

Zadatak 221 (Karlo, gimnazija)

Dokazati da je u tablici

1
2, 3, 4
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
.....

zbroj svih članova u svakom redu jednak kvadratu srednjeg člana.

Rješenje 221

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad a_5 - a_4 = d, \quad a_6 - a_5 = d, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = d \dots$$
$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_n].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Primijetimo da k – ti redak ove tablice ima oblik

$$k, k+1, k+2, \dots, 2 \cdot k - 1, \dots, 3 \cdot k - 3, 3 \cdot k - 2.$$

To je aritmetički niz sa razlikom $d = 1$.

$$d = k+1 - k = k+2 - (k+2) = \dots = 3 \cdot k - 2 - (3 \cdot k - 3) = 1.$$

Tada je

$$a_1 = k, \quad a_n = 3 \cdot k - 2.$$

Određimo n broj članova niza.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 3 \cdot k - 2, \quad a_1 = k, \quad d = 1 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot k - 2 = k + (n-1) \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot k - 2 = k + n - 1 \Rightarrow k + n - 1 = 3 \cdot k - 2 \Rightarrow n = 3 \cdot k - 2 - k + 1 \Rightarrow n = 2 \cdot k - 1.$$

Zbroj članova u k – tom redu niza iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} n = 2 \cdot k - 1, \quad a_1 = k, \quad a_n = 3 \cdot k - 2 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_n] \end{array} \right\} \Rightarrow s_n = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot [k + 3 \cdot k - 2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot [4 \cdot k - 2] \Rightarrow s_n = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot 2 \cdot [2 \cdot k - 1] \Rightarrow s_n = \frac{2 \cdot k - 1}{2} \cdot 2 \cdot [2 \cdot k - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n = (2 \cdot k - 1) \cdot (2 \cdot k - 1) \Rightarrow s_n = (2 \cdot k - 1)^2.$$

Vježba 221

Nema vježbe!

Rezultat: ☺.

Zadatak 222 (Ankica, srednja škola)

U nekom geometrijskom nizu je $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_{20} = 32$. Odredite 11. član ovog niza.

Rješenje 222

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$n \cdot r \sqrt[n]{a^{m \cdot r}} = n \sqrt[n]{a^m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

$$a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_8 \cdot a_{10} \cdot a_{12} \cdot a_{14} \cdot a_{16} \cdot a_{18} \cdot a_{20} = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^3 \cdot a_1 \cdot q^5 \cdot a_1 \cdot q^7 \cdot a_1 \cdot q^9 \cdot a_1 \cdot q^{11} \cdot a_1 \cdot q^{13} \cdot a_1 \cdot q^{15} \cdot a_1 \cdot q^{17} \cdot a_1 \cdot q^{19} = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^{10} \cdot q^{100} = 32 \Rightarrow a_1^{10} \cdot (q^{10})^{10} = 32 \Rightarrow (a_1 \cdot q^{10})^{10} = 32 \Rightarrow (a_1 \cdot q^{10})^{10} = 32 / \sqrt[10]{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 \cdot q^{10} = \sqrt[10]{32} \Rightarrow a_1 \cdot q^{10} = \sqrt[10]{2^5} \Rightarrow a_1 \cdot q^{10} = \sqrt[10]{2^5} \Rightarrow a_1 \cdot q^{10} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [a_{11} = a_1 \cdot q^{10}] \Rightarrow a_{11} = \sqrt{2}.$$

Vježba 222

U nekom geometrijskom nizu je $a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot \dots \cdot a_{20} = 1024$. Odredite 11. član ovog niza.

Rezultat: 2.

Zadatak 223 (Ankica, srednja škola)

Zbroj prvih n članova niza zadan je formulom $S_n = 3 \cdot (1 - 2^n)$ za svaki prirodni broj n .

Odredite taj niz.

Rješenje 223

Ponovimo!

$$\left. \begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array} \right\} \Rightarrow a-c=b-d, \quad a^1=a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n . Broj a_n zove se opći član niza. Ako promatramo samo prvih n članova niza govorimo o konačnom nizu:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Tada se zbroj prvih n članova niza zapisuje

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

$$\left. \begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n - a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n - a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \left[S_n = 3 \cdot (1 - 2^n) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 3 \cdot (1 - 2^n) - 3 \cdot (1 - 2^{n-1}) \Rightarrow a_n = 3 - 3 \cdot 2^n - 3 + 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 3 - 3 \cdot 2^n - 3 + 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = -3 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = -3 \cdot 2^{n-1} \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = -3 \cdot 2^{n-1} \cdot 2 + 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = -6 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = -3 \cdot 2^{n-1}.$$

Vježba 223

Nema vježbe!

Rezultat: ☺.

Zadatak 224 (Neno, gimnazija)

$$\text{Zadan je opći član niza formulom } a_n = \begin{cases} 2 \cdot n + 1, & n = 3 \cdot k - 2 \\ \frac{n}{n+1}, & n = 3 \cdot k - 1, k \in \mathbb{N}. \\ n^2 - 1, & n = 3 \cdot k \end{cases}$$

Oredi jedanaesti, dvanaesti i trinaesti član niza.

Rješenje 224

Ponovimo!

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n . Broj a_n zove se opći član niza.

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Iz općeg člana vidimo da se članovi niza određuju prema ostatku pri dijeljenju indeksa člana brojem 3. Zato je:

$$\left. \begin{array}{l} 11 = 3 \cdot 4 - 1 \\ 12 = 3 \cdot 4 \\ 13 = 3 \cdot 5 - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_n = \frac{n}{n+1}, n = 3 \cdot k - 1 \\ a_n = n^2 - 1, n = 3 \cdot k \\ a_n = 2 \cdot n + 1, n = 3 \cdot k - 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_{11} = \frac{11}{11+1} \\ a_{12} = 12^2 - 1 \\ a_{13} = 2 \cdot 13 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_{11} = \frac{11}{12} \\ a_{12} = 143 \\ a_{13} = 27 \end{array} \right\}.$$

Vježba 224

$$\text{Zadan je opći član niza formulom } a_n = \begin{cases} 2 \cdot n + 3, n = 3 \cdot k - 2 \\ \frac{n+1}{n}, n = 3 \cdot k - 1, k \in \mathbb{N}. \\ n^2 + 1, n = 3 \cdot k \end{cases}$$

Odredi jedanaesti, dvanaesti i trinaesti član niza.

Rezultat: $a_{11} = \frac{12}{11}$, $a_{12} = 145$, $a_{13} = 29$.

Zadatak 225 (Marija, gimnazija)

U aritmetičkom nizu prvi član iznosi 1, a zbroj prvih pet članova jednak je četvrtini zbroja sljedećih pet članova. Kolika je razlika toga niza?

Rješenje 225

Ponovimo!

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n . Broj a_n zove se opći član niza.

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d, a_5 - a_4 = d, a_6 - a_5 = d, \dots, a_n - a_{n-1} = d \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d, n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kako zapisati n – ti dio broja a?

$$\frac{1}{n} \cdot a.$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{4} \cdot (a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}).$$

Sve članove izrazimo pomoći a_1 i d.

$$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2 \cdot d + a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 4 \cdot d = \frac{1}{4} \cdot (a_1 + 5 \cdot d + a_1 + 6 \cdot d + a_1 + 7 \cdot d + a_1 + 8 \cdot d + a_1 + 9 \cdot d) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5 \cdot a_1 + 10 \cdot d &= \frac{1}{4} \cdot (5 \cdot a_1 + 35 \cdot d) \Rightarrow [a_1 = 1] \Rightarrow 5 \cdot 1 + 10 \cdot d = \frac{1}{4} \cdot (5 \cdot 1 + 35 \cdot d) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5 + 10 \cdot d = \frac{1}{4} \cdot (5 + 35 \cdot d) \Rightarrow 5 \cdot (1 + 2 \cdot d) = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot (1 + 7 \cdot d) \Rightarrow \\ \Rightarrow 5 \cdot (1 + 2 \cdot d) &= \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot (1 + 7 \cdot d) \quad / \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow 4 \cdot (1 + 2 \cdot d) = 1 + 7 \cdot d \Rightarrow 4 + 8 \cdot d = 1 + 7 \cdot d \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8 \cdot d - 7 \cdot d = 1 - 4 \Rightarrow d = -3. \end{aligned}$$

Vježba 225

U aritmetičkom nizu prvi član iznosi 3, a zbroj prvih pet članova jednak je četvrtini zbroja sljedećih pet članova. Kolika je razlika toga niza?

Rezultat: $d = -9$.

Zadatak 226 (Asterix, gimnazija)

Odredi moguću rekursivnu formulu za niz: 5, 9, 17, 33, 65, ... i ispiši naredna dva člana.

Rješenje 226

Ponovimo!

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n . Broj a_n zove se opći član niza.

Niz možemo zadati rekursivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću već definiranih članova. Dakle, član niza dobiva se preko nekoliko svoji prethodnika. Ako znamo kako n – ti član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, onda ga možemo izračunati. Nakon dubokoumnog razmišljanja i puno neprospavanih noći!



$$5, 9, 17, 33, 65, \dots \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = 5 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9 \\ a_3 &= 2 \cdot a_2 - 1 = 2 \cdot 9 - 1 = 18 - 1 = 17 \\ a_4 &= 2 \cdot a_3 - 1 = 2 \cdot 17 - 1 = 34 - 1 = 33 \\ a_5 &= 2 \cdot a_4 - 1 = 2 \cdot 33 - 1 = 66 - 1 = 65 \\ a_6 &= 2 \cdot a_5 - 1 = 2 \cdot 65 - 1 = 130 - 1 = 129 \\ a_7 &= 2 \cdot a_6 - 1 = 2 \cdot 129 - 1 = 258 - 1 = 257 \text{ itd.} \end{aligned}$$

Dakle,

$$5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, \dots$$

Vježba 226

Odredi moguću rekursivnu formulu za niz: 4, 7, 11, 16, 22, ... i ispiši naredna dva člana.

Rezultat: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + (n + 2)$, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, ...

Zadatak 227 (Željka, gimnazija)

Niz (a_n) dan je općim članom a_n ,

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ neparan} \\ n, & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 100 članova ovog niza?

Rješenje 227

Ponovimo!

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n . Broj a_n zove se opći član niza.

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N , a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1, \quad m = 2 \cdot k + 1, \quad k \in N.$$

Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}), \quad m = 2 \cdot k, \quad k \in N.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Riječ je o nizu

$$1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, \dots, 1, 100.$$

Uočimo da su na:

- neparnim mjestima same jedinice

$$\underbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1}_{50 - \text{članova}}$$

Ima 50 jedinica pa je zbroj jednak:

$$50 \cdot 1 = 50.$$

- parnim mjestima uzastopni parni brojevi

$$\underbrace{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots, 100}_{50 - \text{članova}}$$

Ima 50 uzastopnih parnih brojeva pa je zbroj jednak:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100 &= 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 50) = 2 \cdot \frac{50 \cdot (50+1)}{2} = 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = \\ &= 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 50 \cdot 51 = 2550. \end{aligned}$$

Zbroj prvih 100 članova ovog niza iznosi:

$$50 + 2550 = 2600.$$

Vježba 227

Niz (a_n) dan je općim članom a_n ,

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n \text{ neparan} \\ n, & \text{ako je } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Koliki je zbroj prvih 50 članova ovog niza?

Rezultat: 675.

Zadatak 228 (Asterix, gimnazija)

Odredite $x \in \langle 0, \pi \rangle$ za koji su $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $\operatorname{tg} x$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rješenje 228

Ponovimo!

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad a_5 - a_4 = d, \quad a_6 - a_5 = d, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = d \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Trigonometrijska jednačba $\cos x = a$

Jednačba ima rješenje ako i samo ako je

$$-1 \leq a \leq 1.$$

Tada postoji jedinstven kut α u intervalu

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

čiji je kosinus jednak a pa postoji jednačba

$$\cos x = \cos \alpha$$

koja ima dva skupa rješenja:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= -\alpha + k \cdot 2 \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \text{ ili } x_{1,2} = \pm \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Razlomci $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $\operatorname{tg} x$ definirani su za svaki $x \in \langle 0, \pi \rangle$, osim za $\frac{\pi}{2}$ jer $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ nije definiran.

Budući da zadani izrazi tvore tri uzastopna člana aritmetičkog niza, vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sin x} &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{2}{\sin x} = \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{2}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2}{\sin x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} \Rightarrow \frac{2}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x \cdot (2 \cdot \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2 \cdot \cos x - 1 = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Vidi se da ne može biti $\sin x = 0$ jer tada $\frac{1}{\sin x}$ nije definirano. Zato je:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \cos x - 1 = 0 &\Rightarrow 2 \cdot \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cdot \cos x = 1 \quad /: 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Dakle, na skupu $\langle 0, \pi \rangle \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ je $x = \frac{\pi}{3}$ jedinstveno rješenje.

Vježba 228

Odredite $x \in \langle 0, \pi \rangle$ za koji su $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ uzastopni članovi aritmetičkog niza.

Rezultat: $\frac{\pi}{3}$.

Zadatak 229 (Asterix, gimnazija)

Broj q količnik je geometrijskog niza s pozitivnim članovima. Za koji od navedenih količnika q tri uzastopna člana geometrijskog niza mogu biti duljine stranica nekog trokuta?

A. za $q = 0.25$ B. za $q = 0.5$ C. za $q = 1.5$ D. za $q = 2$

Rješenje 229

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Svaka stranica trokuta manja je od zbroja preostalih dviju stranica.

$$a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

Pretpostavimo da je a pozitivan broj.

- Za $q = 0.25$ tri uzastopna člana geometrijskog niza su:

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2 \Rightarrow a, 0.25 \cdot a, 0.0625 \cdot a.$$

Provjerimo mogu li oni biti duljine stranica nekog trokuta.

$$a, 0.25 \cdot a, 0.0625 \cdot a$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 0.25 \cdot a > 0.0625 \cdot a \\ a + 0.0625 \cdot a > 0.25 \cdot a \\ 0.25 \cdot a + 0.0625 \cdot a > a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.25 \cdot a > 0.0625 \cdot a \\ 1.0625 \cdot a > 0.25 \cdot a \\ 0.3125 \cdot a > a \text{ nije točno} \end{array} \right\}.$$

Za $q = 0.25$ tri uzastopna člana geometrijskog niza ne mogu biti duljine stranica nekog trokuta.

- Za $q = 0.5$ tri uzastopna člana geometrijskog niza su:

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2 \Rightarrow a, 0.5 \cdot a, 0.25 \cdot a.$$

Provjerimo mogu li oni biti duljine stranica nekog trokuta.

$$a, 0.5 \cdot a, 0.25 \cdot a$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 0.5 \cdot a > 0.25 \cdot a \\ a + 0.25 \cdot a > 0.5 \cdot a \\ 0.5 \cdot a + 0.25 \cdot a > a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1.5 \cdot a > 0.25 \cdot a \\ 1.25 \cdot a > 0.5 \cdot a \\ 0.75 \cdot a > a \text{ nije točno} \end{array} \right\}.$$

Za $q = 0.5$ tri uzastopna člana geometrijskog niza ne mogu biti duljine stranica nekog trokuta.

- Za $q = 1.5$ tri uzastopna člana geometrijskog niza su:

$$a, a \cdot q, a \cdot q^2 \Rightarrow a, 1.5 \cdot a, 2.25 \cdot a.$$

Provjerimo mogu li oni biti duljine stranica nekog trokuta.

$$a, 1.5 \cdot a, 2.25 \cdot a$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 1.5 \cdot a > 2.25 \cdot a \\ a + 2.25 \cdot a > 1.5 \cdot a \\ 1.5 \cdot a + 2.25 \cdot a > a \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2.5 \cdot a > 2.25 \cdot a \\ 3.25 \cdot a > 1.5 \cdot a \\ 3.75 \cdot a > a \end{array} \right\}.$$

Za $q = 1.5$ tri uzastopna člana geometrijskog niza mogu biti duljine stranica nekog trokuta.

Odgovor je pod C.

Odgovor D ne treba ni računati jer od 4 ponuđena odgovora (A, B, C i D) samo jedan mora biti točan.

Vježba 229

Nema vježbe!

Rezultat: ☺

Zadatak 230 (Lucia, ekonomija ☺)

Ispitajte je li 96 član aritmetičkog niza, za koji je $a_3 = 26$, $a_{15} - a_{12} = 30$.

Rješenje 230

Ponovimo!

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d, a_5 - a_4 = d, a_6 - a_5 = d, \dots, a_n - a_{n-1} = d \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d, n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Najprije odredimo prvi član a_1 i razliku (diferenciju) d niza iz zadanih uvjeta.

$$\left. \begin{array}{l} a_3 = 26 \\ a_{15} - a_{12} = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ a_1 + 14 \cdot d - (a_1 + 11 \cdot d) = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ a_1 + 14 \cdot d - a_1 - 11 \cdot d = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ a_1 + 14 \cdot d - a_1 - 11 \cdot d = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ 14 \cdot d - 11 \cdot d = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ 3 \cdot d = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ 3 \cdot d = 30 \text{ / : 3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 2 \cdot d = 26 \\ d = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow a_1 + 2 \cdot 10 = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + 20 = 26 \Rightarrow a_1 = 26 - 20 \Rightarrow a_1 = 6.$$

Riječ je o aritmetičkom nizu čiji je prvi član $a_1 = 6$, a razlika (diferencija) $d = 10$.
Ispitajmo je li 96 član toga niza! Idemooooooooo!

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 6, \quad d = 10 \\ a_n = 96 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \right] \Rightarrow 96 = 6 + (n-1) \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 96 = 6 + 10 \cdot n - 10 \Rightarrow 96 = 10 \cdot n - 4 \Rightarrow 10 \cdot n - 4 = 96 \Rightarrow 10 \cdot n = 96 + 4 \Rightarrow 10 \cdot n = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot n = 100 \text{ / : 10} \Rightarrow n = 10.$$



Super, broj 96 je **deseti** član toga niza. Broj n redni je broj člana niza pa mora biti prirodan broj, tj.

$$n \in \mathbb{N}.$$

Vježba 230

Ispitajte je li 76 član aritmetičkog niza, za koji je $a_3 = 26$, $a_{15} - a_{12} = 30$.

Rezultat: Da, osmi je član.

Zadatak 231 (Tonka, gimnazija)

Zapiši opći član aritmetičkog niza (a_n) ako je $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 70$ te

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 85.$$

Rješenje 231

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad a_5 - a_4 = d, \quad a_6 - a_5 = d, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = d \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Da bismo napisali opći član aritmetičkog niza moramo najprije odrediti prvi član a_1 i razliku (diferenciju) d .

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 &= 70 \\ a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} &= 85 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_1 + a_1 + 2 \cdot d + a_1 + 4 \cdot d + a_1 + 6 \cdot d + a_1 + 8 \cdot d &= 70 \\ a_1 + d + a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 5 \cdot d + a_1 + 7 \cdot d + a_1 + 9 \cdot d &= 85 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left. \begin{aligned} 5 \cdot a_1 + 20 \cdot d &= 70 \\ 5 \cdot a_1 + 25 \cdot d &= 85 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 5 \cdot a_1 + 20 \cdot d &= 70 \quad /: (-5) \\ 5 \cdot a_1 + 25 \cdot d &= 85 \quad /: 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -a_1 - 4 \cdot d &= -14 \\ a_1 + 5 \cdot d &= 17 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow d = 3.
\end{aligned}$$

Računamo a_1 .

$$\left. \begin{aligned} a_1 + 5 \cdot d &= 17 \\ d &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 + 5 \cdot 3 = 17 \Rightarrow a_1 + 15 = 17 \Rightarrow a_1 = 17 - 15 \Rightarrow a_1 = 2.$$

Opći član a_n glasi:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2, \quad d = 3 \\ a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 2 + 3 \cdot n - 3 \Rightarrow a_n = 3 \cdot n - 1.$$

Vježba 231

Zapiši opći član aritmetičkog niza (a_n) ako je $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 45$ te $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 55$.

Rezultat: $a_n = 2 \cdot n - 1$.

Zadatak 232 (Tomislav, gimnazija)

Od kojeg je člana niza (a_n), $a_n = n^2 - 12 \cdot n + 11$, ispunjena nejednakost $a_{n+1} > a_n$?

Rješenje 232

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad a > b, \quad c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} > a_n &\Rightarrow (n+1)^2 - 12 \cdot (n+1) + 11 > n^2 - 12 \cdot n + 11 \Rightarrow \\
&\Rightarrow n^2 + 2 \cdot n + 1 - 12 \cdot n - 12 + 11 > n^2 - 12 \cdot n + 11 \Rightarrow \\
&\Rightarrow n^2 + 2 \cdot n + 1 - 12 \cdot n - 12 + 11 > n^2 - 12 \cdot n + 11 \Rightarrow 2 \cdot n + 1 - 12 > 0 \Rightarrow 2 \cdot n > -1 + 12 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \cdot n > 11 \Rightarrow 2 \cdot n > 11 \quad /: 2 \Rightarrow n > 5.5.
\end{aligned}$$

Broj n jednak je 6.

Nejednakost je ispunjena od člana a_6 .

Vježba 232

Od kojeg je člana niza (a_n) , $a_n = n^2 - 12 \cdot n + 11$, ispunjena nejednakost $a_n < a_{n+1}$?

Rezultat: a_6 .

Zadatak 233 (Tomislav, gimnazija)

Dokažite da je niz (a_n) s općim članom $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$ rastući.

Rješenje 233

Ponovimo!

$$a \geq b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c, \quad a \geq b, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}, \quad a^1 = a.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Za niz (a_n) kažemo da je rastući ako za svaki n vrijedi

$$a_{n+1} \geq a_n.$$

$$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} + 1} - \frac{2^n - 1}{2^n + 1} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} + 1} - \frac{2^n - 1}{2^n + 1} \geq 0 \quad /: (2^{n+1} + 1) \cdot (2^n + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2^{n+1} - 1) \cdot (2^n + 1) - (2^n - 1) \cdot (2^{n+1} + 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2 \cdot n+1} + 2^{n+1} - 2^n - 1 - (2^{2 \cdot n+1} + 2^n - 2^{n+1} - 1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2 \cdot n+1} + 2^{n+1} - 2^n - 1 - 2^{2 \cdot n+1} - 2^n + 2^{n+1} + 1 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2 \cdot n+1} + 2^{n+1} - 2^n - 1 - 2^{2 \cdot n+1} - 2^n + 2^{n+1} + 1 \geq 0 \Rightarrow 2^{n+1} - 2^n - 2^n + 2^{n+1} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n \geq 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n \geq 0 \quad /: 2 \Rightarrow 2^{n+1} - 2^n \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^n - 2^n \geq 0 \Rightarrow 2^n \geq 0.$$

Točno je za svaki $n \in N$.

Vježba 233

Dokažite da je niz (a_n) s općim članom $a_n = -\frac{1-2^n}{2^n+1}$ rastući.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 234 (Ante, srednja škola)

Odredi 37. član niza (a_n) , ako je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ te $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $n \geq 2$.

Rješenje 234

Ponovimo!

$$\frac{n}{1} = n, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n . Broj a_n zove se opći član niza.

Niz možemo zadati rekurzivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću već definiranih članova. Dakle, član niza dobiva se preko nekoliko svoji prethodnika. Ako znamo kako n – ti član niza ovisi od člana pred sobom ili od nekoliko prethodnih članova, onda ga možemo izračunati.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Nađemo nekoliko sljedećih članova niza.

- $a_3 = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_2 = 2 \\ a_1 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_3 = \frac{2}{1} \Rightarrow a_3 = 2$
- $a_4 = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_3 = 2 \\ a_2 = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_4 = \frac{2}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{2}{2} \Rightarrow a_4 = 1$
- $a_5 = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_4 = 1 \\ a_3 = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2}$
- $a_6 = \frac{a_5}{a_4} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_5 = \frac{1}{2} \\ a_4 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_6 = \frac{\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{2}$
- $a_7 = \frac{a_6}{a_5} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_6 = \frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow a_7 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_7 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_7 = 1$
- $a_8 = \frac{a_7}{a_6} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_7 = 1 \\ a_6 = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow a_8 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_8 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_8 = \frac{2}{1} \Rightarrow a_8 = 2$
- $a_9 = \frac{a_8}{a_7} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_8 = 2 \\ a_7 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_9 = \frac{2}{1} \Rightarrow a_9 = 2$
- $a_{10} = \frac{a_9}{a_8} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_9 = 2 \\ a_8 = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{10} = \frac{2}{2} \Rightarrow a_{10} = \frac{2}{2} \Rightarrow a_{10} = 1$

- $a_{11} = \frac{a_{10}}{a_9} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{10} = 1 \\ a_9 = 2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{2}$
- $a_{12} = \frac{a_{11}}{a_{10}} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} = \frac{1}{2} \\ a_{10} = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{12} = \frac{\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{2}$
- $a_{13} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{12} = \frac{1}{2} \\ a_{11} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow a_{13} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_{13} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_{13} = 1$

itd.

To je niz

$$1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

u kojem se ponavlja uzastopce njegovih šest članova

$$1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Budući da je

$$37 = 6 \cdot 6 + 1,$$

slijedi da će 37. član niza biti broj 1.

$$\underbrace{1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, 1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \dots}_{6 \text{ članova ponavlja se 6 puta}}$$

Dakle, vrijedi

$$a_{37} = 1.$$

Vježba 234

Odredi 38. član niza (a_n) , ako je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ te $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, za $n \geq 2$.

Rezultat: $a_{38} = 2$.

Zadatak 235 (Ante, srednja škola)

Koliki je količnik beskonačnog konvergentnog geometrijskog niza ako je zbroj prvih šest članova u nizu jednak $\frac{7}{8}$ njegovog ukupnog zbroja?

Rješenje 235

Ponovimo!

$$a^6 - b^6 = (a-b) \cdot (a^5 + a^4 \cdot b + a^3 \cdot b^2 + a^2 \cdot b^3 + a \cdot b^4 + b^5).$$

$$n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad n \cdot r \sqrt{a^{m \cdot r}} = n \sqrt{a^m}.$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu

pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Geometrijski red

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n + \dots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kako računamo $\frac{a}{b}$ od x ?

$$\frac{a}{b} \cdot x.$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= \frac{7}{8} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 &= \frac{7}{8} \cdot (a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) &= \frac{7}{8} \cdot \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow [a_1 \neq 0] \Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) &= \frac{7}{8} \cdot \frac{a_1}{1-q} \quad / \cdot \frac{1-q}{a_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (1-q) \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) &= \frac{7}{8} \Rightarrow 1 - q^6 = \frac{7}{8} \Rightarrow -q^6 = \frac{7}{8} - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -q^6 = \frac{7}{8} - \frac{1}{1} \Rightarrow -q^6 = \frac{7-8}{8} \Rightarrow -q^6 &= -\frac{1}{8} \Rightarrow -q^6 = -\frac{1}{8} \quad / \cdot (-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow q^6 = \frac{1}{8} \Rightarrow q^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow q^6 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad / \sqrt[6]{} \Rightarrow q = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \Rightarrow q = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \Rightarrow q &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array} \right] \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vježba 235

Koliki je količnik beskonačnog konvergentnog geometrijskog niza ako je zbroj prvih šest članova u nizu jednak 0.875 njegovog ukupnog zbroja?

Rezultat: $q = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Zadatak 236 (Don, gimnazija)

Prvi član aritmetičkog niza iznosi 1, zbroj prvih m članova odnosi se prema zbroju prvih n članova kao $m^2 : n^2$. Nađite razliku toga niza.

Rješenje 236

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent $a : b$, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b . Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c .

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad a_5 - a_4 = d, \quad a_6 - a_5 = d, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = d \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d].$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$S_m : S_n = m^2 : n^2 \Rightarrow \frac{m}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (m-1) \cdot d) : \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d) = m^2 : n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [a_1 = 1] \Rightarrow \frac{m}{2} \cdot (2 \cdot 1 + m \cdot d - d) : \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot 1 + n \cdot d - d) = m^2 : n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \cdot (2 + m \cdot d - d) : \frac{n}{2} \cdot (2 + n \cdot d - d) = m^2 : n^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{m}{2} \cdot (2+m \cdot d-d) \cdot n^2 = \frac{n}{2} \cdot (2+n \cdot d-d) \cdot m^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{m}{2} \cdot (2+m \cdot d-d) \cdot n^2 = \frac{n}{2} \cdot (2+n \cdot d-d) \cdot m^2 \quad / \cdot \frac{2}{m \cdot n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2+m \cdot d-d) \cdot n = (2+n \cdot d-d) \cdot m \Rightarrow 2 \cdot n + m \cdot n \cdot d - n \cdot d = 2 \cdot m + m \cdot n \cdot d - m \cdot d \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot n + m \cdot n \cdot d - n \cdot d = 2 \cdot m + m \cdot n \cdot d - m \cdot d \Rightarrow 2 \cdot n - n \cdot d = 2 \cdot m - m \cdot d \Rightarrow \\ &\Rightarrow n \cdot (2-d) = m \cdot (2-d) \Rightarrow n \cdot (2-d) - m \cdot (2-d) = 0 \Rightarrow (2-d) \cdot (n-m) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} n-m \neq 0 \text{ jer je } n \neq m \\ 2-d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2-d = 0 \Rightarrow 2 = d \Rightarrow d = 2. \end{aligned}$$

Vježba 236

Prvi član aritmetičkog niza iznosi 1, zbroj prvih n članova odnosi se prema zbroju prvih m članova kao $n^2 : m^2$. Nađite razliku toga niza.

Rezultat: 2.

Zadatak 237 (Zlatko, gimnazija)

Kutovi trokuta čine aritmetički niz. Izračunajte ih ako je zbroj njihovih sinusa $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje 237

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Zbroj svih kutova u trokutu je 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad a_5 - a_4 = d, \quad a_6 - a_5 = d, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = d \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Funkciju $y = f(x)$ definiranu u simetričnom području $-a \leq x \leq a$ nazivamo:

- **parnom**, ako je $f(-x) = f(x)$
- **neparnom**, ako je $f(-x) = -f(x)$.

Funkcija kosinus je parna funkcija.

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Neka su α , β i γ kutovi trokuta. Budući da tvore aritmetički niz, možemo zapisati:

$$\alpha = x - d, \quad \beta = x, \quad \gamma = x + d.$$

Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ &\Rightarrow x - d + x + x + d = 180^\circ \Rightarrow x - d + x + x + d = 180^\circ \Rightarrow 3 \cdot x = 180^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cdot x = 180^\circ \quad /: 3 \Rightarrow x = 60^\circ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 60^\circ - d \\ \beta = 60^\circ \\ \gamma = 60^\circ + d \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Zbroj sinusa kutova zadan je pa slijedi:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin(60^\circ - d) + \sin 60^\circ + \sin(60^\circ + d) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(60^\circ - d) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(60^\circ + d) &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin(60^\circ - d) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(60^\circ + d) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(60^\circ - d) + \sin(60^\circ + d) &= \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \sin \frac{60^\circ - d + 60^\circ + d}{2} \cdot \cos \frac{60^\circ - d - (60^\circ + d)}{2} &= \frac{3}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \sin \frac{60^\circ - d + 60^\circ + d}{2} \cdot \cos \frac{60^\circ - d - 60^\circ - d}{2} \cdot \frac{3}{2} &\Rightarrow 2 \cdot \sin \frac{120^\circ}{2} \cdot \cos \frac{60^\circ - d - 60^\circ - d}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \sin \frac{120^\circ}{2} \cdot \cos \frac{-2 \cdot d}{2} = \frac{3}{2} &\Rightarrow 2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \frac{-2 \cdot d}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(-d) = \frac{3}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos d = \frac{3}{2} &\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos d = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos d = \frac{3}{2} \quad / \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos d = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\text{racionalizacija} \right] &\Rightarrow \cos d = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos d = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3})^2} \Rightarrow \cos d = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos d = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} &\Rightarrow \cos d = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow d = 30^\circ. \end{aligned}$$

Kutovi trokuta su:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 60^\circ - d \\ \beta = 60^\circ \\ \gamma = 60^\circ + d \end{array} \right\} \Rightarrow [d = 30^\circ] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 60^\circ - 30^\circ \\ \beta = 60^\circ \\ \gamma = 60^\circ + 30^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = 30^\circ \\ \beta = 60^\circ \\ \gamma = 90^\circ \end{array} \right\}.$$

Vježba 237

Kutovi trokuta čine aritmetički niz. Izračunajte ih ako je zbroj njihovih sinusa $0.5 \cdot (3 + \sqrt{3})$.

Rezultat: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Zadatak 238 (Tomislava, gimnazija)

Ako kotangensi kutova trokuta čine aritmetički niz, onda i kvadrati stranica čine aritmetički niz. Dokažite!

Rješenje 238

Ponovimo!

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusov poučak).

U trokutu ABC vrijedi

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{2 \cdot R} \\ \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{2 \cdot R} \\ \sin \gamma &= \frac{c}{2 \cdot R} \end{aligned} \right\}$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti (poučak o kosinusu):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}, \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad a_5 - a_4 = d, \quad a_6 - a_5 = d, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = d \dots$$
$$a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Uporabom poučka o sinusu i kosinusu dobije se:

$$\bullet \quad \sin \alpha = \frac{a}{2 \cdot R}, \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

- $\sin \beta = \frac{b}{2 \cdot R}$, $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$
- $\sin \gamma = \frac{c}{2 \cdot R}$, $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$.

Kotangensi kutova α, β, γ trokuta čine aritmetički niz pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \operatorname{ctg} \beta &= \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma \Rightarrow 2 \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot \frac{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}}{\frac{b}{2 \cdot R}} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}}{\frac{a}{2 \cdot R}} + \frac{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}}{\frac{c}{2 \cdot R}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot \frac{2 \cdot R \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{2 \cdot R \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} + \frac{2 \cdot R \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot \frac{2 \cdot R \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{2 \cdot R \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} + \frac{2 \cdot R \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot \frac{R \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}{a \cdot b \cdot c} = \frac{R \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{a \cdot b \cdot c} + \frac{R \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{a \cdot b \cdot c} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot \frac{R \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}{a \cdot b \cdot c} = \frac{R \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{a \cdot b \cdot c} + \frac{R \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{a \cdot b \cdot c} \quad / \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{R} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2) = b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot c^2 - 2 \cdot b^2 = b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot c^2 - 2 \cdot b^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot c^2 = 2 \cdot b^2 + 2 \cdot b^2 \Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot c^2 = 4 \cdot b^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 4 \cdot b^2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot c^2 \Rightarrow 4 \cdot b^2 = 2 \cdot (a^2 + c^2) \Rightarrow 4 \cdot b^2 = 2 \cdot (a^2 + 2 \cdot c^2) \quad / : 2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot b^2 = a^2 + c^2.
 \end{aligned}$$

Kvadrati stranica trokuta čine aritmetički niz.

Vježba 238

Ako kotangensi kutova trokuta čine aritmetički niz, onda i kvadrati stranica čine aritmetički niz. Dokažite!

Rezultat: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Zadatak 239 (Tomislava, gimnazija)

Ako kutovi trokuta α, β, γ čine aritmetički niz u zadanome poretku, dokaži da između stranica trokuta a, b, c postoji sveza $a^2 - a \cdot c + c^2 = b^2$.

Rješenje 239

Ponovimo!

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Zbroj svih kutova u trokutu je π radijana

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d, a_5 - a_4 = d, a_6 - a_5 = d, \dots, a_n - a_{n-1} = d \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d, n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova niza (prethodnika i sljedbenika)

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, n \neq 0, n \neq 1.$$

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti (poučak o kosinusu):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Kutovi trokuta α, β, γ čine aritmetički niz u zadanome poretku.

$$2 \cdot \beta = \alpha + \gamma.$$

Iz sustava izračunamo kut β .

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \beta = \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot \beta = \alpha + \gamma \\ \alpha + \gamma + \beta = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \beta + \beta = \pi \Rightarrow 3 \cdot \beta = \pi \Rightarrow 3 \cdot \beta = \pi \quad / : 3 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Uporabom poučka o kosinusu dobije se:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \Rightarrow \left[\beta = \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - a \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 - a \cdot c = b^2 \Rightarrow a^2 - a \cdot c + c^2 = b^2.$$

Vježba 239

Ako kutovi trokuta α, β, γ čine aritmetički niz u zadanome poretku, dokaži da između stranica trokuta a, b, c postoji sveza $a^2 + c^2 - b^2 = a \cdot c$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 240 (Iva, gimnazija)

Aritmetički niz ima 20 članova. Zbroj članova na parnim mjestima je 250, a zbroj članova na neparnim mjestima 220. Nađite dva srednja člana.

Rješenje 240

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i

iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d, a_3 - a_2 = d, a_4 - a_3 = d, a_5 - a_4 = d, a_6 - a_5 = d, \dots, a_n - a_{n-1} = d \dots$$
$$a_n - a_{n-1} = d, n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d].$$

Niz

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{20}$$

je aritmetički sa razlikom d.

Članovi

$$a_2, a_4, a_6, a_8, \dots, a_{20}$$

čine aritmetički niz sa razlikom $2 \cdot d$, a broj članova je $n = 10$. Zbroj članova na parnim mjestima je 250 pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \text{prvi član } a_2 \\ \text{razlika } 2 \cdot d \\ \text{broj članova } n = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot a_2 + 9 \cdot 2 \cdot d] = 250 \Rightarrow \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot a_2 + 18 \cdot d] = 250 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 \cdot [2 \cdot a_2 + 18 \cdot d] = 250 \Rightarrow 5 \cdot [2 \cdot a_2 + 18 \cdot d] = 250 \text{ } /: 5 \Rightarrow 2 \cdot a_2 + 18 \cdot d = 50 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot a_2 + 18 \cdot d = 50 \text{ } /: 2 \Rightarrow a_2 + 9 \cdot d = 25 \Rightarrow [a_2 = a_1 + d] \Rightarrow a_1 + d + 9 \cdot d = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 + 10 \cdot d = 25.$$

Članovi

$$a_1, a_3, a_5, a_7, \dots, a_{19}$$

čine aritmetički niz sa razlikom $2 \cdot d$, a broj članova je $n = 10$. Zbroj članova na neparnim mjestima je 220 pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \text{prvi član } a_1 \\ \text{razlika } 2 \cdot d \\ \text{broj članova } n = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + 9 \cdot 2 \cdot d] = 220 \Rightarrow \frac{10}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + 18 \cdot d] = 220 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 \cdot [2 \cdot a_1 + 18 \cdot d] = 220 \Rightarrow 5 \cdot [2 \cdot a_1 + 18 \cdot d] = 220 \text{ } /: 5 \Rightarrow 2 \cdot a_1 + 18 \cdot d = 44 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot a_1 + 18 \cdot d = 44 \text{ } /: 2 \Rightarrow a_1 + 9 \cdot d = 22.$$

Iz sustava izračunamo a_1 i d.

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 10 \cdot d = 25 \\ a_1 + 9 \cdot d = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 10 \cdot d = 25 \\ a_1 + 9 \cdot d = 22 \text{ } / \cdot (-1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 10 \cdot d = 25 \\ -a_1 - 9 \cdot d = -22 \end{array} \right\} \Rightarrow d = 3.$$

Računamo a_1 .

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + 9 \cdot d = 2 \\ d = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 + 9 \cdot 3 = 22 \Rightarrow a_1 + 27 = 22 \Rightarrow a_1 = 22 - 27 \Rightarrow a_1 = -5.$$

Srednji članovi aritmetičkog niza su:

- $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = -5 \\ d = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{10} = -5 + 9 \cdot 3 \Rightarrow a_{10} = -5 + 27 \Rightarrow a_{10} = 22$
- $a_{11} = a_1 + 10 \cdot d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = -5 \\ d = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} = -5 + 10 \cdot 3 \Rightarrow a_{11} = -5 + 30 \Rightarrow a_{11} = 25.$

Ili

$$a_{11} = a_{10} + d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{10} = 22 \\ d = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} = 22 + 3 \Rightarrow a_{11} = 25.$$

Vježba 240

Aritmetički niz ima 10 članova. Zbroj članova na parnim mjestima je 30, a zbroj članova na neparnim mjestima 25. Nađite dva srednja člana.

Rezultat: $a_5 = 5, a_6 = 6.$