Zadatak 241 (Dora, gimnazija)

Zadan je niz (a_n) za koji vrijedi $a_n = a_{n-1} - 0.7$, $n > 1$ i $a_1 = 10$. Koliko iznosi osmi član toga niza?

Rješenje 241

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n. Broj a_n zove se opći član niza.
Niz možemo zadati rekurzivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću već definiranih članova. Dakle, član niza dobiva se preko nekoliko svoji prethodnika. Ako znamo kako n – ti član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, onda ga možemo izračunati.
Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a + n = b \quad , \quad a = b - n \quad , \quad b - a = n.$$

1.inačica

Iz pravila kojim je definiran niz (a_n) redom računamo:

- $a_2 = a_1 - 0.7 = 10 - 0.7 = 9.3$
- $a_3 = a_2 - 0.7 = 9.3 - 0.7 = 8.6$
- $a_4 = a_3 - 0.7 = 8.6 - 0.7 = 7.9$
- $a_5 = a_4 - 0.7 = 7.9 - 0.7 = 7.2$
- $a_6 = a_5 - 0.7 = 7.2 - 0.7 = 6.5$
- $a_7 = a_6 - 0.7 = 6.5 - 0.7 = 5.8$
- $a_8 = a_7 - 0.7 = 5.8 - 0.7 = 5.1.$

2.inačica

Uočimo da je svaki član zadanog niza, osim prvoga člana, za 0.7 manji od prethodnog člana. To znači da je a_8 za 4.9 manji od a_1.

$$7 \cdot 0.7 = 4.9.$$

Osmi član jednak je

$$a_8 = a_1 - 4.9 \Rightarrow \left[a_1 = 10 \right] \Rightarrow a_8 = 10 - 4.9 \Rightarrow a_8 = 5.1.$$

3.inačica

Iz pravila kojim je definiran niz (a_n) redom računamo:

$$\left.\begin{matrix} a_2 = a_1 - 0.7 \\ a_3 = a_2 - 0.7 \\ a_4 = a_3 - 0.7 \\ a_5 = a_4 - 0.7 \\ a_6 = a_5 - 0.7 \\ a_7 = a_6 - 0.7 \\ a_8 = a_7 - 0.7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{matrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$$

$$= a_1 - 0.7 + a_2 - 0.7 + a_3 - 0.7 + a_4 - 0.7 + a_5 - 0.7 + a_6 - 0.7 + a_7 - 0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$$

$$= a_1 - 0.7 + a_2 - 0.7 + a_3 - 0.7 + a_4 - 0.7 + a_5 - 0.7 + a_6 - 0.7 + a_7 - 0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_8 = a_1 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 \Rightarrow a_8 = a_1 - 7 \cdot 0.7 \Rightarrow a_8 = a_1 - 4.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_1 = 10 \right] \Rightarrow a_8 = 10 - 4.9 \Rightarrow a_8 = 5.1.$$

Vježba 241

Zadan je niz (a_n) za koji vrijedi $a_n = a_{n-1} - 0.7$, $n > 1$ i $a_1 = 10$. Koliko iznosi peti član toga niza?

Rezultat: 7.2.

Zadatak 242 (Katarina, srednja škola)

U geometrijskom nizu je zbroj prvih 6 članova jednak trostrukom zbroju prvih triju članova. Kvocijent niza je jednak:

$$A.\ \sqrt{3} \qquad B.\ \sqrt[3]{2} \qquad C.\ 2 \qquad D.\ \sqrt{2} \qquad E.\ \sqrt[3]{3}$$

Rješenje 242

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Kako zapisati da je broj b jednak trostrukom broju a?

$$b = 3 \cdot a.$$

Kako zapisati da je broj b jednak jednoj trećini broja a?

$$b = \frac{1}{3} \cdot a.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \ , \ q \neq 1.$$

$$S_6 = 3 \cdot S_3 \Rightarrow a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} \Rightarrow [q \neq 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} \ / \cdot \frac{1-q}{a_1} \Rightarrow 1 - q^6 = 3 \cdot \left(1 - q^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \left(q^3\right)^2 = 3 \cdot \left(1 - q^3\right) \Rightarrow \left(1 - q^3\right) \cdot \left(1 + q^3\right) = 3 \cdot \left(1 - q^3\right) \Rightarrow [q \neq 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - q^3\right) \cdot \left(1 + q^3\right) = 3 \cdot \left(1 - q^3\right) \ / \cdot \frac{1}{1-q^3} \Rightarrow 1 + q^3 = 3 \Rightarrow q^3 = 3 - 1 \Rightarrow q^3 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ q^3 = 2\ /\sqrt[3]{\ }\ \Rightarrow\ q = \sqrt[3]{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 242

U geometrijskom nizu je zbroj prva tri člana jednak jednoj trećini zbroja prvih 6 članova. Kvocijent niza je jednak:

$$A.\ \sqrt{3} \qquad B.\ \sqrt[3]{2} \qquad C.\ 2 \qquad D.\ \sqrt{2} \qquad E.\ \sqrt[3]{3}$$

Rezultat: B.

Zadatak 243 (Katarina, maturantica)

Brojevi x, 2 · x, 2 · y, x – y + 12 prva su četiri člana aritmetičkog niza. Koji je realan broj devedeseti član toga niza?

Rješenje 243

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d\ ,\ a_3 - a_2 = d\ ,\ a_4 - a_3 = d\ ,\ a_5 - a_4 = d\ ,\ a_6 - a_5 = d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n - a_{n-1} = d\ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d\ ,\ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \ne 0\ ,\ n \ne 1.$$

Budući da su zadana prva četiri člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$a_1 = x\quad ,\quad a_2 = 2\cdot x\quad ,\quad a_3 = 2\cdot y\quad ,\quad a_4 = x - y + 12.$$

Iz svojstva aritmetičkog niza napišemo sustav jednadžba.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot a_2 = a_1 + a_3 \\ 2\cdot a_3 = a_2 + a_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot 2\cdot x = x + 2\cdot y \\ 2\cdot 2\cdot y = 2\cdot x + x - y + 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x = x + 2\cdot y \\ 4\cdot y = 3\cdot x - y + 12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x - x - 2\cdot y = 0 \\ 4\cdot y - 3\cdot x + y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x - 2\cdot y = 0 \\ -3\cdot x + 5\cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot y = 12\ /:3\ \Rightarrow\ y = 4.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} y=4 \\ 3\cdot x-2\cdot y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot x-2\cdot 4=0 \Rightarrow 3\cdot x-8=0 \Rightarrow 3\cdot x=8 \Rightarrow 3\cdot x=8 \;/:3 \Rightarrow x=\frac{8}{3}.$$

Zadani aritmetički niz ima:

- prvi član

$$a_1=x \Rightarrow a_1=\frac{8}{3}$$

- razliku (diferenciju)

$$d=a_2-a_1 \Rightarrow d=2\cdot x-x \Rightarrow d=x \Rightarrow d=\frac{8}{3}.$$

Devedeseti član toga niza glasi:

$$a_{90}=a_1+89\cdot d \Rightarrow a_{90}=\frac{8}{3}+89\cdot\frac{8}{3} \Rightarrow a_{90}=\frac{8}{3}\cdot(1+89) \Rightarrow a_{90}=\frac{8}{3}\cdot 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{90}=\frac{8}{3}\cdot 90 \Rightarrow a_{90}=8\cdot 30 \Rightarrow a_{90}=240.$$

Vježba 243

Brojevi x, 2 · x, 2 · y, x – y + 12 prva su četiri člana aritmetičkog niza. Koji je realan broj trideseti član toga niza?

Rezultat: 80.

Zadatak 244 (Branka, ekonomska škola)

Zbroj svih brojeva između 50 i 350, kojima je zadnja znamenka jednaka 1, je:

$A.\ 4566 \qquad B.\ 5880 \qquad C.\ 5539 \qquad D.\ 5208 \qquad E.\ 9877$

Rješenje 244

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right].$$

Niz brojeva 51, 61, 71, … , 331, 341 je aritmetički niz za koji vrijedi:

$$51,\ 61,\ 71,\ \ldots\ ,\ 331,\ 341 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=51 \\ a_n=341 \\ d=10 \end{array}\right\}.$$

Broj članova je:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d \Rightarrow a_1+(n-1)\cdot d=a_n \Rightarrow (n-1)\cdot d=a_n-a_1 \Rightarrow (n-1)\cdot d=a_n-a_1 \;/\cdot\frac{1}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1=\frac{a_n-a_1}{d} \Rightarrow n=\frac{a_n-a_1}{d}+1 \Rightarrow n=\frac{341-51}{10}+1 \Rightarrow n=30.$$

Računamo zbroj članova niza.

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] \Rightarrow \begin{bmatrix} n = 10 \\ a_1 = 51 \\ a_n = 341 \end{bmatrix} \Rightarrow s_{30} = \frac{30}{2} \cdot \left[51 + 341 \right] \Rightarrow s_{30} = 5880.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 244

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 245 (Danijel, tehnička škola)

Ispitaj monotonost niza (a_n) ako je $a_n = \frac{3 \cdot n + 5}{2 \cdot n + 1}.$

Rješenje 245

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Niz realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ je monotono rastući niz ako je $a_n \le a_{n+1}$ za svaki $n \in N$.
(Da je niz monotono rastući dovoljno je pokazati da vrijedi $a_{n+1} - a_n \ge 0.$)

Niz realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ je monotono padajući niz ako je $a_n \ge a_{n+1}$ za svaki $n \in N$.
(Da je niz monotono padajući dovoljno je pokazati da vrijedi $a_{n+1} - a_n \le 0.$)

Odredimo razliku $a_{n+1} - a_n$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3 \cdot (n+1) + 5}{2 \cdot (n+1) + 1} - \frac{3 \cdot n + 5}{2 \cdot n + 1} = \frac{3 \cdot n + 3 + 5}{2 \cdot n + 2 + 1} - \frac{3 \cdot n + 5}{2 \cdot n + 1} = \frac{3 \cdot n + 8}{2 \cdot n + 3} - \frac{3 \cdot n + 5}{2 \cdot n + 1} =$$

$$= \frac{(3 \cdot n + 8) \cdot (2 \cdot n + 1) - (3 \cdot n + 5) \cdot (2 \cdot n + 3)}{(2 \cdot n + 3) \cdot (2 \cdot n + 1)} = \frac{6 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 16 \cdot n + 8 - \left(6 \cdot n^2 + 9 \cdot n + 10 \cdot n + 15\right)}{(2 \cdot n + 3) \cdot (2 \cdot n + 1)} =$$

$$= \frac{6 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 16 \cdot n + 8 - 6 \cdot n^2 - 9 \cdot n - 10 \cdot n - 15}{(2 \cdot n + 3) \cdot (2 \cdot n + 1)} = \frac{6 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 16 \cdot n + 8 - 6 \cdot n^2 - 9 \cdot n - 10 \cdot n - 15}{(2 \cdot n + 3) \cdot (2 \cdot n + 1)} =$$

$$= \frac{8 - 15}{(2 \cdot n + 3) \cdot (2 \cdot n + 1)} = \frac{-7}{(2 \cdot n + 3) \cdot (2 \cdot n + 1)} = -\frac{7}{(2 \cdot n + 3) \cdot (2 \cdot n + 1)} \Rightarrow a_{n+1} - a_n \le 0.$$

Niz je monotono padajući.

Vježba 245

Ispitaj monotonost niza (a_n) ako je $a_n = \frac{3 - n}{2 \cdot n - 1}.$

Rezultat: Monotono padajući.