Zadatak 241 (Dora, gimnazija)

Zadan je niz (a_n) za koji vrijedi $a_n = a_{n-1} - 0.7$, $n > 1$ i $a_1 = 10$. Koliko iznosi osmi član toga niza?

Rješenje 241

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.

Niz možemo zadati rekurzivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću već definiranih članova. Dakle, član niza dobiva se preko nekoliko svoji prethodnika. Ako znamo kako n – ti član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, onda ga možemo izračunati.

Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a + n = b \quad , \quad a = b - n \quad , \quad b - a = n.$$

1.inačica

Iz pravila kojim je definiran niz (a_n) redom računamo:

- $a_2 = a_1 - 0.7 = 10 - 0.7 = 9.3$
- $a_3 = a_2 - 0.7 = 9.3 - 0.7 = 8.6$
- $a_4 = a_3 - 0.7 = 8.6 - 0.7 = 7.9$
- $a_5 = a_4 - 0.7 = 7.9 - 0.7 = 7.2$
- $a_6 = a_5 - 0.7 = 7.2 - 0.7 = 6.5$
- $a_7 = a_6 - 0.7 = 6.5 - 0.7 = 5.8$
- $a_8 = a_7 - 0.7 = 5.8 - 0.7 = 5.1.$

2.inačica

Uočimo da je svaki član zadanog niza, osim prvoga člana, za 0.7 manji od prethodnog člana. To znači da je a_8 za 4.9 manji od a_1.

$$7 \cdot 0.7 = 4.9.$$

Osmi član jednak je

$$a_8 = a_1 - 4.9 \Rightarrow \left[\, a_1 = 10 \,\right] \Rightarrow a_8 = 10 - 4.9 \Rightarrow a_8 = 5.1.$$

3.inačica

Iz pravila kojim je definiran niz (a_n) redom računamo:

$$\left.\begin{matrix} a_2 = a_1 - 0.7 \\ a_3 = a_2 - 0.7 \\ a_4 = a_3 - 0.7 \\ a_5 = a_4 - 0.7 \\ a_6 = a_5 - 0.7 \\ a_7 = a_6 - 0.7 \\ a_8 = a_7 - 0.7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$$

$$= a_1 - 0.7 + a_2 - 0.7 + a_3 - 0.7 + a_4 - 0.7 + a_5 - 0.7 + a_6 - 0.7 + a_7 - 0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=$$

$$=a_1-0.7+a_2-0.7+a_3-0.7+a_4-0.7+a_5-0.7+a_6-0.7+a_7-0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_8=a_1-0.7-0.7-0.7-0.7-0.7-0.7-0.7 \Rightarrow a_8=a_1-7\cdot 0.7 \Rightarrow a_8=a_1-4.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\, a_1=10 \,\right] \Rightarrow a_8=10-4.9 \Rightarrow a_8=5.1.$$

Vježba 241

Zadan je niz (a_n) za koji vrijedi $a_n = a_{n-1} - 0.7$, $n > 1$ i $a_1 = 10$. Koliko iznosi peti član toga niza?

Rezultat: 7.2.

Zadatak 242 (Katarina, srednja škola)

U geometrijskom nizu je zbroj prvih 6 članova jednak trostrukom zbroju prvih triju članova. Kvocijent niza je jednak:

$$A.\ \sqrt{3} \qquad B.\ \sqrt[3]{2} \qquad C.\ 2 \qquad D.\ \sqrt{2} \qquad E.\ \sqrt[3]{3}$$

Rješenje 242

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Kako zapisati da je broj b jednak trostrukom broju a?

$$b=3\cdot a.$$

Kako zapisati da je broj b jednak jednoj trećini broja a?

$$b=\frac{1}{3}\cdot a.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \ , \ q\neq 1.$$

$$S_6=3\cdot S_3 \Rightarrow a_1\cdot\frac{1-q^6}{1-q}=3\cdot a_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q} \Rightarrow \left[\, q\neq 1 \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1\cdot\frac{1-q^6}{1-q}=3\cdot a_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q} \ /\cdot\frac{1-q}{a_1} \Rightarrow 1-q^6=3\cdot\left(1-q^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\left(q^3\right)^2=3\cdot\left(1-q^3\right) \Rightarrow \left(1-q^3\right)\cdot\left(1+q^3\right)=3\cdot\left(1-q^3\right) \Rightarrow \left[\, q\neq 1 \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-q^3\right)\cdot\left(1+q^3\right)=3\cdot\left(1-q^3\right) \ /\cdot\frac{1}{1-q^3} \Rightarrow 1+q^3=3 \Rightarrow q^3=3-1 \Rightarrow q^3=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^3 = 2 \;/\sqrt[3]{\;} \Rightarrow q = \sqrt[3]{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 242

U geometrijskom nizu je zbroj prva tri člana jednak jednoj trećini zbroja prvih 6 članova. Kvocijent niza je jednak:

$$A.\ \sqrt{3} \qquad B.\ \sqrt[3]{2} \qquad C.\ 2 \qquad D.\ \sqrt{2} \qquad E.\ \sqrt[3]{3}$$

Rezultat: B.

Zadatak 243 (Katarina, maturantica)

Brojevi x, 2 · x, 2 · y, x – y + 12 prva su četiri člana aritmetičkog niza. Koji je realan broj devedeseti član toga niza?

Rješenje 243

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Budući da su zadana prva četiri člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$a_1 = x \quad , \quad a_2 = 2 \cdot x \quad , \quad a_3 = 2 \cdot y \quad , \quad a_4 = x - y + 12.$$

Iz svojstva aritmetičkog niza napišemo sustav jednadžba.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot a_2 = a_1 + a_3 \\ 2 \cdot a_3 = a_2 + a_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 2 \cdot x = x + 2 \cdot y \\ 2 \cdot 2 \cdot y = 2 \cdot x + x - y + 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot x = x + 2 \cdot y \\ 4 \cdot y = 3 \cdot x - y + 12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot x - x - 2 \cdot y = 0 \\ 4 \cdot y - 3 \cdot x + y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ -3 \cdot x + 5 \cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 3 \cdot y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot y = 12 \;/:3 \Rightarrow y = 4.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} y=4 \\ 3\cdot x-2\cdot y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot x-2\cdot 4=0 \Rightarrow 3\cdot x-8=0 \Rightarrow 3\cdot x=8 \Rightarrow 3\cdot x=8 \;/:3 \Rightarrow x=\frac{8}{3}.$$

Zadani aritmetički niz ima:

- prvi član

$$a_1=x \Rightarrow a_1=\frac{8}{3}$$

- razliku (diferenciju)

$$d=a_2-a_1 \Rightarrow d=2\cdot x-x \Rightarrow d=x \Rightarrow d=\frac{8}{3}.$$

Devedeseti član toga niza glasi:

$$a_{90}=a_1+89\cdot d \Rightarrow a_{90}=\frac{8}{3}+89\cdot\frac{8}{3} \Rightarrow a_{90}=\frac{8}{3}\cdot(1+89) \Rightarrow a_{90}=\frac{8}{3}\cdot 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{90}=\frac{8}{3}\cdot 90 \Rightarrow a_{90}=8\cdot 30 \Rightarrow a_{90}=240.$$

Vježba 243

Brojevi x, 2 · x, 2 · y, x – y + 12 prva su četiri člana aritmetičkog niza. Koji je realan broj trideseti član toga niza?

Rezultat: 80.

Zadatak 244 (Branka, ekonomska škola)

Zbroj svih brojeva između 50 i 350, kojima je zadnja znamenka jednaka 1, je:

A. 4566 *B.* 5880 *C.* 5539 *D.* 5208 *E.* 9877

Rješenje 244

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d \;,\; a_3-a_2=d \;,\; a_4-a_3=d \;,\; a_5-a_4=d \;,\; a_6-a_5=d \;,\; \ldots \;,\; a_n-a_{n-1}=d \;\ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d \;,\; n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right].$$

Niz brojeva 51, 61, 71, … , 331, 341 je aritmetički niz za koji vrijedi:

$$51,\,61,\,71,\,\ldots,\,331,\,341 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=51 \\ a_n=341 \\ d=10 \end{array}\right\}.$$

Broj članova je:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d \Rightarrow a_1+(n-1)\cdot d=a_n \Rightarrow (n-1)\cdot d=a_n-a_1 \Rightarrow (n-1)\cdot d=a_n-a_1 \;/\cdot\frac{1}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1=\frac{a_n-a_1}{d} \Rightarrow n=\frac{a_n-a_1}{d}+1 \Rightarrow n=\frac{341-51}{10}+1 \Rightarrow n=30.$$

Računamo zbroj članova niza.

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} n=10 \\ a_1=51 \\ a_n=341 \end{bmatrix} \Rightarrow s_{30}=\frac{30}{2}\cdot\left[51+341\right] \Rightarrow s_{30}=5880.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 244

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 245 (Danijel, tehnička škola)

Ispitaj monotonost niza (a_n) ako je $a_n=\frac{3\cdot n+5}{2\cdot n+1}$.

Rješenje 245

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Niz realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ je monotono rastući niz ako je $a_n \le a_{n+1}$ za svaki $n\in N$.
(Da je niz monotono rastući dovoljno je pokazati da vrijedi $a_{n+1}-a_n\ge 0.$)
Niz realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ je monotono padajući niz ako je $a_n \ge a_{n+1}$ za svaki $n\in N$.
(Da je niz monotono padajući dovoljno je pokazati da vrijedi $a_{n+1}-a_n\le 0.$)

Odredimo razliku $a_{n+1}-a_n$.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3\cdot(n+1)+5}{2\cdot(n+1)+1}-\frac{3\cdot n+5}{2\cdot n+1}=\frac{3\cdot n+3+5}{2\cdot n+2+1}-\frac{3\cdot n+5}{2\cdot n+1}=\frac{3\cdot n+8}{2\cdot n+3}-\frac{3\cdot n+5}{2\cdot n+1}=$$

$$=\frac{(3\cdot n+8)\cdot(2\cdot n+1)-(3\cdot n+5)\cdot(2\cdot n+3)}{(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{6\cdot n^2+3\cdot n+16\cdot n+8-\left(6\cdot n^2+9\cdot n+10\cdot n+15\right)}{(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+1)}=$$

$$=\frac{6\cdot n^2+3\cdot n+16\cdot n+8-6\cdot n^2-9\cdot n-10\cdot n-15}{(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{6\cdot n^2+3\cdot n+16\cdot n+8-6\cdot n^2-9\cdot n-10\cdot n-15}{(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+1)}=$$

$$=\frac{8-15}{(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{-7}{(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+1)}=-\frac{7}{(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n+1)} \Rightarrow a_{n+1}-a_n\le 0.$$

Niz je monotono padajući.

Vježba 245

Ispitaj monotonost niza (a_n) ako je $a_n=\frac{3-n}{2\cdot n-1}$.

Rezultat: Monotono padajući.

Zadatak 246 (Miro, tehnička škola)

Zadan je aritmetički niz 97, 93, 89, 85, … Odredite zbroj svih pozitivnih članova toga niza.

Rješenje 246

Ponovimo!

$$a > b \ , \ c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ ... \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ ...$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Uočimo ako je d < 0 niz je padajući, tj.

$$a_{n+1} < a_n.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Odredimo prvi član i diferenciju zadanog aritmetičkog niza.

$$97, 93, 89, 85, ... \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = 97 \\ d = 93 - 97 = 89 - 93 = ... = -4 \end{array} \right\}.$$

Opći član toga niza jednak je

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_n = 97 + (n-1) \cdot (-4) \Rightarrow a_n = 97 - 4 \cdot n + 4 \Rightarrow a_n = 101 - 4 \cdot n.$$

Uočimo da je niz strogo padajući jer je d < – 4. Računamo broj pozitivnih članova toga niza. Tražimo najveći prirodni broj n takav da je $a_n > 0$. (Možemo tražiti i prvi prirodni broj n takav da je $a_n < 0$.)

$$a_n > 0 \Rightarrow 101 - 4 \cdot n > 0 \Rightarrow -4 \cdot n > -101 \Rightarrow -4 \cdot n > -101 \ /:(-4) \Rightarrow n < 25.25.$$

Dakle, prvih 25 članova niza su pozitivni cijeli brojevi i njihov zbroj iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 97 \\ d = -4 \\ n = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \right] \Rightarrow s_{25} = \frac{25}{2} \cdot \left[2 \cdot 97 + (25-1) \cdot (-4) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{25} = \frac{25}{2} \cdot \left[194 + 24 \cdot (-4) \right] \Rightarrow s_{25} = \frac{25}{2} \cdot [194 - 96] \Rightarrow s_{25} = \frac{25}{2} \cdot 98 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{25} = \frac{25}{2} \cdot 98 \Rightarrow s_{25} = 25 \cdot 49 \Rightarrow s_{25} = 1225.$$

Vježba 246

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 247 (Jadranka, srednja škola)

Odredite opći član aritmetičkoga niza (a_n) kojemu je peti član $\frac{51}{2}$, a šesnaesti 53.

Rješenje 247

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = \frac{51}{2} \\ a_{16} = 53 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 4 \cdot d = \frac{51}{2} \\ a_1 + 15 \cdot d = 53 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 4 \cdot d = \frac{51}{2} \ / \cdot (-1) \\ a_1 + 15 \cdot d = 53 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a_1 - 4 \cdot d = -\frac{51}{2} \\ a_1 + 15 \cdot d = 53 \end{array}\right\} \Rightarrow 11 \cdot d = 53 - \frac{51}{2} \Rightarrow 11 \cdot d = \frac{53}{1} - \frac{51}{2} \Rightarrow 11 \cdot d = \frac{106 - 51}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11 \cdot d = \frac{55}{2} \Rightarrow 11 \cdot d = \frac{55}{2} \ / \cdot \frac{1}{11} \Rightarrow d = \frac{5}{2}.$$

Računamo a_1.

$$\left.\begin{array}{l} d = \frac{5}{2} \\ a_1 + 4 \cdot d = \frac{51}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{51}{2} \Rightarrow a_1 + 4 \cdot \frac{5}{2} = \frac{51}{2} \Rightarrow a_1 + 2 \cdot 5 = \frac{51}{2} \Rightarrow a_1 + 10 = \frac{51}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{51}{2} - 10 \Rightarrow a_1 = \frac{51}{2} - \frac{10}{1} \Rightarrow a_1 = \frac{51 - 20}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{31}{2}.$$

Opći član glasi:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = \frac{31}{2} \\ d = \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow a_n = \frac{31}{2} + (n-1) \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow a_n = \frac{31}{2} + \frac{5}{2} \cdot n - \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{5}{2} \cdot n + \frac{31}{2} - \frac{5}{2} \Rightarrow a_n = \frac{5}{2} \cdot n + \frac{31-5}{2} \Rightarrow a_n = \frac{5}{2} \cdot n + \frac{26}{2} \Rightarrow a_n = \frac{5}{2} \cdot n + \frac{26}{2} \Rightarrow a_n = \frac{5}{2} \cdot n + 13.$$

Vježba 247

Odredite opći član aritmetičkoga niza (a_n) kojemu je peti član 15, a šesnaesti 59.

Rezultat: $a_n = 4 \cdot n - 5.$

Zadatak 248 (Maturant, ekonomska škola)

Prvi je član geometrijskoga reda 0.5, a suma je toga geometrijskog reda 1.25. Koliko iznosi količnik toga geometrijskog reda?

Rješenje 248

Ponovimo!

$$a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}.$$

Geometrijski red

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n + \ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q} \; / \cdot \frac{1-q}{S} \Rightarrow 1 - q = \frac{a_1}{S} \Rightarrow 1 - \frac{a_1}{S} = q \Rightarrow q = 1 - \frac{a_1}{S} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = 0.5 \\ S = 1.25 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = 1 - \frac{0.5}{1.25} \Rightarrow q = 1 - \frac{50}{125} \Rightarrow q = \frac{125-50}{125} \Rightarrow q = \frac{75}{125} \Rightarrow q = \frac{75}{125} \Rightarrow q = \frac{3}{5} \Rightarrow q = 0.6.$$

Vježba 248

Prvi je član geometrijskoga reda 0.2, a suma je toga geometrijskog reda 1.2. Koliko iznosi količnik toga geometrijskog reda?

Rezultat: $\frac{5}{6}.$

Zadatak 249 (Ante, obrtnička škola)

U jednome je stroju spojeno u nizu nekoliko zupčanika. Svaki zupčanik, počevši od drugoga, ima dvostruko manje zubaca od prethodnoga, što znači da prilikom rada stroja napravi dvostruko veći broj okretaja od prethodnoga. Dok se najveći zupčanik okrene 9 puta, najmanji se okrene 1152 puta. Koliko je zupčanika spojeno u nizu?

$$A.\ 4 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 10$$

Rješenje 249

Ponovimo!

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \;\Rightarrow\; f(x) = g(x).$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;,\; n \geq 1.$$

1.inačica

Najveći zupčanik okrene se 9 puta, a svaki sljedeći napravi **dvostruko** veći broj okretaja od prethodnoga. Najmanji zupčanik okrene se 1152 puta.

broj okretaja	9	18	36	72	144	288	576	1152
zupčanik	prvi	drugi	treći	četvrti	peti	šesti	sedmi	osmi

U nizu je spojeno 8 zupčanika.
Odgovor je pod C.

2.inačica

Uočimo da brojevi okretaja zupčanika tvore geometrijski niz za koji je:

$$a_1 = 9 \quad , \quad q = 2 \quad , \quad a_n = 1152.$$

Dalje slijedi:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;\Rightarrow\; a_1 \cdot q^{n-1} = a_n \;\Rightarrow\; 9 \cdot 2^{n-1} = 1152 \;\Rightarrow\; 9 \cdot 2^{n-1} = 1152 \;/:9 \;\Rightarrow\; 2^{n-1} = 128 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2^{n-1} = 2^7 \;\Rightarrow\; n - 1 = 7 \;\Rightarrow\; n = 7 + 1 \;\Rightarrow\; n = 8.$$

U nizu je spojeno 8 zupčanika.
Odgovor je pod C.

3.inačica

$$\text{8 zupčanika} \left\{ \begin{array}{c|c} 1152 & 2 \\ 576 & 2 \\ 288 & 2 \\ 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & \end{array} \right.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 249

U jednome je stroju spojeno u nizu nekoliko zupčanika. Svaki zupčanik, počevši od drugoga, ima dvostruko manje zubaca od prethodnoga, što znači da prilikom rada stroja napravi dvostruko veći broj okretaja od prethodnoga. Dok se najveći zupčanik okrene 9 puta, najmanji se okrene 288 puta. Koliko je zupčanika spojeno u nizu?

$$A.\ 4 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 10$$

Rezultat: B.

Zadatak 250 (Marko, gimnazija)

Broj q količnik je geometrijskoga niza s pozitivnim članovima. Za koji od navedenih količnika q tri uzastopna člana geometrijskoga niza mogu biti duljine stranica nekoga trokuta?

$$A.\ \text{za}\ q=0.25 \qquad B.\ \text{za}\ q=0.5 \qquad C.\ \text{za}\ q=1.5 \qquad D.\ \text{za}\ q=2$$

Rješenje 250

Ponovimo!

$$a<b\ ,\ c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c} \quad , \quad a>b\ ,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ ,\ n\geq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nejednakost trokuta:

$$a<b+c \quad , \quad b<a+c \quad , \quad c<a+b.$$

Duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina njegovih ostalih stranica.
Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A i sve elemente koji se nalaze u skupu B. Označavamo ga $A\bigcup B$.
Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga $A\bigcap B$.

1.inačica

Neka su zadana tri pozitivna uzastopna člana geometrijskoga niza koji čine stranice trokuta.

$$a\ ,\ a\cdot q\ ,\ a\cdot q^2\ ,\ a>0.$$

Zbog nejednakosti trokuta vrijede tri nejednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} a<a\cdot q+a\cdot q^2 \\ a\cdot q<a+a\cdot q^2 \\ a\cdot q^2<a+a\cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a<a\cdot q+a\cdot q^2\ /:a \\ a\cdot q<a+a\cdot q^2\ /:a \\ a\cdot q^2<a+a\cdot q\ /:a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1<q+q^2 \\ q<1+q^2 \\ q^2<1+q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q^2+q>1 \\ q^2+1>q \\ q^2-q-1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

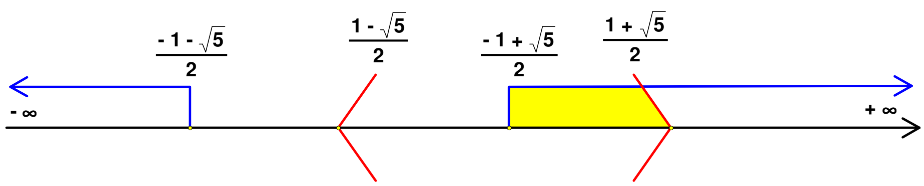
$$\left.\begin{array}{r} q^2+q-1>0 \\ \Rightarrow\ q^2-q+1>0 \\ q^2-q-1<0 \end{array}\right\}.$$

Nejednadžbe možemo riješiti na klasičan način, ali zbog uštede vremena koristimo džepno računalo koje ima program za rješavanje kvadratnih jednadžba.

- $q^2+q-1>0\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{džepno računalo} \\ a\cdot x^2+b\cdot x+c>0 \\ q^2+q-1>0 \\ a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-1 \end{array}\right] \Rightarrow\ x\in\left\langle -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right\rangle$
- $q^2-q+1>0\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{džepno računalo} \\ a\cdot x^2+b\cdot x+c>0 \\ q^2-q+1>0 \\ a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\ All\ Real\ Numbers\ \right] \Rightarrow\ x\in\langle -\infty, +\infty\rangle$
- $q^2-q-1<0\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{džepno računalo} \\ a\cdot x^2+b\cdot x+c<0 \\ q^2-q-1<0 \\ a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-1 \end{array}\right] \Rightarrow x\in\left\langle \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle.$

Dovoljno je samo odrediti presjek skupova

$$\left\langle -\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right\rangle \text{ i } \left\langle \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle.$$



Rezultat je interval

$$\left\langle \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle = \langle 0.618, 1.618\rangle.$$

Vidi se da u taj interval jedino pripada q = 1.5.
Odgovor je pod C.

2.inačica

Neka su zadana tri pozitivna uzastopna člana geometrijskoga niza koji čine stranice trokuta.

$$a\ ,\ a\cdot q\ ,\ a\cdot q^2\ ,\ a>0.$$

Za q = 0.25 niz glasi:

$$a\ ,\ 0.25\cdot a\ ,\ 0.25^2\cdot a\ \Rightarrow\ a\ ,\ 0.25\cdot a\ ,\ 0.0625\cdot a.$$

Odmah se vidi da je

$$a>0.25\cdot a+0.0625\cdot a\ \Rightarrow\ a>0.3125\cdot a.$$

Dakle, nije ispunjena nejednakost trokuta.

Za q = 0.5 niz glasi:

$$a \;,\; 0.5 \cdot a \;,\; 0.5^2 \cdot a \;\Rightarrow\; a \;,\; 0.5 \cdot a \;,\; 0.25 \cdot a.$$

Odmah se vidi da je

$$a > 0.5 \cdot a + 0.25 \cdot a \;\Rightarrow\; a > 0.75 \cdot a.$$

Dakle, nije ispunjena nejednakost trokuta.

Za q = 1.5 niz glasi:

$$a \;,\; 1.5 \cdot a \;,\; 1.5^2 \cdot a \;\Rightarrow\; a \;,\; 1.5 \cdot a \;,\; 2.25 \cdot a.$$

Uvjerimo se da je ispunjena nejednakost trokuta.

$$\left.\begin{array}{l} a < 1.5 \cdot a + 2.25 \cdot a \\ 1.5 \cdot a < a + 2.25 \cdot a \\ 2.25 \cdot a < a + 1.5 \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a < 3.75 \cdot a \\ 1.5 \cdot a < 3.25 \cdot a \\ 2.25 \cdot a < 2.5 \cdot a \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod C.

Za q = 2 niz glasi:

$$a \;,\; 2 \cdot a \;,\; 2^2 \cdot a \;\Rightarrow\; a \;,\; 2 \cdot a \;,\; 4 \cdot a.$$

Odmah se vidi da je

$$4 \cdot a > a + 2 \cdot a \;\Rightarrow\; 4 \cdot a > 3 \cdot a.$$

Dakle, nije ispunjena nejednakost trokuta.

Vježba 250

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 251 (DJ, maturant)

U kocku čija je duljina brida 10 cm upisana je sfera, u tu je sferu upisana nova kocka, a u tu je kocku upisana nova sfera. Na taj se način nastavljaju upisivati iduće kocke i sfere. Izračunajte zbroj oplošja tako dobivenih sfera čije su duljine polumjera veće od 0.1 cm.

Rješenje 251

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$a > b \;,\; c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad , \quad a > b \;,\; c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;,\; n \geq 1.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \ , \ q \neq 1.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = \underset{\rightarrow}{b^c} \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam
Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad f(x) \geq g(x) > 0 \ \Rightarrow \ \log f(x) \geq \log g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

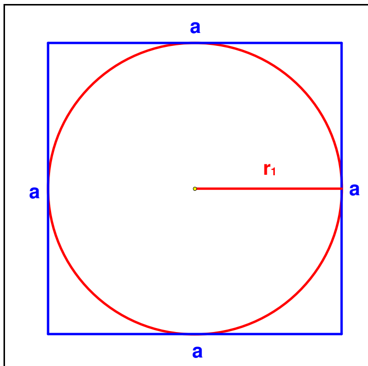
Kocka (heksaedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.
Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha koji ne leže na istoj strani.
Duljina D prostorne dijagonale kocke dana je formulom

$$D = a \cdot \sqrt{3},$$

pri čemu je a duljina brida kocke.
Sfera je skup točaka prostora čija je udaljenost od središta S jednaka r. Promjer je duljina dužine koja prolazi kroz središte sfere i čiji se krajevi nalaze na sferi.
Oplošje (ploština) sfere polumjera r iznosi

$$P = 4 \cdot \pi \cdot r^2.$$

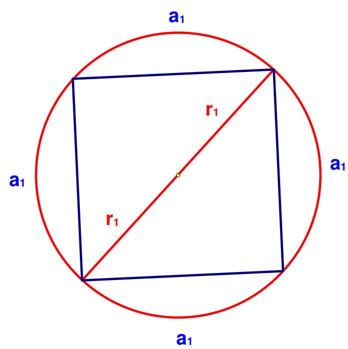
Zbog preglednosti promatrajmo zadatak u ravnini.



U kocku čija je duljina brida a upisana je sfera.
Polumjer r_1 prve sfere jednak je polovici brida zadane kocke.

$$r_1 = \frac{a}{2} \ \Rightarrow \ [\, a = 10 \ cm \,] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ r_1 = \frac{10 \ cm}{2} \ \Rightarrow \ r_1 = 5 \ cm.$$

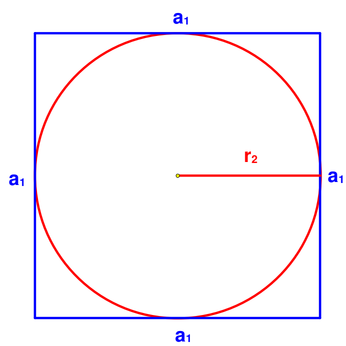


U sferu polumjera r_1 upisana je nova kocka duljine brida a_1. Duljina prostorne dijagonale kocke jednaka je promjeru sfere.

$$a_1 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot r_1 \;\Rightarrow\; a_1 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot r_1 \;/\cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_1 = \frac{2 \cdot r_1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \left[\, r_1 = 5\ cm \,\right] \;\Rightarrow$$

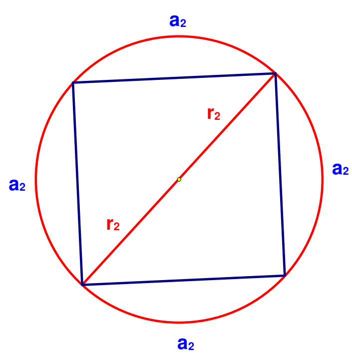
$$\Rightarrow\; a_1 = \frac{2 \cdot 5\ cm}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{10\ cm}{\sqrt{3}}.$$



U kocku čija je duljina brida a_1 upisana je sfera. Polumjer r_2 druge sfere jednak je polovici brida druge kocke.

$$r_2 = \frac{a_1}{2} \;\Rightarrow\; \left[\, a_1 = \frac{10\ cm}{\sqrt{3}} \,\right] \;\Rightarrow\; r_2 = \frac{\frac{10\ cm}{\sqrt{3}}}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; r_2 = \frac{\frac{10\ cm}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{1}} \;\Rightarrow\; r_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}\ cm.$$



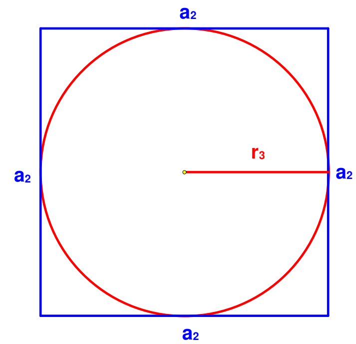
U sferu polumjera r_2 upisana je nova kocka duljine brida a_2. Duljina prostorne dijagonale kocke jednaka je promjeru sfere.

$$a_2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot r_2 \;\Rightarrow\; a_2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot r_2 \;/\cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_2 = \frac{2 \cdot r_2}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \left[\, r_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}\ cm \,\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_2 = \frac{2 \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}\ cm}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}}\ cm}{\frac{\sqrt{3}}{1}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a_2 = \frac{10}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\ cm \;\Rightarrow\; a_2 = \frac{10}{3}\ cm.$$



U kocku čija je duljina brida a_2 upisana je sfera.
Polumjer r_3 treće sfere jednak je polovici brida druge kocke.

$$r_3=\frac{a_2}{2}\ \Rightarrow\ \left[a_2=\frac{10\ cm}{3}\right]\ \Rightarrow\ r_3=\frac{\frac{10\ cm}{3}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r_3=\frac{\frac{10\ cm}{3}}{\frac{2}{1}}\ \Rightarrow\ r_3=\frac{5}{3}\ cm.$$

I tako dalje!
Polumjeri sfera čine niz:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ \Rightarrow\ 5,\ \frac{5}{\sqrt{3}},\ \frac{5}{3},\ \ldots$$

To je geometrijski niz koji ima prvi član $r_1 = 5$, a količnik $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Na primjer,

$$\left.\begin{aligned}q&=\frac{r_2}{r_1}\\ q&=\frac{r_3}{r_2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}q&=\frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{5}\\ q&=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}q&=\frac{\frac{5}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{1}}\\ q&=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{\sqrt{3}}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}q&=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ q&=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}q&=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ q&=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}q&=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ q&=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3\cdot\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}q&=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ q&=\frac{3}{3\cdot\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}q&=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ q&=\frac{3}{3\cdot\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}q&=\frac{1}{\sqrt{3}}\\ q&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}.$$

Opći član niza glasi:

$$r_n=r_1\cdot q^{n-1}\ \Rightarrow\ \left[\begin{aligned}r_1&=5\\ q&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right]\ \Rightarrow\ r_n=5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}.$$

U zadatku promatraju se samo sfere čije su duljine polumjera veće od 0.1 cm. Zato vrijedi nejednadžba:

$$5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}>0.1\ \Rightarrow\ 5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}>0.1\ /:5\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}>0.02\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo}\\ \text{nejednadžbu}\end{array}\right]\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}>0.02\ /\log\ \Rightarrow\ \log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}>\log 0.02\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1)\cdot\log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > \log 0.02 \Rightarrow \left[\log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1)\cdot\log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > \log 0.02 \;/\cdot\frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow n-1 < \frac{\log 0.02}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n < \frac{\log 0.02}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} + 1 \Rightarrow$$  $$\Rightarrow n < 8.122 \Rightarrow n = 8.$$

Možemo zbrojiti oplošja prvih osam upisanih sfera čiji su polumjeri redom:

$$5,\ \frac{5}{\sqrt{3}},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{3\cdot\sqrt{3}},\ \frac{5}{9},\ \frac{5}{9\cdot\sqrt{3}},\ \frac{5}{27},\ \frac{5}{27\cdot\sqrt{3}}.$$

Njihova oplošja iznose:

$$P_1 = 4\cdot\pi\cdot r_1^2 \Rightarrow P_1 = 4\cdot\pi\cdot 5^2 \Rightarrow P_1 = 100\cdot\pi\ cm^2.$$

$$P_2 = 4\cdot\pi\cdot r_2^2 \Rightarrow P_2 = 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow P_2 = \frac{100}{3}\cdot\pi\ cm^2.$$

$$P_3 = 4\cdot\pi\cdot r_3^2 \Rightarrow P_3 = 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow P_3 = \frac{100}{9}\cdot\pi\ cm^2.$$

…

$$P_8 = 4\cdot\pi\cdot r_8^2 \Rightarrow P_8 = 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{5}{27\cdot\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow P_8 = \frac{100}{2187}\cdot\pi\ cm^2.$$

Primijetimo da je to također geometrijski niz sa prvim članom $P_1 = 100\cdot\pi$ i količnikom $q = \frac{1}{3}$.

Na primjer,

$$\left.\begin{array}{l} q = \frac{P_2}{P_1} \\ q = \frac{P_3}{P_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = \frac{\frac{100}{3}\cdot\pi}{100\cdot\pi} \\ q = \frac{\frac{100}{9}\cdot\pi}{\frac{100}{3}\cdot\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = \frac{\frac{100}{3}\cdot\pi}{\frac{100\cdot\pi}{1}} \\ q = \frac{\frac{100}{9}\cdot\pi}{\frac{100}{3}\cdot\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = \frac{1}{3} \\ q = \frac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

Zbroj prvih osam članova niza iznosi:

$$S_8 = P_1\cdot\frac{q^8 - 1}{q-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P_1 = 100\cdot\pi \\ q = \frac{1}{3} \end{array}\right] \Rightarrow S_8 = 100\cdot\pi\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1}{\frac{1}{3} - 1} \Rightarrow$$  $$\Rightarrow S_8 = 471.17\ cm^2.$$

Vježba 251

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 252 (Marko, tehnička škola)

Odredite vrijednost realnoga broja x ako je $\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\ldots}}}}=10.$

Rješenje 252

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Geometrijski red

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+\ldots+a_1\cdot q^n+\ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q|<1.$$

Njegov je zbroj jednak

$$S=\frac{a_1}{1-q}.$$

$$\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\ldots}}}}=10 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{9}}\cdot x^{\frac{1}{27}}\cdot x^{\frac{1}{81}}\cdot\ldots=10 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots}=10.$$

Primijetimo da je eksponent geometrijski red čiji je prvi član $a_1=\frac{1}{3}$, a količnik $q=\frac{1}{3}$ pa njegov zbroj iznosi:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3-1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Dalje slijedi:

$$x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots}=10 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}=10 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{kvadriramo}\\ \text{jednadžbu}\end{array}\right] \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}=10\;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2=10^2 \Rightarrow x=100.$$

Vježba 252

Odredite vrijednost realnoga broja x ako je $\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}}}=10.$

Rezultat: x = 10.

Zadatak 253 (Bolek i Lolek, maturanti)

Zadana su četiri broja. Prva tri čine geometrijski niz, a posljednja tri aritmetički niz. Zbroj prvoga i četvrtoga broja jednak je 32, a zbroj drugoga i trećega broja jednak je 24. Odredite zadane brojeve.

Rješenje 253

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G = \sqrt{x \cdot y}.$$

Niz je geometrijski ako je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$

Neka su x, y, z, u traženi brojevi. Prva tri broja čine geometrijski niz pa vrijedi jednakost

$$y^2 = x \cdot z.$$

Posljednja tri čine aritmetički niz pa vrijedi jednakost

$$2 \cdot z = y + u.$$

Iz podataka u zadatku možemo napisati sustav jednadžba.

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= x \cdot z \\ 2 \cdot z &= y + u \\ x + u &= 32 \\ y + z &= 24 \end{aligned}\right\}.$$

Promatramo sljedeći sustav jednadžba.

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot z &= y + u \\ x + u &= 32 \\ y + z &= 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot z + x + u + y + z = y + u + 32 + 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot z + x + u + y + z = y + u + 32 + 24 \Rightarrow 2 \cdot z + x + z = 56 \Rightarrow 3 \cdot z + x = 56 \Rightarrow x = 56 - 3 \cdot z.$$

Iz jednadžbe $y + z = 24$ izračunamo nepoznanicu y:

$$y + z = 24 \Rightarrow y = 24 - z.$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{aligned} y &= 24 - z \\ x &= 56 - 3 \cdot z \\ y^2 &= x \cdot z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow (24 - z)^2 = (56 - 3 \cdot z) \cdot z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 576 - 48 \cdot z + z^2 = 56 \cdot z - 3 \cdot z^2 \Rightarrow 576 - 48 \cdot z + z^2 - 56 \cdot z + 3 \cdot z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot z^2 - 104 \cdot z + 576 = 0 \Rightarrow 4 \cdot z^2 - 104 \cdot z + 576 = 0 \;/ : 4 \Rightarrow z^2 - 26 \cdot z + 144 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} & z^2 - 26 \cdot z + 144 = 0 \\ & a = 1 \;,\; b = -26 \;,\; c = 144 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & a = 1 \;,\; b = -26 \;,\; c = 144 \\ & z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2 \cdot 1} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 576}}{2} \Rightarrow z_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{100}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{26 \pm 10}{2} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{26 + 10}{2} \\ z_2 &= \frac{26 - 10}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{36}{2} \\ z_2 &= \frac{16}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{36}{2} \\ z_2 &= \frac{16}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1 &= 18 \\ z_2 &= 8 \end{aligned}\right\}.$$

Postoje dva rješenja.

Za z = 18 izračunamo x, y, u.

$$\left.\begin{aligned} x &= 56 - 3 \cdot z \\ y &= 24 - z \\ x + u &= 32 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 56 - 3 \cdot 18 \\ y &= 24 - 18 \\ u &= 32 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 56 - 54 \\ y &= 6 \\ u &= 32 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 6 \\ u &= 32 - 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 6 \\ u &= 30 \end{aligned}\right\}.$$

Rješenje je

$$(x,\; y,\; z,\; u) = (2,\; 6,\; 18,\; 30).$$

Za z = 8 izračunamo x, y, u.

$$\left.\begin{aligned} x &= 56 - 3 \cdot z \\ y &= 24 - z \\ x + u &= 32 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 56 - 3 \cdot 8 \\ y &= 24 - 8 \\ u &= 32 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 56 - 24 \\ y &= 16 \\ u &= 32 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 32 \\ y &= 16 \\ u &= 32 - 32 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 32 \\ y &= 16 \\ u &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Rješenje je

$$(x,\ y,\ z,\ u)=(32,\ 16,\ 8,\ 0).$$

Vježba 253

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 254 (Ljilja, ekonomska škola)

Zbroj prvih n članova nekoga aritmetičkog niza jednak je $S_n=b\cdot n-2\cdot n^2$. Koliki je koeficijent b ako je deseti član toga niza jednak – 16?

$$A.\ b=4 \qquad B.\ b=9 \qquad C.\ b=17 \qquad D.\ b=22$$

Rješenje 254

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Najprije treba naći zbroj prvih deset članova niza i zbroj prvih devet članova niza. Deseti član jednak je razlici zbroja prvih deset članova i zbroja prvih devet članova niza.

$$a_{10}=S_{10}-S_9 \Rightarrow S_{10}-S_9=a_{10} \Rightarrow \begin{bmatrix} S_n=b\cdot n-2\cdot n^2 \\ a_{10}=-16 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\cdot 10-2\cdot 10^2-\left(b\cdot 9-2\cdot 9^2\right)=-16 \Rightarrow 10\cdot b-2\cdot 100-(9\cdot b-2\cdot 81)=-16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot b-200-(9\cdot b-162)=-16 \Rightarrow 10\cdot b-200-9\cdot b+162=-16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot b-9\cdot b=-16+200-162 \Rightarrow b=22.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 254

Zbroj prvih n članova nekoga aritmetičkog niza jednak je $S_n=b\cdot n-2\cdot n^2$. Koliki je koeficijent b ako je deseti član toga niza jednak 16?

$$A.\ b=54 \qquad B.\ b=40 \qquad C.\ b=52 \qquad D.\ b=36$$

Rezultat: A.

Zadatak 255 (Marino, Luka, Gymnasium)

Let a be the sum of all positive factors of 1024 and b be the product of all positive fastors of 1024. (Hint: 1 and 1024 are also factors of 1024.= Then

$$A.\ (a-1)^5=b \qquad B.\ (a+1)^5=b \qquad C.\ a^5=b \qquad D.\ a^5-1=b \qquad E.\ a^5+1=b$$

Rješenje 255

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad \frac{n}{1}=n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$1+2+3+4+5+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q ≠ 0, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent (količnik) geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \ , \ q \neq 1.$$

Pozitivni faktori broja 1024 su:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

To je geometrijski niz koji ima 11 članova, n = 11. Prvi član je $a_1 = 1$, a količnik q = 2.
Neka je a zbroj svih faktora.

a = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 412 + 1024.

Tada je

$$a = 1 \cdot \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} \Rightarrow a = \frac{2048 - 1}{1} \Rightarrow a = 2047.$$

Neka je b umnožak svih faktora.

$$b = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256 \cdot 512 \cdot 1024 \Rightarrow b = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256 \cdot 512 \cdot 1024 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^7 \cdot 2^8 \cdot 2^9 \cdot 2^{10} \Rightarrow b = 2^{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 2^{\frac{10 \cdot 11}{2}} \Rightarrow b = 2^{\frac{10 \cdot 11}{2}} \Rightarrow b = 2^{5 \cdot 11} \Rightarrow b = 2^{55}.$$

Vidi se!

$$(a+1)^5 = (2047+1)^5 = 2048^5 = \left(2^{11}\right)^5 = 2^{55} = b.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 255

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 256 (Siniša, srednja škola)

Riješite jednadžbu $a \cdot a^{2 \cdot \log x} \cdot a^{4 \cdot \log^2 x} \cdot a^{8 \cdot \log^3 x} \cdot \ldots = \frac{1}{a^7}$ za pozitivan realan broj a različit od 1.

Rješenje 256

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$a < b \ , \ c > \ \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Geometrijski red

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n + \ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| < a \ , \ a > 0 \Rightarrow -a < x < a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$a \cdot a^{2 \cdot \log x} \cdot a^{4 \cdot \log^2 x} \cdot a^{8 \cdot \log^3 x} \cdot \ldots = \frac{1}{a^7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^1 \cdot a^{2 \cdot \log x} \cdot a^{4 \cdot \log^2 x} \cdot a^{8 \cdot \log^3 x} \cdot \ldots = a^{-7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{1 + 2 \cdot \log x + 4 \cdot \log^2 x + 8 \cdot \log^3 x + \ldots} = a^{-7} \Rightarrow 1 + 2 \cdot \log x + 4 \cdot \log^2 x + 8 \cdot \log^3 x + \ldots = -7.$$

Primijetimo da je na desnoj strani jednadžbe geometrijski red. Prvi član je $a_1 = 1$, a količnik $q = 2 \cdot \log x$. Mora vrijediti:

$$|q| < 1 \Rightarrow -1 < q < 1 \Rightarrow -1 < 2 \cdot \log x < 1 \Rightarrow -1 < 2 \cdot \log x < 1 \ /: 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0.5 < \log x < 0.5.$$

Dalje slijedi:

$$1 + 2 \cdot \log x + 4 \cdot \log^2 x + 8 \cdot \log^3 x + \ldots = -7 \Rightarrow \frac{1}{1 - 2 \cdot \log x} = -7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - 2 \cdot \log x} = -7 \ / \cdot (1 - 2 \cdot \log x) \Rightarrow 1 = -7 \cdot (1 - 2 \cdot \log x) \Rightarrow 1 = -7 + 14 \cdot \log x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14 \cdot \log x = -7 - 1 \Rightarrow -14 \cdot \log x = -8 \Rightarrow -14 \cdot \log x = -8 \ /: (-14) \Rightarrow \log x = 0.57.$$

Zbog uvjeta

$$-0.5 < \log x < 0.5$$

jednadžba nema rješenja.

Vježba 256

Riješite jednadžbu $a \cdot a^{2 \cdot \log x} \cdot a^{4 \cdot \log^2 x} \cdot a^{8 \cdot \log^3 x} \cdot \ldots = \frac{1}{a^8}$ za pozitivan realan broj a različit od 1.

Rezultat: Jednadžba nema rješenja.

Zadatak 257 (Iva, gimnazija)

Za neki prirodan broj n brojevi $\binom{n}{2}, \frac{n^2 - 3 \cdot n + 36}{2}, \binom{n+1}{2}$ su prva tri člana aritmetičkoga niza. Koliki je zbroj prvih 25 članova toga niza?

Rješenje 257

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \; , \; a_3 - a_2 = d \; , \; a_4 - a_3 = d \; , \; a_5 - a_4 = d \; , \; a_6 - a_5 = d \; , \; \ldots \; , \; a_n - a_{n-1} = d \; \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \; , \; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Binomni koeficijent je broj koji se označava s $\binom{n}{r}$ i definira ovako:

$$\binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r},$$

gdje su $n, r \in N_\circ \; , \; 0 \leq r \leq n.$

Brojevi $\binom{n}{2}, \frac{n^2 - 3 \cdot n + 36}{2}, \binom{n+1}{2}$ su prva tri člana aritmetičkoga niza pa vrijedi:

$$2\cdot\frac{n^2-3\cdot n+36}{2}=\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}\Rightarrow 2\cdot\frac{n^2-3\cdot n+36}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{(n+1)\cdot n}{1\cdot 2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2-3\cdot n+36=\frac{n^2-n}{2}+\frac{n^2+n}{2}\Rightarrow n^2-3\cdot n+36=\frac{n^2-n}{2}+\frac{n^2+n}{2}\ /\cdot 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot n^2-6\cdot n+72=n^2-n+n^2+n\Rightarrow 2\cdot n^2-6\cdot n+72=n^2-n+n^2+n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot n^2-6\cdot n+72=n^2+n^2\Rightarrow 2\cdot n^2-6\cdot n+72=n^2+n^2\Rightarrow -6\cdot n+72=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\cdot n=-72\Rightarrow -6\cdot n=-72\ /:(-6)\Rightarrow n=12.$$

Prva tri člana glase:

- $a_1=\binom{n}{2}\Rightarrow a_1=\binom{12}{2}\Rightarrow a_1=\frac{12\cdot 11}{2}\Rightarrow a_1=\frac{12\cdot 11}{2}\Rightarrow a_1=6\cdot 11\Rightarrow a_1=66$
- $a_2=\frac{n^2-3\cdot n+36}{2}\Rightarrow a_2=\frac{12^2-3\cdot 12+36}{2}\Rightarrow a_2=\frac{144-36+36}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_2=\frac{144-36+36}{2}\Rightarrow a_2=\frac{144}{2}\Rightarrow a_2=\frac{144}{2}\Rightarrow a_2=72$$

- $a_3=\binom{n+1}{2}\Rightarrow a_3=\binom{12+1}{2}\Rightarrow a_3=\binom{13}{2}\Rightarrow a_3=\frac{13\cdot 12}{2}\Rightarrow a_3=\frac{13\cdot 12}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_3=13\cdot 6\Rightarrow a_3=78.$$

Diferencija niza je:

$$d=a_2-a_1\Rightarrow d=72-66\Rightarrow d=6$$

ili

$$d=a_3-a_2\Rightarrow d=78-72\Rightarrow d=6.$$

Zbroj prvih 25 članova aritmetičkog niza iznosi:

$$S_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right]\Rightarrow\begin{bmatrix}n=25\\ a_1=66\\ d=6\end{bmatrix}\Rightarrow S_{25}=\frac{25}{2}\cdot\left[2\cdot 66+(25-1)\cdot 6\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{25}=\frac{25}{2}\cdot\left[132+24\cdot 6\right]\Rightarrow$$  $$\Rightarrow S_{25}=3450.$$

Vježba 257

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 258 (Blaženka, ekonomska škola)

Nađi opći član aritmetičkog niza log 4, log 8, log 16, …

Rješenje 258

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_{\underset{\rightarrow}{b}} a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam
Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

Prvi član niza je $a_1 = \log 4$. Uvjerimo se da je razlika $d = \log 2$.

- $d = \log 8 - \log 4 \Rightarrow d = \log \frac{8}{4} \Rightarrow d = \log \frac{8}{4} \Rightarrow d = \log 2$
- $d = \log 16 - \log 8 \Rightarrow d = \log \frac{16}{8} \Rightarrow d = \log \frac{16}{8} \Rightarrow d = \log 2.$

Opći član je

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_n = \log 4 + (n-1) \cdot \log 2 \Rightarrow a_n = \log 2^2 + (n-1) \cdot \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 2 \cdot \log 2 + (n-1) \cdot \log 2 \Rightarrow a_n = (2 + n - 1) \cdot \log 2 \Rightarrow a_n = (n+1) \cdot \log 2.$$

Vježba 258

Nađi opći član aritmetičkog niza log 3, log 6, log 12, …

Rezultat: $a_n = \log 3 + (n-1) \cdot \log 2.$

Zadatak 259 (Blaženka, ekonomska škola)

Ispitaj je li broj 32768 član geometrijskog niza $\frac{1}{2}, -2, 8, -32, \ldots$

Rješenje 259

Ponovimo!

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad , \quad n \ge 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \ne 0 \quad , \quad n \ne 1.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam
Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

$$\left.\begin{array}{l} (-a)^n = +a^n,\ a > 0\ ,\ n \text{ je paran broj} \\ (-a)^n = -a^n,\ a > 0\ ,\ n \text{ je neparan broj} \end{array}\right\}.$$

Ako je:

- baza negativan broj mora biti u zagradi
- eksponent paran broj rezultat potencije bit će pozitivan broj
- eksponent neparan broj rezultat potencije bit će negativan broj.

Prvi član niza je $a_1 = \frac{1}{2}$. Uvjerimo se da je količnik q = – 4.

- $q = \frac{-2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow q = \frac{-\frac{2}{1}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow q = -4$
- $q = \frac{8}{-2} \Rightarrow q = \frac{8}{-2} \Rightarrow q = -4$
- $q = \frac{-32}{8} \Rightarrow q = \frac{-32}{8} \Rightarrow q = -4.$

Opći član je

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot (-4)^{n-1}.$$

Pitamo se postoji li prirodan broj n takav da je

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2} \cdot (-4)^{n-1} \\ a_n = 32768 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (-4)^{n-1} = 32768 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (-4)^{n-1} = 32768 \ / \cdot 2 \Rightarrow (-4)^{n-1} = 65536.$$

1.inačica

$$(-4)^{n-1} = 65536 \Rightarrow (-1 \cdot 4)^{n-1} = 65536 \Rightarrow (-1)^{n-1} \cdot 4^{n-1} = 65536.$$

Izraz $(-1)^{n-1}$ mora biti pozitivan broj jer je 4^{n-1} pozitivan broj. To je moguće ako je eksponent n – 1 paran broj, tj. ako je n neparan broj.
Ako je n – 1 neparan broj dalje slijedi:

$$(-1)^{n-1} \cdot 4^{n-1} = 65536 \Rightarrow 1 \cdot 4^{n-1} = 65536 \Rightarrow 4^{n-1} = 65536 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^{n-1} = 65536 \ / \log \Rightarrow \log 4^{n-1} = \log 65536 \Rightarrow (n-1) \cdot \log 4 = \log 65536 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n-1) \cdot \log 4 = \log 65536 \ /: \log 4 \Rightarrow n-1 = \frac{\log 65536}{\log 4} \Rightarrow n = \frac{\log 65536}{\log 4} + 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow n = 9.$

Broj 9 je neparan broj pa vrijedi

$$a_9 = 32768.$$

2.inačica

$$(-4)^{n-1} = 65536 \Rightarrow (-1 \cdot 4)^{n-1} = 65536 \Rightarrow (-1)^{n-1} \cdot 4^{n-1} = 65536.$$

Izraz $(-1)^{n-1}$ mora biti pozitivan broj jer je 4^{n-1} pozitivan broj. To je moguće ako je eksponent n – 1 paran broj, tj. ako je n neparan broj.
Ako je n – 1 neparan broj dalje slijedi:

$$(-1)^{n-1} \cdot 4^{n-1} = 65536 \Rightarrow 1 \cdot 4^{n-1} = 65536 \Rightarrow 4^{n-1} = 65536 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^{n-1} = 4^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 8+1 \Rightarrow n = 9.$$

Broj 9 je neparan broj pa vrijedi

$$a_9 = 32768.$$

Vježba 259

Ispitaj je li broj 98415 član geometrijskog niza 15, 45, 135, 405, …

Rezultat: Da, $a_9 = 98415$.

Zadatak 260 (Ivana, gimnazija)

The sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ starts with $a_1 = 49$. To work out a_{n+1} for $n \geq 1$ you add 1 to the digit sum of a_n and square the result. So e.g. $a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 196$. Work out a_{2019}.

A. 121 *B.* 25 *C.* 64 *D.* 400 *E.* 49

Rješenje 260

Ponovimo!

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.
Prirodni je broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.
Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

$a_1 = 49$	$a_2 = (4+9+1)^2 = 196$	$a_3 = (1+9+6+1)^2 = 289$	$a_4 = (2+8+9+1)^2 = 400$
$a_5 = (4+0+0+1)^2 = 25$	$a_6 = (2+5+1)^2 = 64$	$a_7 = (6+4+1)^2 = 121$	$a_8 = (1+2+1+1)^2 = 25$
$a_9 = (2+5+1)^2 = 64$	$a_{10} = (6+4+1)^2 = 121$	$a_{11} = (1+2+1+1)^2 = 25$	$a_{12} = (2+5+1)^2 = 64$
$a_{13} = (6+4+1)^2 = 121$	$a_{14} = (1+2+1+1)^2 = 25$	$a_{15} = (2+5+1)^2 = 64$	$a_{16} = (6+4+1)^2 = 121$
$a_{17} = (1+2+1+1)^2 = 25$	$a_{18} = (2+5+1)^2 = 64$	$a_{19} = (6+4+1)^2 = 121$	$a_{20} = (1+2+1+1)^2 = 25$
$a_{21} = (2+5+1)^2 = 64$	$a_{22} = (6+4+1)^2 = 121$	$a_{23} = (1+2+1+1)^2 = 25$	$a_{24} = (2+5+1)^2 = 64$
…	…	…	…
$a_{2019} = 64$			

Počevši od petog člana stalno se ponavljaju vrijednosti 25, 64 i 121. Svi članovi kojima je indeks djeljiv s 3 imaju vrijednost 64.

$$a_6 = a_9 = a_{12} = a_{15} = a_{18} = a_{21} = ... = a_{2019} = 64.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 260

The sequence a_1, a_2, a_3, … starts with $a_1 = 49$. To work out a_{n+1} for $n \geq 1$ you add 1 to the digit sum of a_n and square the result. So e.g. $a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 196$. Work out a_{2022}.

A. 121 *B.* 25 *C.* 64 *D.* 400 *E.* 49

Rezultat: C.