Zadatak 161 (Ivana, gimnazija)

Dućan nudi 8 modela traperica. Svaki je model u 10 različitih širina, 6 različitih duljina i 5 različitih boja. Koliko različitih traperica možemo u tom dućanu kupiti?

Rješenje 161

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Uporabom načela uzastopnog prebrojavanja računamo broj traperica N.

model	širina	duljina	boja
$n_1 = 8$	$n_2 = 10$	$n_3 = 6$	$n_4 = 5$

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \Rightarrow N = 8 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 5 \Rightarrow N = 2400.$$

Vježba 161

Dućan nudi 4 modela traperica. Svaki je model u 10 različitih širina, 6 različitih duljina i 10 različitih boja. Koliko različitih traperica možemo u tom dućanu kupiti?

Rezultat: 2400.

Zadatak 162 (Miro, gimnazija)

Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji su jednaki ako se čitaju s lijeva na desno i s desna na lijevo?

Rješenje 162

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Tražimo brojeve oblika

$$\overline{abcba}$$

$$a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad , \quad b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Prvu i petu znamenku možemo izabrati na 9 načina:

$$n_1 = 9.$$

Drugu i četvrtu znamenku možemo izabrati na 10 načina:

$$n_2 = 10.$$

Treću znamenku možemo izabrati na 10 načina:

$$n_3 = 10.$$

Ukupno ima brojeva:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \Rightarrow N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow N = 900.$$

Vježba 162

Koliko ima sedmeroznamenkastih brojeva koji su jednaki ako se čitaju s lijeva na desno i s desna na lijevo?

Rezultat: 9000.

Zadatak 163 (Emy, gimnazija)

U kutiji se nalazi 5 crvenih, 4 bijele i 6 plavih kuglica. Istodobno izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući 1 bijelu i 1 plavu kuglicu?

Rješenje 163

Ponovimo!

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

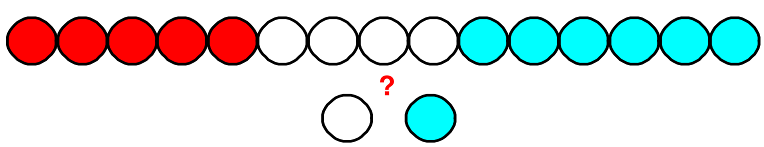
Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$



Neka je A događaj:

$$A = \{\text{izvučena je 1 bijela i 1 plava kuglica}\}.$$

Da bismo postavili ispravan model zamislit ćemo da sve kuglice možemo razlikovati. (Možemo zamisliti da su sve one označene različitim brojevima, od 1 do 15). Dvije kuglice iz skupa od 15 kuglica (5 crvenih + 4 bijele + 6 plavih) možemo odabrati na

$$n = C_{15}^2 = \binom{15}{2}$$

načina.

Jednu bijelu kuglicu između četiri bijele možemo odabrati na

$$C_4^1 = \binom{4}{1} = 4$$

načina, a jednu plavu između šest plavih kuglica možemo odabrati na

$$C_6^1 = \binom{6}{1} = 6$$

načina.
Broj povoljnih ishoda (rezultata) događaja A je

$$m = C_4^1 \cdot C_6^1 \Rightarrow m = \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1}$$

jer jedna kuglica mora biti bijela, a jedna plava. Zato je:

$$P(A) = \frac{m}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{15}{2}} \Rightarrow P(A) = \frac{4 \cdot 6}{\frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}} \Rightarrow P(A) = \frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{15 \cdot 14} \Rightarrow P(A) = \frac{8}{35}.$$

Vježba 163

U kutiji se nalazi 5 crvenih, 4 bijele i 6 plavih kuglica. Istodobno izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući 1 crvenu i 1 plavu kuglicu?

Rezultat: $\frac{2}{7}.$

Zadatak 164 (Emy, gimnazija)

U kutiji se nalazi 5 crvenih, 4 bijele i 6 plavih kuglica. Istodobno izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da ne ćemo izvući niti jednu crvenu kuglicu?

Rješenje 164

Ponovimo!

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Načelo uzastopnog prebrojavanja:
Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

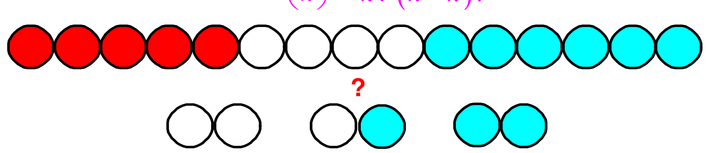
$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.
Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$



Neka je A događaj:

$$A = \{\text{ od dvije nije izvučena niti jedna crvena kuglica }\}.$$

Da bismo postavili ispravan model zamislit ćemo da sve kuglice možemo razlikovati. (Možemo zamisliti da su sve one označene različitim brojevima, od 1 do 15). Dvije kuglice iz skupa od 15 kuglica (5 crvenih + 4 bijele + 6 plavih) možemo odabrati na

$$n = C_{15}^{2} = \binom{15}{2}$$

načina.

Budući da izvučene kuglice ne smiju biti crvene, postoji 10 kuglica (4 bijele + 6 plavih) između kojih moramo odabrati 2 kuglice pa je broj povoljnih ishoda događaja A jednak:

$$m = C_{10}^{2} = \binom{10}{2}.$$

Zato je:

$$P(A) = \frac{m}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}}{\frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}}{\frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2}} \Rightarrow P(A) = \frac{10 \cdot 9}{15 \cdot 14} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{7}.$$

Vježba 164

U kutiji se nalazi 5 crvenih, 4 bijele i 6 plavih kuglica. Istodobno izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da ne ćemo izvući niti jednu bijelu kuglicu?

Rezultat: $\frac{11}{21}.$

Zadatak 165 (Emy, gimnazija)

U kutiji se nalazi 5 crvenih, 4 bijele i 6 plavih kuglica. Istodobno izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući dvije kuglice jednakih boja?

Rješenje 165

Ponovimo!

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

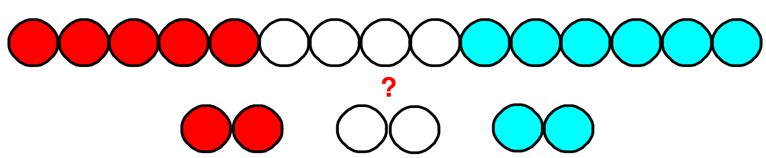
$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Ako su A, B i C disjunktni događaji, onda je

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Svaki podskup od k (različitih) elemenata skupa S nazivamo kombinacijom u skupu S. Broj različitih kombinacija je

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$



Neka su A, B i C događaji:

$$A = \{\text{ izvučene su 2 crvene kuglice }\},$$

$$B = \{\text{ izvučene su 2 bijele kuglice }\},$$

$$C = \{\text{ izvučene su 2 plave kuglice }\}.$$

Da bismo postavili ispravan model zamislit ćemo da sve kuglice možemo razlikovati. (Možemo zamisliti da su sve one označene različitim brojevima, od 1 do 15). Dvije kuglice iz skupa od 15 kuglica (5 crvenih + 4 bijele + 6 plavih) možemo odabrati na

$$n = C_{15}^{2} = \binom{15}{2}$$

načina.
Dvije crvene kuglice između pet crvenih kuglica možemo odabrati na

$$m_A = C_5^2 = \binom{5}{2}$$

načina. Vjerojatnost događaja A iznosi:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}}.$$

Dvije bijele kuglice između četiri kuglice možemo odabrati na

$$m_B = C_4^2 = \binom{4}{2}$$

načina. Vjerojatnost događaja B iznosi:

$$P(B) = \frac{m_B}{n} \Rightarrow P(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{15}{2}}.$$

Dvije plave kuglice između šest plavih kuglica možemo odabrati na

$$m_C = C_6^2 = \binom{6}{2}$$

načina. Vjerojatnost događaja C iznosi:

$$P(C) = \frac{m_C}{n} \Rightarrow P(C) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{15}{2}}.$$

Budući da su A, B i C nezavisni događaji, vjerojatnost da ćemo izvući dvije kuglice jednakih boja iznosi:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}}{\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}} + \frac{\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}}{\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}} + \frac{\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}}{\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}} =$$

$$= \frac{\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}}{\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}} + \frac{\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}}{\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}} + \frac{\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}}{\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}} = \frac{5\cdot 4}{15\cdot 14} + \frac{4\cdot 3}{15\cdot 14} + \frac{6\cdot 5}{15\cdot 14} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 7} + \frac{2\cdot 1}{5\cdot 7} + \frac{1\cdot 1}{1\cdot 7} = \frac{2}{21} + \frac{2}{35} + \frac{1}{7} = \frac{10+6+15}{105} = \frac{31}{105}.$$

Vježba 165

U kutiji se nalazi 4 crvene, 5 bijelih i 6 plavih kuglica. Istodobno izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući dvije kuglice jednakih boja?

Rezultat: $\frac{31}{105}.$

Zadatak 166 (Emy, gimnazija)

Dva strijelca istodobno gađaju metu sa po jednim hicem. Vjerojatnost da prvi strijelac pogodi metu je 0.7, a vjerojatnost da drugi strijelac pogodi metu je 0.4. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena?

Rješenje 166

Ponovimo!

Za bilo koja dva događaja A i B vrijedi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Nuždan i dovoljan uvjet za nezavisne događaje A i B jest da bude:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Vjerojatnost da će meta biti pogođena iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0.7 + 0.4 - 0.7 \cdot 0.4 = 0.82.$$

Vježba 166

Dva strijelca istodobno gađaju metu sa po jednim hicem. Vjerojatnost da prvi strijelac pogodi metu je 0.6, a vjerojatnost da drugi strijelac pogodi metu je 0.4. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena?

Rezultat: 0.76.

Zadatak 167 (4A, TUPŠ)

U knjižnici je pet knjiga: jedna s crvenim, dvije s plavim, jedna s crnim uvezom i jedna neuvezana knjiga. Na koliko načina (s obzirom na boju uveza) možemo poredati pazeći pri tome da neuvezana knjiga ne bude na kraju?

Rješenje 167

Ponovimo!

Načelo uzastopnog prebrojavanja:

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Načelo obično iskazujemo u slobodnijoj formi ovim riječima: Ako se prvi dio posla može učiniti na n_1 načina, drugi dio posla na n_2 načina, …, posljednji na n_k načina, onda se cijeli posao može učiniti na

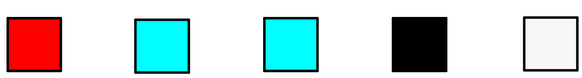
$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

načina.

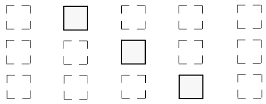
Ako je zadano n elemenata, a jedan element se ponavlja r puta (r < n), tada se permutacije s ponavljanjem računaju po formuli:

$$P_n^r = \frac{n!}{r!}.$$

1.inačica



Budući da neuvezana knjiga ne smije biti na kraju, moramo je staviti ili na drugo ili na treće ili na četvrto mjesti u nizu.



Neuvezanu knjigu možemo, dakle, razmjestiti na

$$n_1 = 3$$

načina.

Preostale četiri knjige, među kojima su dvije iste boje uveza, možemo poredati na

$$n_2 = P_4^{2} = \frac{4\,!}{2\,!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!} = 12$$

načina.

Broj načina na koji možemo razmjestiti knjige (s obzirom na boju uveza) pazeći pri tome da neuvezana knjiga ne bude na kraju, iznosi:

$$N = n_1 \cdot n_2 = 3\cdot 12 = 36.$$

2.inačica

Pet knjiga, pri čemu dvije knjige imaju istu boju uveza, možemo rasporediti na

$$P_5^{2} = \frac{5\,!}{2\,!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2!} = 60$$

načina.

Četiri knjige, pri čemu dvije knjige imaju istu boju uveza, možemo rasporediti na

$$P_4^{2} = \frac{4\,!}{2\,!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!} = 12$$

načina.

Knjige moramo rasporediti (s obzirom na boju uveza) pazeći pri tome da neuvezana knjiga ne bude na kraju niza. Zato moramo oduzeti rasporede knjiga gdje je neuvezana na početku ili na kraju niza:

$$P_5^{2} - 2\cdot P_4^{2} = \frac{5\,!}{2\,!} - 2\cdot\frac{4\,!}{2\,!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2!} - 2\cdot\frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!} = 60 - 24 = 36.$$

Vježba 167

Na polici u školskoj knjižnici nalaze se jedna zbirka zadataka za 1. razred, dvije zbirke za 2. razred, jedna zbirka za 3. razred, tri zbirke za 4. razred i jedna zbirka bez korica. Na koliko načina možemo poredati navedene knjige pazeći da knjiga bez korica ne bude s kraja?

Rezultat: $6\cdot P_7^{2,\,3} = 6\cdot\frac{7\,!}{2\,!\cdot 3\,!} = 2\,520$ ili $P_8^{2,\,3} - 2\cdot P_7^{2,\,3} = \frac{8\,!}{2\,!\cdot 3\,!} - 2\cdot\frac{7\,!}{2\,!\cdot 3\,!} = 2\,520.$

Zadatak 168 (4A, TUPŠ)

Uz pretpostavku da na tipkovnici računala ima 100 međusobno različitih znakova, kolika je vjerojatnost da će dijete, igrajući se, otipkati baš riječ ja?

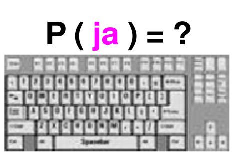
Rješenje 168

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m} = a^{n+m}.$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$



Događaji A i B iz istog prostora elementarnih događaja Ω su nezavisni onda i samo onda ako vrijedi:

$$P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B).$$

Neka je Ω prostor elementarnih događaja:

$$\Omega = \{\text{ima 100 međusobno različitih znakova na tipkovnici}\} \Rightarrow n = 100.$$

Neka je događaj

$$A = \{\text{ otipkano je slovo j }\} \ , \ m = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{m}{n} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{100}.$$

$$B = \{\text{ otipkano je slovo a }\} \ , \ m = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{m}{n} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{100}.$$

Budući da su događaji A i B nezavisni, računamo vjerojatnost događaja $A \cap B$:

$$A \cap B = \{\text{ otipkano je slovo j i slovo a }\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} \Rightarrow P(A \cap B) = 10^{-2} \cdot 10^{-2} \Rightarrow P(A \cap B) = 10^{-4}.$$

Vježba 168

Uz pretpostavku da na tipkovnici računala ima 100 međusobno različitih znakova, kolika je vjerojatnost da će dijete, igrajući se, otipkati baš riječ bar?

Rezultat: 10^{-6}.

Zadatak 169 (4A, TUPŠ)

Učenik sudjeluje na natjecanju iz matematike, informatike i ekologije. Vjerojatnost osvajanja prve nagrade na svakom od natjecanja je 0.4. Odredi vjerojatnost da učenik osvoji prvu nagradu bar iz jednog predmeta.

Rješenje 169

Ponovimo!

Vjerojatnost barem jedanput

Ako obavimo n nezavisnih pokusa, a kod svakog pokusa je vjerojatnost da nastupi događaj A jednaka p, onda je vjerojatnost da događaj A nastupi bar jednom jednaka

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$$

Primijeti:
događaj

$$A = \{\text{ nastupi bar jednom }\}$$

suprotan je događaju

$$\overline{A} = \{\text{ ne nastupi ni jednom }\}.$$

Vjerojatnost osvajanja prve nagrade na svakom natjecanju iznosi:

$$p = 0.4.$$

Vjerojatnost da učenik osvoji prvu nagradu bar iz jednog (od tri moguća) predmeta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} p = 0.4 \ , \ n = 3 \\ P(A) = 1 - (1 - p)^n \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = 1 - (1 - 0.4)^3 \Rightarrow P(A) = 1 - 0.6^3 \Rightarrow P(A) = 0.784.$$

Vježba 169

Učenik sudjeluje na natjecanju iz matematike, informatike i ekologije. Vjerojatnost osvajanja prve nagrade na svakom od natjecanja je 0.5. Odredi vjerojatnost da učenik osvoji prvu nagradu bar iz jednog predmeta.

Rezultat: 0.875.

Zadatak 170 (4A, TUPŠ)

U televizijskom studiju postavljene su tri televizijske kamere. Vjerojatnost da je kamera uključena iznosi za svaku kameru 0.6. Odredi vjerojatnost da je u danom trenutku uključena bar jedna kamera.

Rješenje 170

Ponovimo!

Vjerojatnost barem jedanput

Ako obavimo n nezavisnih pokusa, a kod svakog pokusa je vjerojatnost da nastupi događaj A jednaka p, onda je vjerojatnost da događaj A nastupi bar jednom jednaka

$$P(A)=1-(1-p)^{n}.$$

Primijeti:

događaj

$$A=\{\text{ nastupi bar jednom }\}$$

suprotan je događaju

$$\overline{A}=\{\text{ ne nastupi ni jednom }\}.$$

Vjerojatnost da je kamera uključena iznosi:

$$p=0.6.$$

Vjerojatnost da je u danom trenutku uključena (od tri moguće) bar jedna kamera iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} p=0.6\ ,\ n=3 \\ P(A)=1-(1-p)^{n} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)=1-(1-0.6)^{3} \Rightarrow P(A)=1-0.4^{3} \Rightarrow P(A)=0.936.$$

Vježba 170

U televizijskom studiju postavljene su četiri televizijske kamere. Vjerojatnost da je kamera uključena iznosi za svaku kameru 0.6. Odredi vjerojatnost da je u danom trenutku uključena bar jedna kamera.

Rezultat: 0.9744.

Zadatak 171 (Ivana-Lili, komercijalna škola)

Vjerojatnost da će kandidat proći na audiciji je 0.57. Kolika je vjerojatnost da će od 6 kandidata proći njih četvorica?

Rješenje 171

Ponovimo!

Ako obavimo n nezavisnih pokusa tada vjerojatnost da se događaj A ostvari k puta, ako je njegova vjerojatnost pojavljivanja u pokusu jednaka p, iznosi

$$p(A)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Kandidata ima 6 pa je n = 6.

Vjerojatnost da će kandidat proći na audiciji iznosi p = 0.57.

Budući da trebaju proći njih četvorica, pišemo k = 4.

Tada je

$$p(A)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}=\binom{6}{4}\cdot 0.57^{4}\cdot(1-0.57)^{2}=\binom{6}{4}\cdot 0.57^{4}\cdot 0.43^{2}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot 0.57^{4}\cdot 0.43^{2}=$$

$$=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot 0.57^{4}\cdot 0.43^{2}=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot 0.57^{4}\cdot 0.43^{2}=15\cdot 0.57^{4}\cdot 0.43^{2}=$$  $$=0.2928.$$

Vježba 171

Vjerojatnost da će kandidat proći na audiciji je 0.5. Kolika je vjerojatnost da će od 6 kandidata proći njih četvorica?

Rezultat: 0.2344.

Zadatak 172 (Ivana-Lili, komercijalna škola)

Vjerojatnost da će kandidat proći na audiciji je 0.57. Kolika je vjerojatnost da će od 6 kandidata proći barem jedan?

Rješenje 172

Ponovimo!

Vjerojatnost barem jedanput

Ako obavimo n nezavisnih pokusa, a kod svakog pokusa je vjerojatnost da nastupi događaj A jednaka p, onda je vjerojatnost da događaj A nastupi bar jednom jednaka

$$P(A) = 1 - (1 - p)^{n}.$$

Neka je A događaj:

$$A = \{\text{ kandidat će proći na audiciji }\}.$$

Vjerojatnost da će kandidat proći na audiciji je p = 0.57. Tada vjerojatnost da će od 6 kandidata proći barem jedan iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} p = 0.57 \quad , \quad n = 6 \\ P(A) = 1 - (1 - p)^{n} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = 1 - (1 - 0.57)^{6} \Rightarrow P(A) = 1 - 0.43^{6} \Rightarrow P(A) = 0.9937.$$

Vježba 172

Vjerojatnost da će kandidat proći na audiciji je 0.57. Kolika je vjerojatnost da će od 4 kandidata proći barem jedan?

Rezultat: 0.9658.

Zadatak 173 (Tony, student)

Zadan je sljedeći niz brojeva: 2, 2, 2, 4, 4, 5, 6, 5, 2, 6, 3, 1, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 1, 3.

a) Odredi razrede.
b) Sastavi tabelu frekvencija.
c) Grafički prikaži tabelu frekvencija.
d) Sastavi tabelu relativnih frekvencija.
e) Sastavi tabelu frekvencija s kumulativnom funkcijom.
f) Nacrtaj graf kumulativne funkcije.

Rješenje 173

a)

Zadan je skup od n brojeva: $\{ y_1, y_2, y_3, ..., y_n \}$. Pretpostavimo da među njima ima jednakih. Neka se:

broj x_1 pojavljuje f_1 puta,
broj x_2 pojavljuje f_2 puta,
broj x_3 pojavljuje f_3 puta,
....
broj x_r pojavljuje f_r puta,

pri čemu su brojevi x_1, x_2, x_3, ..., x_r međusobno različiti. Oni predstavljaju razrede i obično su poredani u uzlaznom nizu:

$$x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_r.$$

Brojevi f_1, f_2, f_3, ..., f_r zovu se frekvencije.

2, 2, 2, 4, 4, 5, 6, 5, 2, 6, 3, 1, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 1, 3.

Zadanih brojeva ima 20:

n = 20.

Prebrojavanjem ustanovljujemo da su razredi 1, 2, 3, 4, 5, 6.

b) Tabela frekvencija izgleda ovako:

x	x_1	x_2	x_3 ... x_r
f	f_1	f_2	f_3 ... f_r

Uočimo da je:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + ... + f_r = n.$$

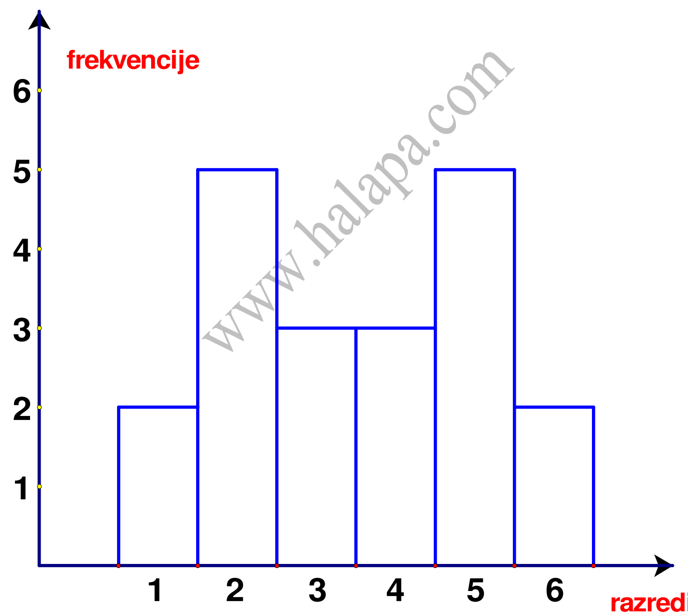
2, 2, 2, 4, 4, 5, 6, 5, 2, 6, 3, 1, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 1, 3.

Prebrojavanjem ustanovljujemo da su razredi 1, 2, 3, 4, 5, 6 pri čemu se
broj 1 pojavljuje dva puta,
broj 2 pojavljuje pet puta,
broj 3 pojavljuje tri puta,
broj 4 pojavljuje tri puta,
broj 5 pojavljuje pet puta,
broj 6 pojavljuje dva puta.

Pripadna tabela frekvencija izgleda ovako:

x	1	2	3	4	5	6
f	2	5	3	3	5	2

c) Grafički prikazujemo tabelu frekvencija. Grafički prikaz zove se histogram. Frekvencija svakog podatka (razreda) predstavljena je pravokutnikom čija je visina upravo jednaka toj frekvenciji.



d) Relativne frekvencije (rf) su frekvencije podijeljenje brojem n, ukupnim brojem elemenata. Tabela relativnih frekvencija ima oblik:

x	x_1	x_2	x_3 ... x_r
f	f_1	f_2	f_3 ... f_r
rf	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{f_3}{n}$ ... $\frac{f_r}{n}$

2, 2, 2, 4, 4, 5, 6, 5, 2, 6, 3, 1, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 1, 3.

Zadanih brojeva ima 20:

$$n = 20.$$

Pripadna tabela relativnih frekvencija izgleda ovako:

x	1	2	3	4	5	6
f	2	5	3	3	5	2
rf	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$

ili ovako:

x	1	2	3	4	5	6
f	2	5	3	3	5	2
rf	0.10	0.25	0.15	0.15	0.25	0.10

e) Kumulativna funkcija sastoji se od parcijalnih (djelomičnih) suma relativnih frekvencija. Tabela kumulativne funkcije (cf) je oblika:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_r
f	f_1	f_2	f_3	...	f_r
rf	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{f_3}{n}$	...	$\frac{f_r}{n}$
cf	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_1}{n}+\frac{f_2}{n}$	$\frac{f_1}{n}+\frac{f_2}{n}+\frac{f_3}{n}$	...	$\frac{f_1}{n}+\frac{f_2}{n}+\frac{f_3}{n}+\frac{f_4}{n}+\ldots+\frac{f_r}{n}$

Uočimo da zadnji broj u retku kumulativne funkcije mora biti točno 1 jer je to zbroj svih relativnih frekvencija:

$$\frac{f_1}{n}+\frac{f_2}{n}+\frac{f_3}{n}+\ldots+\frac{f_r}{n}=\frac{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_r}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

Pripadna tabela kumulativne funkcije izgleda ovako:

x	1	2	3	4	5	6
f	2	5	3	3	5	2
rf	0.10	0.25	0.15	0.15	0.25	0.10
cf	0.10	0.35	0.50	0.65	0.90	1

Označimo k–ti broj u retku kumulativne funkcije slovom φ_k, tj.

$$\varphi_k=\frac{f_1}{n}+\frac{f_2}{n}+\frac{f_3}{n}+\frac{f_4}{n}+\ldots+\frac{f_k}{n}.$$

Kumulativna funkcija je funkcija

$$cf : R \to R$$

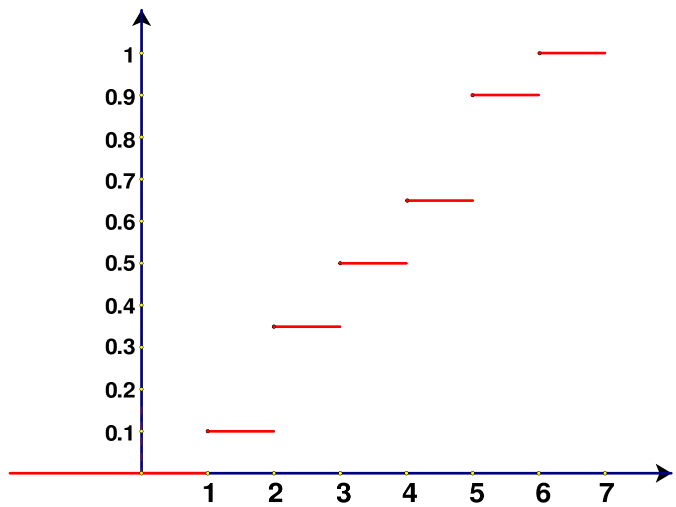
koja je određena vrijednostima u zadnjem retku tabele frekvencija

x	x_1	x_2	x_3	...	x_r
f	f_1	f_2	f_3	...	f_r
rf	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_2}{n}$	$\frac{f_3}{n}$	...	$\frac{f_r}{n}$
cf	$\frac{f_1}{n}$	$\frac{f_1}{n}+\frac{f_2}{n}$	$\frac{f_1}{n}+\frac{f_2}{n}+\frac{f_3}{n}$	...	$\frac{f_1}{n}+\frac{f_2}{n}+\frac{f_3}{n}+\frac{f_4}{n}+\ldots+\frac{f_r}{n}$

ovako:

$$cf(x)=\begin{cases} 0 & \text{ako je } x < x_1 \\ \varphi_k & \text{ako je } x_k \le x < x_{k+1} \\ 1 & \text{ako je } x \ge x_r \end{cases}$$

f) Graf kumulativne funkcije u našem zadatku ima oblik:



Vježba 173

Zadan je sljedeći niz brojeva: 6, 4, 4, 1, 6, 2, 6, 4, 5, 6, 4, 2, 3, 5, 5, 2, 2, 1, 4, 5.

a) Odredi razrede.

b) Sastavi tabelu frekvencija.

Rezultat: Razredi : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tabela frekvencija :

x	1	2	3	4	5	6
f	2	4	1	5	4	4

Zadatak 174 (Martina, hotelijerska škola)

Izračunaj aritmetičku sredinu brojeva danih u tabeli frekvencija :

x	1	2	3	4	5	6
f	2	4	1	5	4	4

Rješenje 174

Ponovimo!

Ako su poznate frekvencije danih brojeva

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
f	f_1	f_2	f_3	f_4	...	f_n

onda se aritmetička sredina računa po formuli:

$$\bar{x}=\frac{f_1\cdot x_1+f_2\cdot x_2+f_3\cdot x_3+f_4\cdot x_4+\ \ldots\ +f_n\cdot x_n}{f_1+f_2+f_3+f_4+\ \ldots\ +f_n}.$$

Aritmetička sredina brojeva danih u tabeli frekvencija

x	1	2	3	4	5	6
f	2	4	1	5	4	4

iznosi:

$$\bar{x}=\frac{2\cdot 1+4\cdot 2+1\cdot 3+5\cdot 4+4\cdot 5+4\cdot 6}{2+4+1+5+4+4}=\frac{2+8+3+20+20+24}{20}=\frac{77}{20}=3.85.$$

Vježba 174

Izračunaj aritmetičku sredinu brojeva danih u tabeli frekvencija:

x	1	2	3	4	5	6
f	3	4	1	5	3	4

Rezultat: 3.65.

Zadatak 175 (Martina, hotelijerska škola)

Odredite modove sljedećih nizova:

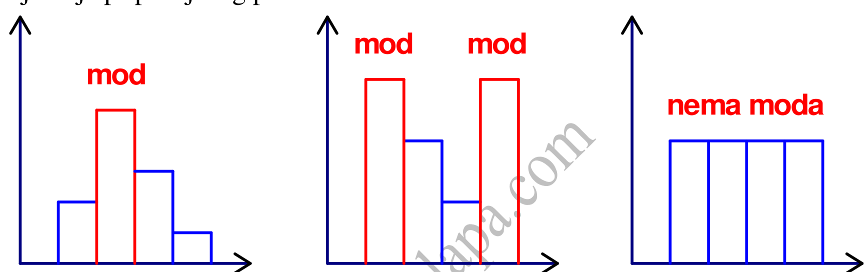
a) 2, 3, 3, 5, 8, 8, 8, 8, 9
b) 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
c) 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 9
d) 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7.

Rješenje 175

Ponovimo!

Zadan je niz brojeva: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Mod je onaj podatak u tom nizu koji se najčešće pojavljuje i to barem dvaput. Niz brojeva može imati jedan mod, više modova ili niti jedan mod.

U histogramu je mod određen najvišim pravokutnikom jer visina pravokutnika je proporcionalna s brojem pojavljivanja pripadajućeg podatka.



a) Niz brojeva 2, 3, 3, 5, 8, 8, 8, 8, 9 ima jedinstveni mod 8.
b) Niz brojeva 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 nema moda.
c) Niz brojeva 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 9 ima dva moda: 4 i 8.
d) Niz brojeva 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 7 ima tri moda: 2, 4 i 6.

Vježba 175

Odredite mod sljedećeg niza 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9.

Rezultat: Dva moda: 2 i 7.

Zadatak 176 (Ivan, srednja škola)

Zadani su brojevi $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = 10$, $x_4 = 12$. Nađi standardnu devijaciju.

Rješenje 176

Ponovimo!

Aritmetička sredina

Neka je zadano n brojeva $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Njihova aritmetička sredina, u oznaci $\bar{x}$, definira se formulom:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ ... \ + x_n}{n}.$$

Kvadratno odstupanje v_i podatka x_i od aritmetičke sredine $\bar{x}$ definira se sa

$$v_i = \left(x_i - \bar{x}\right)^2.$$

Varijanca (ili srednje kvadratno odstupanje) je aritmetička sredina svih kvadratnih odstupanja. Oznaka varijance je σ^2:

$$\sigma^2=\frac{v_1+v_2+v_3+\ \dots\ +v_n}{n}\quad \text{ili}\quad \sigma^2=\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\left(x_3-\overline{x}\right)^2+\ \dots\ +\left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n}.$$

Standardna devijacija σ je jednaka drugom korijenu varijance:

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}\quad \text{ili}\quad \sigma=\sqrt{\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\left(x_3-\overline{x}\right)^2+\ \dots\ +\left(x_n-\overline{x}\right)^2}{n}}.$$

Izračunamo aritmetičku sredinu:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=6\ ,\ x_2=8\ ,\ x_3=10\ ,\ x_4=12 \\ \overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \overline{x}=\frac{6+8+10+12}{4}\ \Rightarrow\ \overline{x}=\frac{36}{4}\ \Rightarrow\ \overline{x}=9.$$

Standardna devijacija iznosi:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\left(x_3-\overline{x}\right)^2+\left(x_4-\overline{x}\right)^2}{4}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sigma=\sqrt{\frac{(6-9)^2+(8-9)^2+(10-9)^2+(12-9)^2}{4}}\ \Rightarrow\ \sigma=\sqrt{\frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sigma=\sqrt{\frac{9+1+1+9}{4}}\ \Rightarrow\ \sigma=\sqrt{\frac{20}{4}}\ \Rightarrow\ \sigma=\sqrt{5}\ \Rightarrow\ \sigma=2.236.$$

Vježba 176

Zadani su brojevi $x_1 = 10$, $x_2 = 6$, $x_3 = 6$, $x_4 = 6$. Nađi standardnu devijaciju.

Rezultat: 1.73.

Zadatak 177 (Domagoj, maturant gimnazije)

U binomnom razvoju $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ koeficijent trećeg člana razvoja veći je od koeficijenta drugog člana za 35. Nađi član razvoja koji ne sadrži x.

Rješenje 177

Ponovimo!

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^0=1\quad,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Kako zapisati da je broj a veći od broja b za n?
Postoje tri načina:

$$a=b+n\quad \text{ili}\quad a-n=b\quad \text{ili}\quad a-b=n.$$

Binomni koeficijent
Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i $k \le n$. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\quad \text{ili}\quad \binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \dots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot k}.$$

Uočimo da za k = 0 i k = 1 dobivamo

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{1}=n.$$

Binomni poučak
Za svaki $a, b \in R, n \in N$ vrijedi

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n.$$

Uočimo da k-ti član glasi:

$$\binom{n}{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^{k-1}.$$

Budući da je u zadanom binomnom razvoju koeficijent trećeg člana razvoja veći od koeficijenta drugog člana za 35, slijedi jednadžba:

$$\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+35 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}=n+35 \Rightarrow \frac{n^2-n}{2}=n+35 \ /\cdot 2 \Rightarrow n^2-n=2\cdot n+70 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2-n-2\cdot n-70=0 \Rightarrow n^2-3\cdot n-70=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n^2-3\cdot n-70=0 \\ a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-70 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-70 \\ n_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot(-70)}}{2\cdot 1} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+280}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{289}}{2} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{3\pm 17}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=\dfrac{3+17}{2} \\ n_2=\dfrac{3-17}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=\dfrac{20}{2} \\ n_2=\dfrac{-14}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=10 \\ n_2=-7 \ \text{nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow n=10.$$

Znači da tražimo član razvoja

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$$

koji ne sadrži x.
Dakle, radi se o binomu

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$$

sa općim članom

$$\binom{10}{k}\cdot x^{10-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=\binom{10}{k}\cdot x^{10-k}\cdot x^{-k}=\binom{10}{k}\cdot x^{10-k-k}=\binom{10}{k}\cdot x^{10-2\cdot k}.$$

Kako prema zahtjevu zadatka tražimo član koji ne sadrži x mora eksponent 10 – 2 · k biti jednak nuli. Zato je

$$10-2\cdot k=0 \Rightarrow -2\cdot k=-10 \ /:(-2) \Rightarrow k=5.$$

Traženi član u razvoju je šesti član čija je vrijednost jednaka

$$\binom{10}{5} \cdot x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \binom{10}{5} \cdot x^5 \cdot \frac{1}{x^5} = \binom{10}{5} \cdot x^5 \cdot \frac{1}{x^5} = \binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252.$$

Vježba 177

Odredi onaj član razvoja $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$ koji ne sadrži x.

Rezultat: $\binom{12}{4} = 495.$

Zadatak 178 (Tony, maturant gimnazije)

Koliko puta treba baciti novčić da uz vjerojatnost barem 0.99 pismo padne barem jednom?

Rješenje 178

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a$$

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja A računa se formulom:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda (rezultata)}}{\text{broj mogućih ishoda (rezultata)}}.$$

Vjerojatnost barem jedanput

Ako obavimo n nezavisnih pokusa, a kod svakog pokusa je vjerojatnost da nastupi događaj A jednaka p, onda je vjerojatnost da događaj A nastupi bar jednom jednaka

$P(A) = 1 - (1 - p)^n$.

Vjerojatnost da pri bacanju novčića padne pismo iznosi:

$$p = \frac{1}{2}.$$

Vjerojatnost da pri bacanju novčića n puta pismo padne barem jednom iznosi:

$$P(A) = 1 - (1 - p)^n.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{1}{2} \;,\; P(A) \ge 0.99 \\ P(A) = 1 - (1 - p)^n \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n \ge 0.99 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \ge 0.99 \Rightarrow 1 - 2^{-n} \ge 0.99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2^{-n} \ge 0.99 - 1 \Rightarrow -2^{-n} \ge -0.01 \; / \cdot (-1) \Rightarrow 2^{-n} \le 0.01 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{nejednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-n} \le 0.01 \; / \log \Rightarrow \log 2^{-n} \le \log 0.01 \Rightarrow -n \cdot \log 2 \le \log 0.01 \; / \cdot \frac{-1}{\log 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \ge -\frac{\log 0.01}{\log 2} \Rightarrow n \ge 6.644 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{prvi veći} \\ \text{cijeli broj} \end{array}\right] \Rightarrow n_0 = 7$$

Vježba 178

Koliko puta treba baciti novčić da uz vjerojatnost barem 0.9 pismo padne barem jednom?

Rezultat: 4.

Zadatak 179 (Barbi ☺, gimnazija)

U razvoju binoma $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+x^2\right)^8$ odredi 6. član.

Rješenje 179

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad,\quad\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označava se posebnim simbolom

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ \ldots\ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n$$

ili

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ \ldots\ \cdot3\cdot2\cdot1.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako, na primjer, vrijedi

$$1!=1$$
$$2!=1\cdot2=2$$
$$3!=1\cdot2\cdot3=6$$
$$4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$$
$$5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$$
$$6!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720\ \text{itd.}$$

Posebno se definira

$$0!=1.$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj i k prirodan broj ili 0, k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo izrazom $\binom{n}{k}$ i definiramo ga ovako:

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ \ldots\ (n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ \ldots\ \cdot(k-1)\cdot k}$$

ili

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Za binomni koeficijent vrijedi:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Na primjer,

$$\binom{8}{5}=\binom{8}{3}\quad,\quad\binom{8}{7}=\binom{8}{1}\quad,\quad\binom{5}{3}=\binom{5}{2}\quad,\quad\binom{7}{4}=\binom{7}{3}\quad,\quad\binom{9}{7}=\binom{9}{2}\quad,\quad\binom{9}{6}=\binom{9}{3}.$$

Binomni poučak

Za svaki $a, b\in R$, $n\in N$ vrijedi

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ \ldots\ +\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n.$$

Uoči da

- prvi član binomnog razvoja glasi $\binom{n}{0} \cdot a^{n} \cdot b^{0}$
- drugi član binomnog razvoja glasi $\binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^{1}$
- treći član binomnog razvoja glasi $\binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^{2}$
- četvrti član binomnog razvoja glasi $\binom{n}{3} \cdot a^{n-3} \cdot b^{3}$
- peti član binomnog razvoja glasi $\binom{n}{4} \cdot a^{n-4} \cdot b^{4}$
- šesti član binomnog razvoja glasi $\binom{n}{5} \cdot a^{n-5} \cdot b^{5}$
- sedmi član binomnog razvoja glasi $\binom{n}{6} \cdot a^{n-6} \cdot b^{6}$

....

- r – ti član binomnog razvoja glasi $\binom{n}{r-1} \cdot a^{n-(r-1)} \cdot b^{r-1}$.

Zato 6. član u razvoju binoma $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + x^2\right)^8$ glasi:

$$\binom{8}{5} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{8-5} \cdot \left(x^2\right)^5 = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{3} \cdot x^{10} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2^3}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3} \cdot x^{10} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8}{x^2} \cdot x^{10} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8}{x^2} \cdot x^{10} = 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot x^{-2} \cdot x^{10} = 448 \cdot x^8.$$

Vježba 179

U razvoju binoma $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + x^2\right)^8$ odredi 3. član.

Rezultat: 1792.

Zadatak 180 (Martina, srednja škola)

Koliko ima troznamenkastih brojeva sa različitim znamenkama ako su znamenke elementi skupa { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }?

Rješenje 180

Ponovimo!

Ako element s_1 možemo izabrati is skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Varijacije bez ponavljanja

Broj varijacija r – tog razreda od n elemenata bez ponavljanja jednak je

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

Računamo koliko ima troznamenkastih brojeva sa različitim znamenkama iz zadanog skupa.

1.inačica

Prvu znamenku troznamenkastog broja biramo iz skupa { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } jer nula ne može biti na prvom mjestu (to je 6 mogućnosti, $n_1 = 6$).

Drugu znamenku biramo iz skupa { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, ali pritom moramo paziti da ne odaberemo već prije odabranu znamenku (to je ponovno 6 mogućnosti, $n_2 = 6$).

Treću znamenku biramo iz skupa svih znamenki { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } različitih od prve dvije znamenke koje smo odabrali (to je 5 mogućnosti, $n_3 = 5$).

Troznamenkastih brojeva s različitim znamenkama iz skupa { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ima:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 6 \cdot 6 \cdot 5 = 180.$$

2.inačica

Računamo koliko ima svih troznamenkastih brojeva sa različitim znamenkama (čak i kada je 0 na prvom mjestu) ako je zadan skup znamenaka { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Riječ je o varijacijama bez ponavljanja od 7 elemenata trećeg razreda.

$$V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Računamo koliko ima "troznamenkastih brojeva" kojima je 0 na prvom mjestu. Riječ je o varijacijama bez ponavljanja od 6 elemenata drugog razreda.

$$V_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Troznamenkastih brojeva s različitim znamenkama iz skupa { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ima:

$$N = V_7^3 - V_6^2 = 210 - 30 = 180.$$

Vježba 180

Koliko ima troznamenkastih brojeva sa različitim znamenkama ako su znamenke elementi skupa { 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9 }?

Rezultat: 180.