Zadatak 281 (Fredy, gimnazija)

Zadan je niz realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Za zbroj prvih n članova toga niza vrijedi $S_n = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n$. Članovi $a_1, a_3, a_5, \ldots$ na neparnim mjestima zadanoga niza čine novi niz. Izračunajte zbroj prvih 100 članova tako dobivenoga novog niza.

Rješenje 281

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \ \Rightarrow \ 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Uočimo da za zbroj prvih n članova niza vrijedi:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \ \Rightarrow \ S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + a_n \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ S_n = S_{n-1} + a_n \ \Rightarrow \ a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Zato je

$$a_n = S_n - S_{n-1} \ \Rightarrow \ \left[\begin{matrix} \text{uvjet} \\ S_n = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n \end{matrix} \right] \ \Rightarrow \ a_n = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - \left(2 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) \right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a_n = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - \left(2 \cdot \left(n^2 - 2 \cdot n + 1 \right) + 3 \cdot n - 3 \right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a_n = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - \left(2 \cdot n^2 - 4 \cdot n + 2 + 3 \cdot n - 3 \right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a_n = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 2 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 2 - 3 \cdot n + 3 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a_n = 2 \cdot n^2 + 3 \cdot n - 2 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 2 - 3 \cdot n + 3 \ \Rightarrow \ \boxed{a_n = 4 \cdot n + 1}.$$

Promatramo članove na neparnim mjestima zadanog niza.

$$a_1, \ a_3, \ a_5, \ \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} n=1 \\ n=3 \\ n=5 \\ \dots \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[a_n = 4 \cdot n + 1\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 4 \cdot 1 + 1 \\ a_3 = 4 \cdot 3 + 1 \\ a_5 = 4 \cdot 5 + 1 \\ \dots \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 5 \\ a_3 = 13 \\ a_5 = 21 \\ \dots \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5,\ 13,\ 21,\ \dots$$

Pokažimo da je to aritmetički niz! Dovoljno je provjeriti jednakost

$$a_{2 \cdot n+1} = \frac{a_{2 \cdot n-1} + a_{2 \cdot n+1}}{2} \Rightarrow \left[a_n = 4 \cdot n + 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot (2 \cdot n + 1) + 1 = \frac{4 \cdot (2 \cdot n - 1) + 1 + 4 \cdot (2 \cdot n + 3) + 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot n + 4 + 1 = \frac{8 \cdot n - 4 + 1 + 8 \cdot n + 12 + 1}{2} \Rightarrow 8 \cdot n + 5 = \frac{16 \cdot n + 10}{2} \Rightarrow 8 \cdot n + 5 = \frac{2 \cdot (8 \cdot n + 5)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot n + 5 = \frac{2 \cdot (8 \cdot n + 5)}{2} \Rightarrow 8 \cdot n + 5 = 8 \cdot n + 5.$$

Niz

$$5,\ 13,\ 21,\ \dots$$

je aritmetički. Prvi član je $a_1 = 5$, a razlika $d = 13 - 5 = 8$.
Traženi zbroj iznosi:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} n = 100 \\ a_1 = 5 \\ d = 8 \end{bmatrix} \Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2} \cdot \left[2 \cdot 5 + (100 - 1) \cdot 8\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2} \cdot \left[10 + 99 \cdot 8\right] \Rightarrow S_{100} = 50 \cdot \left[10 + 792\right] \Rightarrow S_{100} = 40100.$$

Vježba 281

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 282 (Hrvoje, gimnazija)

Koliko ima dvoznamenkastih prirodnih brojeva koji kod diobe s 3 daju ostatak 1, a kod diobe sa 4 ostatak 2?

A. 6 *B.* 7 *C.* 8 *D.* 9

Rješenje 282

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d\ ,\ a_3 - a_2 = d\ ,\ a_4 - a_3 = d\ ,\ a_5 - a_4 = d\ ,\ a_6 - a_5 = d\ ,\ \dots\ ,\ a_n - a_{n-1} = d\ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d\ ,\ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b,\ q \ \text{ je količnik, } r \ \text{ je ostatak.}$$

1.inačica

To su brojevi: 10, 22, 34, 46, 58, 70, 82, 94.
Ima ih 8.
Odgovor je pod C.

2.inačica

To su brojevi: 10, 22, 34, … , 94. Uočimo da brojevi čine aritmetički niz čija je razlika d = 12.

$$d = 22 - 10 = 34 - 22 = ... = 94 - 82 = 12.$$

Računamo n.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n = 94 \\ a_1 = 10 \\ d = 12 \end{bmatrix} \Rightarrow 94 = 10 + (n-1) \cdot 12 \Rightarrow 94 - 10 = 12 \cdot (n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 84 = 12 \cdot (n-1) \Rightarrow 84 = 12 \cdot (n-1) \; /:12 \Rightarrow 7 = n - 1 \Rightarrow n - 1 = 7 \Rightarrow n = 7 + 1 \Rightarrow n = 8.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 282

Odmor!

Rezultat: …