

Zadatak 241 (Dora, gimnazija)

Zadan je niz (a_n) za koji vrijedi $a_n = a_{n-1} - 0.7$, $n > 1$ i $a_1 = 10$. Koliko iznosi osmi član toga niza?

Rješenje 241

Ponovimo!

$$\left. \begin{array}{l} a^1 = a \\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ a = b \\ c = d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n . Broj a_n zove se opći član niza.

Niz možemo zadati rekurzivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću već definiranih članova. Dakle, član niza dobiva se preko nekoliko svoji prethodnika. Ako znamo kako n – ti član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, onda ga možemo izračunati.

Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b ?

$$a + n = b \quad , \quad a = b - n \quad , \quad b - a = n.$$

1. inačica

Iz pravila kojim je definiran niz (a_n) redom računamo:

- $a_2 = a_1 - 0.7 = 10 - 0.7 = 9.3$
- $a_3 = a_2 - 0.7 = 9.3 - 0.7 = 8.6$
- $a_4 = a_3 - 0.7 = 8.6 - 0.7 = 7.9$
- $a_5 = a_4 - 0.7 = 7.9 - 0.7 = 7.2$
- $a_6 = a_5 - 0.7 = 7.2 - 0.7 = 6.5$
- $a_7 = a_6 - 0.7 = 6.5 - 0.7 = 5.8$
- $a_8 = a_7 - 0.7 = 5.8 - 0.7 = 5.1.$

2. inačica

Uočimo da je svaki član zadanog niza, osim prvoga člana, za 0.7 manji od prethodnog člana. To znači da je a_8 za 4.9 manji od a_1 .

$$7 \cdot 0.7 = 4.9.$$

Osmi član jednak je

$$a_8 = a_1 - 4.9 \Rightarrow [a_1 = 10] \Rightarrow a_8 = 10 - 4.9 \Rightarrow a_8 = 5.1.$$

3. inačica

Iz pravila kojim je definiran niz (a_n) redom računamo:

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 - 0.7 \\ a_3 = a_2 - 0.7 \\ a_4 = a_3 - 0.7 \\ a_5 = a_4 - 0.7 \\ a_6 = a_5 - 0.7 \\ a_7 = a_6 - 0.7 \\ a_8 = a_7 - 0.7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array} \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 =$$
$$= a_1 - 0.7 + a_2 - 0.7 + a_3 - 0.7 + a_4 - 0.7 + a_5 - 0.7 + a_6 - 0.7 + a_7 - 0.7 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \\ &= a_1 - 0.7 + a_2 - 0.7 + a_3 - 0.7 + a_4 - 0.7 + a_5 - 0.7 + a_6 - 0.7 + a_7 - 0.7 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_8 &= a_1 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 - 0.7 \Rightarrow a_8 = a_1 - 7 \cdot 0.7 \Rightarrow a_8 = a_1 - 4.9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow [a_1 = 10] \Rightarrow a_8 = 10 - 4.9 \Rightarrow a_8 = 5.1. \end{aligned}$$

Vježba 241

Zadan je niz (a_n) za koji vrijedi $a_n = a_{n-1} - 0.7$, $n > 1$ i $a_1 = 10$. Koliko iznosi peti član toga niza?

Rezultat: 7.2.

Zadatak 242 (Katarina, srednja škola)

U geometrijskom nizu je zbroj prvih 6 članova jednak trostrukom zbroju prvih triju članova. Kvocijent niza je jednak:

$$A. \sqrt{3} \quad B. \sqrt[3]{2} \quad C. 2 \quad D. \sqrt{2} \quad E. \sqrt[3]{3}$$

Rješenje 242

Ponovimo!

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Kako zapisati da je broj b jednak trostrukom broju a?

$$b = 3 \cdot a.$$

Kako zapisati da je broj b jednak jednoj trećini broja a?

$$b = \frac{1}{3} a.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

$$S_6 = 3 \cdot S_3 \Rightarrow a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} \Rightarrow [q \neq 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} \cdot \frac{1-q}{a_1} \Rightarrow 1-q^6 = 3 \cdot (1-q^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - (q^3)^2 = 3 \cdot (1-q^3) \Rightarrow (1-q^3) \cdot (1+q^3) = 3 \cdot (1-q^3) \Rightarrow [q \neq 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-q^3) \cdot (1+q^3) = 3 \cdot (1-q^3) \cdot \frac{1}{1-q} \Rightarrow 1+q^3 = 3 \Rightarrow q^3 = 3-1 \Rightarrow q^3 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^3 = 2 \quad / \quad \sqrt[3]{\quad} \Rightarrow q = \sqrt[3]{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 242

U geometrijskom nizu je zbroj prva tri člana jednak jednoj trećini zbroja prvih 6 članova. Kvocijent niza je jednak:

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$ E. $\sqrt[3]{3}$

Rezultat: B.

Zadatak 243 (Katarina, maturantica)

Brojevi $x, 2 \cdot x, 2 \cdot y, x - y + 12$ prva su četiri člana aritmetičkog niza. Koji je realan broj devedeseti član toga niza?

Rješenje 243

Ponovimo!
Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad a_5 - a_4 = d, \quad a_6 - a_5 = d, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = d \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Budući da su zadana prva četiri člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$a_1 = x, \quad a_2 = 2 \cdot x, \quad a_3 = 2 \cdot y, \quad a_4 = x - y + 12.$$

Iz svojstva aritmetičkog niza napišemo sustav jednačja.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot a_2 = a_1 + a_3 \\ 2 \cdot a_3 = a_2 + a_4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot 2 \cdot x = x + 2 \cdot y \\ 2 \cdot 2 \cdot y = 2 \cdot x + x - y + 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot x = x + 2 \cdot y \\ 4 \cdot y = 3 \cdot x - y + 12 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot x - x - 2 \cdot y = 0 \\ 4 \cdot y - 3 \cdot x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ -3 \cdot x + 5 \cdot y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow 3 \cdot y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot y = 12 \quad /: 3 \Rightarrow y = 4.$$

Računamo x .

$$\left. \begin{array}{l} y = 4 \\ 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot x - 2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x - 8 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x = 8 \Rightarrow 3 \cdot x = 8 \quad / : 3 \Rightarrow x = \frac{8}{3}.$$

Zadani aritmetički niz ima:

- prvi član

$$a_1 = x \Rightarrow a_1 = \frac{8}{3}$$

- razliku (diferenciju)

$$d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 2 \cdot x - x \Rightarrow d = x \Rightarrow d = \frac{8}{3}.$$

Devedeseti član toga niza glasi:

$$\begin{aligned} a_{90} &= a_1 + 89 \cdot d \Rightarrow a_{90} = \frac{8}{3} + 89 \cdot \frac{8}{3} \Rightarrow a_{90} = \frac{8}{3} \cdot (1 + 89) \Rightarrow a_{90} = \frac{8}{3} \cdot 90 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_{90} = \frac{8}{3} \cdot 90 \Rightarrow a_{90} = 8 \cdot 30 \Rightarrow a_{90} = 240. \end{aligned}$$

Vježba 243

Brojevi $x, 2 \cdot x, 2 \cdot y, x - y + 12$ prva su četiri člana aritmetičkog niza. Koji je realan broj trideseti član toga niza?

Rezultat: 80.

www.halapa.com