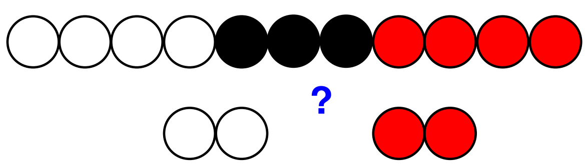
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Nuždan i dovoljan uvjet za nezavisne događaje A i B jest da bude:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ako su A i B disjunktni događaji, onda je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$



1.inačica

Neka su A i B događaji:

$$A = \{\text{izvučene su 2 bijele kuglice}\},$$

$$B = \{\text{izvučene su 2 crvene kuglice}\}.$$

Da bismo postavili ispravan model zamislit ćemo da sve kuglice možemo razlikovati. (Možemo zamisliti da su sve one označene različitim brojevima, od 1 do 11). Odrediti broj svih mogućih događaja n znači odrediti na koliko se sve načina može od 11 kuglica izvući 2 kuglice. Radi se o kombinacijama 2. reda iz skupa od 11 elemenata. Dvije kuglice iz skupa od 11 kuglica (4 bijelih + 3 crne + 4 crvene) možemo odabrati na

$$n = C_{11}^{2} = \binom{11}{2}$$

načina.

Dvije bijele kuglice između četiri bijele kuglice možemo odabrati na

$$m_A = C_4^2 = \binom{4}{2}$$

načina. Vjerojatnost događaja A iznosi:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{11}{2}}.$$

Dvije crvene kuglice između četiri crvene kuglice možemo odabrati na

$$m_B = C_4^2 = \binom{4}{2}$$

načina. Vjerojatnost događaja B iznosi:

$$P(B) = \frac{m_B}{n} \Rightarrow P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{11}{2}}.$$

Budući da su A i B nezavisni događaji, vjerojatnost da ćemo izvući dvije bijele ili dvije crvene kuglice iznosi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{11}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{2 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2}} = \frac{2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 10} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 10} = \frac{4 \cdot 3}{11 \cdot 5} = \frac{12}{55}.$$

2.inačica

Računamo vjerojatnost izvlačenja dviju bijelih kuglica.

Za prvu bijelu kuglicu broj povoljnih događaja je $m_1 = 4$, a broj svih mogućih događaja je $n_1 = 11$.

Vjerojatnost izvlačenja prve bijele kuglice je:

$$P_1 = \frac{m_1}{n_1} \Rightarrow P_1 = \frac{4}{11}.$$

Za drugu bijelu kuglicu broj povoljnih događaja je $m_2 = 3$ (jer se prva ne vraća natrag), a broj svih mogućih događaja je $n_2 = 10$.

Vjerojatnost izvlačenja druge bijele kuglice je:

$$P_2 = \frac{m_2}{n_2} \Rightarrow P_2 = \frac{3}{10}.$$

Vjerojatnost izvlačenja dviju bijelih kuglica je (događaji su nezavisni)

$$P_{12} = P_1 \cdot P_2 \Rightarrow P_{12} = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \Rightarrow P_{12} = \frac{12}{110} \Rightarrow P_{12} = \frac{6}{55}.$$

Računamo vjerojatnost izvlačenja dviju crvenih kuglica.

Za prvu crvenu kuglicu broj povoljnih događaja je $m_3 = 4$, a broj svih mogućih događaja je $n_3 = 11$.

Vjerojatnost izvlačenja prve crvene kuglice je:

$$P_3 = \frac{m_3}{n_3} \Rightarrow P_3 = \frac{4}{11}.$$

Za drugu crvenu kuglicu broj povoljnih događaja je $m_4 = 3$ (jer se prva ne vraća natrag), a broj svih mogućih događaja je $n_4 = 10$.
Vjerojatnost izvlačenja druge crvene kuglice je:

$$P_4 = \frac{m_4}{n_4} \Rightarrow P_4 = \frac{3}{10}.$$

Vjerojatnost izvlačenja dviju crvenih kuglica je (događaji su nezavisni)

$$P_{34} = P_3 \cdot P_4 \Rightarrow P_{34} = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \Rightarrow P_{34} = \frac{12}{110} \Rightarrow P_{34} = \frac{6}{55}.$$

Budući da su događaji nezavisni, vjerojatnost da ćemo izvući dvije bijele ili dvije crvene kuglice iznosi:

$$P = P_{12} + P_{34} \Rightarrow P = \frac{6}{55} + \frac{6}{55} \Rightarrow P = \frac{12}{55}.$$

Vježba 191

Kolika je vjerojatnost da ćemo iz kutije u kojoj imamo 4 žute, 3 plave i 4 crvene kuglice, izvući 2 žute ili 2 crvene?

Rezultat: $\frac{12}{55}.$

Zadatak 192 (Josip, srednja škola)

$$\text{Izračunaj}: \frac{\frac{15\,!}{3\,! \cdot 12\,!}}{\frac{20\,!}{17\,! \cdot 3\,!}}.$$

Rješenje 192

Ponovimo!
Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ \ldots \ \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj $n\,!$ čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

$1\,! = 1,$
$2\,! = 1 \cdot 2,$
$3\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3,$
$4\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$
$5\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5,$
$6\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ itd.

Zapamti!

$$0\,! = 1.$$

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n\,! = (n-1)\,! \cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

$9! = 8! \cdot 9,$
$9! = 7! \cdot 8 \cdot 9,$
$9! = 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9,$
$9! = 5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9,$
$9! = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ itd.

$$\frac{\frac{15!}{3!\cdot 12!}}{\frac{20!}{17!\cdot 3!}}=\frac{\frac{15!}{3!\cdot 12!}}{\frac{20!}{17!\cdot 3!}}=\frac{\frac{15!}{12!}}{\frac{20!}{17!}}=\frac{\frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{12!}}{\frac{17!\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{17!}}=\frac{\frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{12!}}{\frac{17!\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{17!}}=\frac{\frac{13\cdot 14\cdot 15}{1}}{\frac{18\cdot 19\cdot 20}{1}}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{18\cdot 19\cdot 20}=$$

$$=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{18\cdot 19\cdot 20}=\frac{13\cdot 14\cdot 3}{18\cdot 19\cdot 4}=\frac{13\cdot 14\cdot 3}{18\cdot 19\cdot 4}=\frac{13\cdot 14}{6\cdot 19\cdot 4}=\frac{13\cdot 14}{6\cdot 19\cdot 4}=\frac{13\cdot 7}{6\cdot 19\cdot 2}=\frac{91}{228}.$$

Vježba 192

$$\text{Izračunaj}: \frac{\frac{20!}{17!\cdot 3!}}{\frac{15!}{3!\cdot 12!}}.$$

Rezultat: $\frac{228}{91}.$

Zadatak 193 (Jasna, gimnazija)

Kolika je vjerojatnost da točka na sreću odabrana unutar kruga polumjera r padne unutar jednakostraničnog trokuta upisanog u taj krug?

Rješenje 193

Ponovimo!

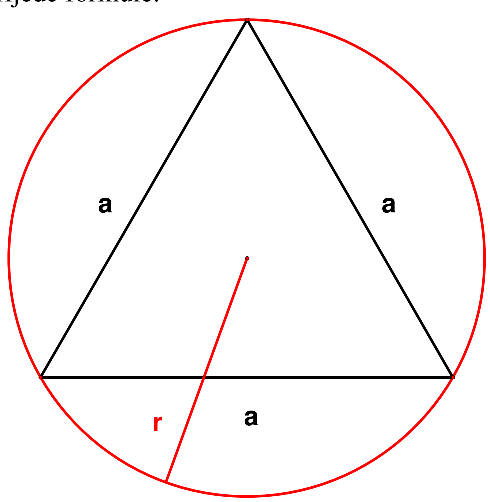
Vjerojatnost da na sreću odabrana točka unutar nekog skupa padne u neki njegov podskup jednaka je omjeru površina podskupa prema površini cijeloga skupa.
Neka je Ω ograničen podskup ravnine i m(Ω) njegova površina, a A podskup od Ω.
Kažemo da biramo točku na sreću unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar podskupa A jednaka:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo **geometrijska vjerojatnost**.
Površina kruga polumjera r iznosi:

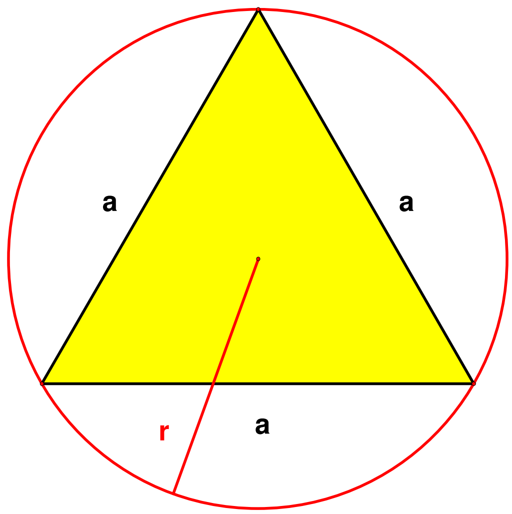
$$P=r^2\cdot\pi.$$

Za jednakostraničan trokut vrijede formule:



$$r=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}\quad,\quad P=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$



$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} \;/ \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot r}{\sqrt{3}}.$$

Neka je A traženi događaj:

A = {točka je pala unutar jednakostraničnog trokuta upisanog krugu polumjera r}.

Površina upisanog jednakostraničnog trokuta je:

$$m(A) = \frac{\left(\frac{3 \cdot r}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{9 \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{9 \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{3 \cdot r^2}{1} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Površina kruga polumjera r je:

$$m(\Omega) = r^2 \cdot \pi.$$

Tražena vjerojatnost iznosi:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{3 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{r^2 \cdot \pi} = \frac{\frac{3 \cdot r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{r^2 \cdot \pi} = \frac{\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\pi} = \frac{\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{1}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \pi}.$$

Vježba 193

U jednakostraničnom trokutu stranice a upisan je krug. Kolika je vjerojatnost da na sreću odabrana točka u trokutu ne padne unutar tog kruga?

Rezultat: $\frac{9 - \pi \cdot \sqrt{3}}{9}$.

Zadatak 194 (Silvy, gimnazija)

Iz segmenta $[0, 2]$ slučajno su izabrana dva broja x i y. Nađi vjerojatnost da ti brojevi zadovoljavaju nejednakost $x^2 + y^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 1 \le 0$.

Rješenje 194

Ponovimo!

$$\left(a-b\right)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Vjerojatnost da na sreću odabrana točka unutar nekog skupa padne u neki njegov podskup jednaka je omjeru površina podskupa prema površini cijeloga skupa.

Neka je Ω ograničen podskup ravnine i m(Ω) njegova površina, a A podskup od Ω. Kažemo da biramo točku na sreću unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar podskupa A jednaka:

$$\mathrm{P(A)}=\frac{\mathrm{m(A)}}{\mathrm{m(\Omega)}}.$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo geometrijska vjerojatnost.

Površina kruga polumjera r iznosi:

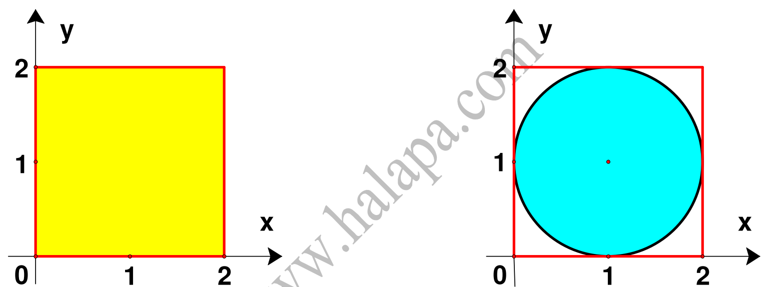
$$P=r^2\cdot\pi.$$

Površina kvadrata duljine stranice a glasi:

$$P=a^2.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r njezin polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi

$$\left(x-p\right)^2+\left(y-q\right)^2=r^2.$$



Prvo zadanu nejednakost svedemo na središnji oblik nadopunjavanjem na potpuni kvadrat.

$$x^2+y^2-2\cdot x-2\cdot y+1\le 0\ \Rightarrow\ x^2-2\cdot x+y^2-2\cdot y+1\le 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2-2\cdot x+1^2-1^2+y^2-2\cdot y+1^2-1^2+1\le 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(x^2-2\cdot x+1^2\right)-1^2+\left(y^2-2\cdot y+1^2\right)-1^2+1\le 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(x^2-2\cdot x+1\right)-1+\left(y^2-2\cdot y+1\right)-1+1\le 0\ \Rightarrow\ \left(x-1\right)^2-1+\left(y-1\right)^2-1+1\le 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(x-1\right)^2-1+\left(y-1\right)^2-1+1\le 0\ \Rightarrow\ \left(x-1\right)^2-1+\left(y-1\right)^2\le 0\ \Rightarrow\ \left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2\le 1.$$

Točke koje zadovoljavaju ovu nejednakost su one čija je udaljenost od točke S(1, 1) manja ili jednaka 1. Dakle, traženi skup je unutrašnjost kruga središta S i polumjera 1 uključujući i rubnu kružnicu. Uočimo da se događaj A sastoji od svih točaka T(x, y) koje pripadaju krugu sa središtem u točki S(1, 1) i polumjerom r = 1, a upisan je u kvadrat duljine stranice 2.

Površina upisanog kruga polumjera 1 je

$$m\left(A\right)=1^2\cdot\pi=\pi.$$

Površina kvadrata duljine stranice 2 je:

$$m\left(\Omega\right)=2^2=4.$$

Tražena vjerojatnost iznosi:

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\pi}{4}.$$

Vježba 194

Iz segmenta $[0,\ 3]$ slučajno su izabrana dva broja x i y. Nađi vjerojatnost da ti brojevi zadovoljavaju nejednakost $x^2 + y^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot y + 1 \le 0.$

Rezultat: $\frac{\pi}{9}.$

Zadatak 195 (Ivana, srednja škola)

U jednoj je pošiljci robe 2% proizvoda neispravno. Ako nasumice biramo 7 proizvoda, kolika je vjerojatnost da ćemo izabrati točno 2 neispravna?

Rješenje 195

Ponovimo!

Binomni koeficijent je broj koji se označava s $\binom{n}{r}$ i definira ovako:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} \quad \text{ili} \quad \binom{n}{r}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot r},$$

gdje su $n,\ r \in N_0$, $0 \le r \le n.$

Vjerojatnost da se pri ponavljanju pokusa n puta događaj A pojavi k puta jednaka je

$$p(A_k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k},$$

gdje je p = p(A).

Neka je A događaj:

$$A=\{\text{izabran je neispravan proizvod}\}.$$

Njegova vjerojatnost je:

$$p=p(A)=\frac{2}{100} \;\Rightarrow\; p=0.02.$$

Vjerojatnost da ćemo izabrati točno dva neispravna proizvoda od nasumice sedam izabranih iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n=7\ ,\ k=2\ ,\ p=0.02 \\ p(A_k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \end{array}\right\} \Rightarrow p(A_2)=\binom{7}{2}\cdot0.02^2\cdot(1-0.02)^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(A_2)=\binom{7}{2}\cdot0.02^2\cdot0.98^5 \Rightarrow p(A_2)=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot0.02^2\cdot0.98^5 \Rightarrow p(A_2)=\frac{42}{2}\cdot0.02^2\cdot0.98^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(A_2)=\frac{42}{2}\cdot0.02^2\cdot0.98^5 \Rightarrow p(A_2)=21\cdot0.02^2\cdot0.98^5 \Rightarrow p(A_2)=0.00759 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(A_2)=\frac{0.759}{100} \Rightarrow p(A_2)=0.759\%.$$

Vježba 195

U jednoj je pošiljci robe 5% proizvoda neispravno. Ako nasumice biramo 7 proizvoda, kolika je vjerojatnost da ćemo izabrati točno 2 neispravna?

Rezultat: 4.062%.

Zadatak 196 (Vinko, gimnazija)

Vjerojatnost da prvi strijelac pogodi metu je 4/5, za drugog strijelca vjerojatnost je 7/10, a za trećeg strijelca je 9/10. Izračunaj vjerojatnost da će bar jedan strijelac pogoditi metu.

Rješenje 196

Ponovimo!

Unija događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja A ili B nazivamo unija, suma ili zbroj događaja i označavamo s $A \bigcup B.$

Presjek događaja

Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila oba događaja A i B nazivamo presjek, produkt ili umnožak dvaju događaja i označavamo ga s $A \bigcap B.$

Razlika događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvari događaj A, a da se ne ostvari događaj B, nazivamo razlika događaja A i B i označavamo s $A \setminus B.$

Događaj $\Omega \setminus A$ nazivamo komplementom ili suprotnim događajem događaja A. On se ostvaruje ako i samo ako se A nije ostvario. Označavamo ga s $\overline{A}.$

Događaji A i B iz istog prostora elementarnih događaja Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi:

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Vjerojatnost komplementa

Za svaki događaj A vrijedi

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Unija n događaja je događaj

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n$$

koji se ostvaruje ako se ostvario barem jedan od događaja $A_1, A_2, A_3, ..., A_n.$

De Morganovi zakoni:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad , \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Ako su događaji A_1, A_2, A_3 nezavisni, onda vrijedi:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3)).$$

Napišimo događaje:

$$A_1 = \{ prvi \ strijelac \ je \ pogodio \ metu \} \Rightarrow P(A_1) = \frac{4}{5}$$

$$A_2 = \{ drugi \ strijelac \ je \ pogodio \ metu \} \Rightarrow P(A_2) = \frac{7}{10}$$

$$A_3 = \{ treći \ strijelac \ je \ pogodio \ metu \} \Rightarrow P(A_3) = \frac{9}{10}$$

$$A = \{ bar \ jedan \ strijelac \ je \ pogodio \ metu \}.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) =$$

$$= 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot (1 - P(A_3)) = 1 - \left(1 - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right) \cdot \left(1 - \frac{9}{10}\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{1} - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{7}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{9}{10}\right) = 1 - \frac{5-4}{5} \cdot \frac{10-7}{10} \cdot \frac{10-9}{10} = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} = 1 - \frac{3}{500} =$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{3}{500}=\frac{500-3}{500}=\frac{497}{500}=0.986.$$

Vježba 196

Učenik sudjeluje na natjecanju iz matematike, informatike i ekologije. Vjerojatnost osvajanja prve nagrade na svakom od natjecanja je 0.4. Odredi vjerojatnost da učenik osvoji prvu nagradu bar iz jednog predmeta.

Rezultat: 0.784.

Zadatak 197 (Željko, srednja škola)

U nekoj školi 40% učenika je odlučilo pisati maturalni ispit iz kemije. Od onih koji su izabrali kemiju 70% je izabralo i biologiju, dok je od onih koji nisu izabrali kemiju 50% izabralo biologiju. Kolika je vjerojatnost da je nasumce izabran učenik izabrao biologiju na maturi?

$A.\ 1 \qquad B.\ 0.58 \qquad C.\ 0.48 \qquad D.\ 0.2$

Rješenje 197

Ponovimo!

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% =\frac{9}{100}$, $81\ \% =\frac{81}{100}$, $4.5\ \% =\frac{4.5}{100}$, $0.3\ \% =\frac{0.3}{100}$, $p\ \% =\frac{p}{100}$.

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100}\cdot x.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Neka je x broj učenika škole. Od njih je 40% odlučilo pisati maturalni ispit iz kemije pa je to

$$\frac{40}{100}\cdot x=0.4\cdot x.$$

Među tim učenicima je 70% izabralo i biologiju što iznosi:

$$\frac{70}{100}\cdot 0.4\cdot x=0.7\cdot 0.4\cdot x=0.28\cdot x.$$

Ako je 40% učenika škole pisalo maturalni ispit iz kemije, njih 60% to nije učinilo što iznosi:

$$\frac{60}{100}\cdot x=0.6\cdot x.$$

Među tim učenicima je 50% izabralo biologiju pa je to

$$\frac{50}{100}\cdot 0.6\cdot x=0.5\cdot 0.6\cdot x=0.3\cdot x.$$

Ukupan broj učenika koji su izabrali biologiju iznosi:

$$0.28\cdot x+0.3\cdot x=0.58\cdot x.$$

Računamo vjerojatnost da je nasumce izabrani učenik izabrao biologiju na maturi.
Neka je Ω prostor elementarnih događaja:

$$\Omega=\left\{\text{svi učenici škole}\right\}\ \Rightarrow\ n=x.$$

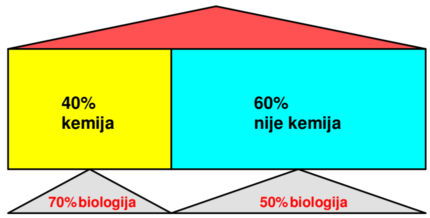
Neka je događaj

$$A=\left\{\text{učenici koji su izabrali biologiju}\right\}\ \Rightarrow\ m=0.58\cdot x.$$

Tada je:

$$P(A)=\frac{m}{n} \Rightarrow P(A)=\frac{0.58\cdot x}{x} \Rightarrow P(A)=\frac{0.58\cdot x}{x} \Rightarrow P(A)=0.58.$$

Odgovor je pod B.



Vježba 197

U nekoj školi 40% učenika je odlučilo pisati maturalni ispit iz kemije. Od onih koji su izabrali kemiju 70% je izabralo i biologiju, dok je od onih koji nisu izabrali kemiju 60% izabralo biologiju. Kolika je vjerojatnost da je nasumce izabran učenik izabrao biologiju na maturi?

A. 0.64 *B.* 0.66 *C.* 0.57 *D.* 0.55

Rezultat: A.

Zadatak 198 (Zvone, srednja škola)

Strijelac pogađa metu s vjerojatnošću od 0.82. Ako strijelac gađa metu 3 puta odredi vjerojatnost da će metu pogoditi barem jedanput.

Rješenje 198

Ponovimo!

Vjerojatnost barem jedanput

Ako obavimo n nezavisnih pokusa, a kod svakog pokusa je vjerojatnost da nastupi događaj A jednaka p, onda je vjerojatnost da događaj A nastupi bar jednom jednaka

$$P(A)=1-(1-p)^n.$$

Neka je događaj

$$A=\{\text{ strijelac pogađa metu barem jednom }\}.$$

Vjerojatnost da jednim hicem pogodi metu iznosi:

$$p = 0.82.$$

Strijelac gađa metu 3 puta, n = 3. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} p=0.82 \ , \ n=3 \\ P(A)=1-(1-p)^n \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=1-(1-0.82)^3 \Rightarrow P(A)=1-0.18^3 \Rightarrow P(A)=0.994.$$

Vježba 198

Strijelac pogađa metu s vjerojatnošću od 0.82. Ako strijelac gađa metu 4 puta odredi vjerojatnost da će metu pogoditi barem jedanput.

Rezultat: 0.999.

Zadatak 199 (Zvone, srednja škola)

Strijelac pogađa metu s vjerojatnošću od 0.82. Ako strijelac gađa metu 3 puta odredi vjerojatnost da će metu pogoditi točno jedanput.

Rješenje 199

Ponovimo!

Binomni koeficijent je broj koji se označava s $\binom{n}{r}$ i definira ovako:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \quad \text{ili} \quad \binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r},$$

gdje su $n, r \in N_0$, $0 \le r \le n$.

$$a^1 = a \quad , \quad \binom{n}{1} = n.$$

Vjerojatnost da se pri ponavljanju pokusa n puta događaj A pojavi k puta jednaka je

$$p(A_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

gdje je p = p(A). Neka je događaj

$$A_1 = \{ \text{strijelac pogađa metu točno jednom} \}.$$

Vjerojatnost da jednim hicem pogodi metu iznosi:

$$p = 0.82.$$

Strijelac gađa metu 3 puta, n = 3. Tada je:

$$\left. \begin{array}{l} p = 0.82 \ , \ n = 3 \ , \ k = 1 \\ p(A_k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \end{array} \right\} \Rightarrow p(A_1) = \binom{3}{1} \cdot 0.82^1 \cdot (1-0.82)^{3-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(A_1) = 3 \cdot 0.82 \cdot 0.18^2 \Rightarrow p(A_1) = 0.08.$$

Vježba 199

Strijelac pogađa metu s vjerojatnošću od 0.82. Ako strijelac gađa metu 4 puta odredi vjerojatnost da će metu pogoditi točno jedanput.

Rezultat: 0.019.

Zadatak 200 (Zvone, srednja škola)

Vjerojatnost pogotka u metu za tri lovca iznosi redom 0.8, 0.6 i 0.45. Lovci svaki s po jednim metkom gađaju u metu. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena?

Rješenje 200

Ponovimo!

Funkcija $P : P(\Omega) \to R$ zove se vjerojatnost na familiji događaja P(Ω) ako ima ova svojstva:

1. Za svaki događaj A vrijedi $P(A) \ge 0$.
2. P(Ω) = 1.
3. Ako se događaji $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ isključuju u parovima, tj.

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{ za } i \ne j, \ i, \ j = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

onda vrijedi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n).$$

Svaki skup $A \subset \Omega$ zove se događaj, a broj P(A) zove se vjerojatnost od A.
Ako su A, B i C bilo kakvi događaji, onda vrijedi:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Događaji A i B iz istog prostora Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Neka je događaj

$$A_k = \{ k - \text{ti lovac pogodio je metu} \}.$$

Tada je:

$$P(A_1) = 0.8 \;,\; P(A_2) = 0.6 \;,\; P(A_3) = 0.45.$$

Neka je događaj

$$A_i \cap A_j = \{ \text{oba lovca } i - \text{ti i } j - \text{ti pogodili su metu} \}.$$

Tada je:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48 \;,\; P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3) = 0.8 \cdot 0.45 = 0.36,$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.6 \cdot 0.45 = 0.27.$$

Neka je događaj

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{ \text{sva tri lovca pogodili su metu} \}.$$

Tada je:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.45 = 0.216.$$

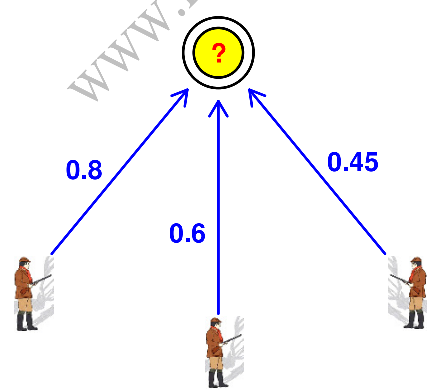
Uporabom formule

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

dobije se:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= 0.8 + 0.6 + 0.45 - 0.48 - 0.36 - 0.27 + 0.216 = 0.956.$$



Vježba 200

Vjerojatnost pogotka u metu za tri lovca iznosi redom 0.2, 0.3 i 0.4. Lovci svaki s po jednim metkom gađaju u metu. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena?

Rezultat: 0.664.