**Zadatak 141 (Vlado, srednja škola)**

Konačni geometrijski niz ima pet članova. Izostavimo li prvi član, zbroj preostalih članova je 30. Izostavimo li posljednji član, tada je zbroj preostalih članova 15. Zbroj svih članova niza je jednak:

*A.* 35 *B.* 33 *C.* 31 *D.* 37

**Rješenje 141**

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Niz ($a_n$) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom $a_1$ i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Neka je zadan konačni geometrijski niz od pet članova.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.$$

$$a_1 = a, \ a_2 = a \cdot q, \ a_3 = a \cdot q^2, \ a_4 = a \cdot q^3, \ a_5 = a \cdot q^4.$$

$$a, \ a \cdot q, \ a \cdot q^2, \ a \cdot q^3, \ a \cdot q^4.$$

Prema uvjetu zadatka vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + a \cdot q^4 = 30 \\ a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot q \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 30 \\ a \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a \cdot q \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3\right)}{a \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3\right)} = \frac{30}{15} \Rightarrow \frac{\cancel{a} \cdot q \cdot \cancel{\left(1 + q + q^2 + q^3\right)}}{\cancel{a} \cdot \cancel{\left(1 + q + q^2 + q^3\right)}} = \frac{30}{15} \Rightarrow q = 2.$$

Računamo prvi član a.

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3\right) = 15 \\ q = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3\right) = 15 \Rightarrow a \cdot (1 + 2 + 4 + 8) = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot 15 = 15 \Rightarrow 15 \cdot a = 15 \Rightarrow 15 \cdot a = 15 \ /: 15 \Rightarrow a = 1.$$

Ostali članovi iznose:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = a \cdot q = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$a_3 = a \cdot q^2 = 1 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4,$$
$$a_4 = a \cdot q^3 = 1 \cdot 2^3 = 1 \cdot 8 = 8,$$
$$a_5 = a \cdot q^4 = 1 \cdot 2^4 = 1 \cdot 16 = 16.$$

Zbroj svih članova niza jednak je:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 141**

Konačni geometrijski niz ima pet članova. Izostavimo li prvi član, zbroj preostalih članova je 120. Izostavimo li posljednji član, tada je zbroj preostalih članova 40. Zbroj svih članova niza je jednak:

$A.\ 121 \qquad B.\ 122 \qquad C.\ 123 \qquad D.\ 124$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 142 (Vlado, srednja škola)**

Konačni geometrijski niz ima paran broj članova. Zbroj članova s parnim indeksom jednak je dvostrukom zbroju članova s neparnim indeksom. Količnik niza je:

$A.\ q = 2 \qquad B.\ q = 3 \qquad C.\ q = \frac{1}{2} \qquad D.\ q = -2$

**Rješenje 142**

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Niz $(a_n)$ je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom $a_1$ i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Neka su članovi geometrijskog niza, koji ima paran broj članova, označeni na ovaj način:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}.$$

$$a_1 = a,\ a_2 = a \cdot q,\ a_3 = a \cdot q^2,\ a_4 = a \cdot q^3,\ a_5 = a \cdot q^4,\ \dots,\ a_{2n-1} = a \cdot q^{2 \cdot n-2},\ a_{2n} = a \cdot q^{2 \cdot n-1}.$$

Budući da je zbroj članova s parnim indeksom jednak dvostrukom zbroju članova s neparnim indeksom, vrijedi omjer:

$$\frac{a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{2n-1}} = 2 \Rightarrow \frac{a \cdot q + a \cdot q^3 + a \cdot q^5 + a \cdot q^7 + \dots + a \cdot q^{2 \cdot n-1}}{a + a \cdot q^2 + a \cdot q^4 + a \cdot q^6 + \dots + a \cdot q^{2 \cdot n-2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot q \cdot \left(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots + q^{2 \cdot n-2}\right)}{a \cdot \left(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots + q^{2 \cdot n-2}\right)} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot q \cdot \left(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots + q^{2 \cdot n-2}\right)}{a \cdot \left(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots + q^{2 \cdot n-2}\right)} = 2 \Rightarrow q = 2.$$

Odgovor je pod A

**Vježba 142**

Konačni geometrijski niz ima paran broj članova. Zbroj članova s parnim indeksom jednak je trostrukom zbroju članova s neparnim indeksom. Količnik niza je:

$$A.\ q = 2 \qquad B.\ q = 3 \qquad C.\ q = \frac{1}{2} \qquad D.\ q = -2$$

**Rezultat:** B.



**Zadatak 143 (DOC, gimnazija)**

Brojevi a, b i c su tri uzastopna člana geometrijskog niza.

Izraz $S = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$ je jednak:

$$A.\ a + b + c \qquad B.\ a^2 + b^2 + c^2 \qquad C.\ a^3 + b^3 + c^3 \qquad D.\ a^4 + b^4 + c^4$$

**Rješenje 143**

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Niz $(a_n)$ je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom $a_1$ i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \ge 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Budući da su brojevi a, b i c tri uzastopna člana geometrijskog niza, možemo zapisati

$$a \ , \ b = a \cdot q \ , \ c = a \cdot q^2,$$

gdje je q količnik kvocijent geometrijskog niza.
Postavljeni izraz preoblikovat ćemo na sljedeći način.

$$S = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \Rightarrow S = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{a^3} + \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^3} + \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{c^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{a^3} + \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^3} + \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{c^3} \Rightarrow S = \frac{b^2 \cdot c^2}{a} + \frac{a^2 \cdot c^2}{b} + \frac{a^2 \cdot b^2}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{(a \cdot q)^2 \cdot \left(a \cdot q^2\right)^2}{a} + \frac{a^2 \cdot \left(a \cdot q^2\right)^2}{a \cdot q} + \frac{a^2 \cdot (a \cdot q)^2}{a \cdot q^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^2 \cdot q^2 \cdot a^2 \cdot q^4}{a} + \frac{a^2 \cdot a^2 \cdot q^4}{a \cdot q} + \frac{a^2 \cdot a^2 \cdot q^2}{a \cdot q^2} \Rightarrow S = \frac{a^4 \cdot q^6}{a} + \frac{a^4 \cdot q^4}{a \cdot q} + \frac{a^4 \cdot q^2}{a \cdot q^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^4 \cdot q^6}{a} + \frac{a^4 \cdot q^4}{a \cdot q} + \frac{a^4 \cdot q^2}{a \cdot q^2} \Rightarrow S = a^3 \cdot q^6 + a^3 \cdot q^3 + a^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \left(a \cdot q^2\right)^3 + (a \cdot q)^3 + a^3 \Rightarrow S = c^3 + b^3 + a^3 \Rightarrow S = a^3 + b^3 + c^3.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 143**

Brojevi a, b i c su tri uzastopna člana geometrijskog niza.

Izraz $S = a \cdot b \cdot c \cdot \left( \frac{b \cdot c}{a^2} + \frac{a \cdot c}{b^2} + \frac{a \cdot b}{c^2} \right)$ je jednak:

$A.\ a + b + c$ $\quad B.\ a^2 + b^2 + c^2$ $\quad C.\ a^3 + b^3 + c^3$ $\quad D.\ a^4 + b^4 + c^4$

**Rezultat:** C.

**Zadatak 144 (Nina, gimnazija)**

Nađite zbroj svih prirodnih brojeva između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka 1.

**Rješenje 144**

Ponovimo!

$$a = b \Rightarrow b = a.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right].$$

Prirodni brojevi između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka 1 čine niz:

51, 61, 71, 81, ... , 341.

Uočimo da je to aritmetički niz za koji vrijedi:

$$a_1 = 51 \quad , \quad d = 10 \quad , \quad a_n = 341.$$

Računamo broj članova n postavljenog aritmetičkog niza.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_1 + (n-1) \cdot d = a_n \Rightarrow (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \Rightarrow (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \; / \cdot \frac{1}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{341-51}{10} + 1 \Rightarrow n = \frac{290}{10} + 1 \Rightarrow n = 29 + 1 \Rightarrow n = 30.$$

Tada zbroj članova niza iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n = 30 \\ a_1 = 51 \\ a_n = 341 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{30} = \frac{30}{2} \cdot [51 + 341] \Rightarrow s_{30} = 15 \cdot 392 \Rightarrow s_{30} = 5880.$$



**Vježba 144**

Nađite zbroj svih prirodnih brojeva između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka 2.

**Rezultat:** 5910.

**Zadatak 145 (4A, 4B, TUPŠ)**

Prizemlje zgrade visoko je 4 metra, a svaki kat iznad prizemlja 3 metra. Zgrada ukupno ima 12 katova (uključujući i prizemlje). Koliko je zgrada visoka?

**Rješenje 145**

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Uočimo da je riječ o aritmetičkom nizu čiji je prvi član $a_1 = 4$, razlika $d = 3$, a traži se $a_{12}$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \;,\; d = 3 \;,\; n = 12 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow a_{12} = 4 + (12-1) \cdot 3 \Rightarrow a_{12} = 4 + 11 \cdot 3 \Rightarrow a_{12} = 4 + 33 \Rightarrow a_{12} = 37.$$

Zgrada je visoka 37 m.

**Vježba 145**

Prizemlje zgrade visoko je 4 metra, a svaki kat iznad prizemlja 3 metra. Zgrada ukupno ima 15 katova (uključujući i prizemlje). Koliko je zgrada visoka?

**Rezultat:** 46 m.

**Zadatak 146 (4A, 4B, TUPŠ)**

Za geometrijski je niz zadano $a_1 = 12$, $q = 3$. Odredite n za koji je $a_n = 324$.

**Rješenje 146**

Ponovimo!

$$a = b \Rightarrow b = a \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Niz $(a_n)$ je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom $a_1$ i količnikom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad , \quad n \geq 1.$$

Uočimo da je riječ o geometrijskom nizu čiji je prvi član $a_1 = 12$, količnik $q = 3$, a opći član $a_n = 324$. Traži se redni broj člana n.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 12 \ , \ q = 3 \ , \ a_n = 324 \\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 324 = 12 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 12 \cdot 3^{n-1} = 324 \Rightarrow 12 \cdot 3^{n-1} = 324 \ /:12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{n-1} = 27 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^3 \Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 3 + 1 \Rightarrow n = 4.$$

**Vježba 146**

Za geometrijski je niz zadano $a_1 = 5$, $q = 3$. Odredite n za koji je $a_n = 135$.

**Rezultat:** $n = 4$.

**Zadatak 147 (4A, 4B, TUPŠ)**

Zadan je niz $a_n = n^2 + 1$. Izračunaj $a_{10} - a_7$.

**Rješenje 147**

Ponovimo!

Funkcija a kojoj je domena skup N zove se niz ili slijed. Niz realnih brojeva je funkcija koja svakom prirodnom broju pridružuje realni broj.

$$a : N \to R.$$

Vrijednost funkcije $a(n)$, $n \in N$, tj. brojeve a(1), a(2), a(3), … uobičajeno označujemo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ i zovemo članovi niza. Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Kažemo da je n – ti član niza $a_n$ funkcija svog indeksa n.

$$a_n = a(n).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da je niz zadan formulom općeg člana niza, možemo odmah odrediti vrijednost bilo kojega člana niza. Tako je:

$$a_{10} - a_7 = \begin{bmatrix} \text{opći član} \\ a_n = n^2 + 1 \end{bmatrix} = \left(10^2 + 1\right) - \left(7^2 + 1\right) = 10^2 + 1 - 7^2 - 1 = 100 + 1 - 49 - 1 = 100 - 49 = 51.$$

**Vježba 147**

Zadan je niz $a_n = n^2 + 1$. Izračunaj $a_{10} - a_5$.

**Rezultat:** 75.

**Zadatak 148 (4A, 4B, TUPŠ)**

Na kojem se mjestu u nizu $a_n = \frac{3 \cdot n + 36}{n + 1}$ nalazi član 6?

**Rješenje 148**

Ponovimo!

Funkcija a kojoj je domena skup N zove se niz ili slijed. Niz realnih brojeva je funkcija koja svakom prirodnom broju pridružuje realni broj.

$$a : N \to R.$$

Vrijednost funkcije $a(n)$, $n \in N$, tj. brojeve a(1), a(2), a(3), … uobičajeno označujemo $a_1$, $a_2$, $a_3$, … i zovemo članovi niza. Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Kažemo da je n – ti član niza $a_n$ funkcija svog indeksa n.



$$a_n = a(n).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da je niz zadan formulom općeg člana niza, možemo odmah odrediti vrijednost bilo kojega člana niza. Vrijednost člana niza je zadana pa slijedi:

$$a_n = 6 \Rightarrow \frac{3 \cdot n + 36}{n + 1} = 6 \Rightarrow \frac{3 \cdot n + 36}{n + 1} = 6 \;/ \cdot (n + 1) \Rightarrow 3 \cdot n + 36 = 6 \cdot (n + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot n + 36 = 6 \cdot n + 6 \Rightarrow 3 \cdot n - 6 \cdot n = 6 - 36 \Rightarrow -3 \cdot n = -30 \Rightarrow -3 \cdot n = -30 \;/ : (-3) \Rightarrow n = 10.$$

**Vježba 148**

Na kojem se mjestu u nizu $a_n = \frac{n + 12}{n + 1}$ nalazi član 2?

**Rezultat:** $a_{10} = 2$.

**Zadatak 149 (4A, TUPŠ)**

Tijelo se giba tako da u prvoj sekundi prijeđe put od 8 m, a u svakoj narednoj 0.5 m manje nego u prethodnoj sekundi. Koliki put je prevalilo tijelo do svog zaustavljanja?

**Rješenje 149**

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right].$$

Pamtimo:

- ako je $d > 0$ niz je rastući, $a_{n+1} > a_n$
- ako je $d = 0$ niz je konstantan, $a_{n+1} = a_n$
- ako je $d < 0$ niz je padajući, $a_{n+1} < a_n$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Uočimo da je riječ o aritmetičkom nizu. Prvi član je $a_1 = 8$, a razlika d = – 0.5 jer tijelo u svakoj narednoj sekundi prijeđe manji put nego u prethodnoj sekundi. Nakon n sekundi tijelo će se zaustaviti pa je $a_n = 0$.

Računamo n broj sekundi.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 8 \ , \ d = -0.5 \ , \ a_n = 0 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 8 + (n-1) \cdot (-0.5) \Rightarrow 0 = 8 - 0.5 \cdot n + 0.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5 \cdot n = 8 + 0.5 \Rightarrow 0.5 \cdot n = 8.5 \Rightarrow 0.5 \cdot n = 8.5 \ /: 0.5 \Rightarrow n = 17.$$

Put koji je tijelo prešlo do svoga zaustavljanja iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 8 \ , \ a_n = 0 \ , \ n = 17 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 8 \ , \ a_n = 0 \\ s_{17} = \frac{17}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2} \cdot [8 + 0] \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2} \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2} \cdot \frac{8}{1} \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2} \cdot \frac{8}{1} \Rightarrow s_{17} = 17 \cdot 4 \Rightarrow s_{17} = 68.$$



**Vježba 149**

Tijelo se giba tako da u prvoj sekundi prijeđe put od 10 m, a u svakoj narednoj 0.5 m manje nego u prethodnoj sekundi. Koliki put je prevalilo tijelo do svog zaustavljanja?

**Rezultat:** $s_{17} = 85.$

**Zadatak 150 (Ella, gimnazija)**

Odredi zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva.

**Rješenje 150**

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Prirodne brojeve možemo podijeliti na parne i neparne brojeve. Parni su oni brojevi koji su djeljivi sa dva, a neparni svi oni koji to nisu.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Promatramo niz parnih prirodnih brojeva:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ....

Uočimo da čine aritmetički niz. Prvi član je $a_1 = 2$, a razlika $d = 2$.
Tada zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \ , \ d = 2 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left( 2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right) \end{array} \right\} \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot \left( 2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2 \right) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (4 + 2 \cdot n - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot n + 2) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot (n+1) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot (n+1) \Rightarrow s_n = n \cdot (n+1).$$



**Vježba 150**

Odredi zbroj prvih 100 parnih prirodnih brojeva.

**Rezultat:** $100 \cdot (100 + 1) = 10100.$

**Zadatak 151 (Ella, gimnazija)**

Odredi zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva.

**Rješenje 151**

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Prirodne brojeve možemo podijeliti na parne i neparne brojeve. Parni su oni brojevi koji su djeljivi sa dva, a neparni svi oni koji to nisu.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Promatramo niz neparnih prirodnih brojeva:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ....

Uočimo da čine aritmetički niz. Prvi član je $a_1 = 1$, a razlika d = 2.
Tada zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \ , \ d = 2 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d) \end{array} \right\} \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 + 2 \cdot n - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot (2 + 2 \cdot n - 2) \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n \Rightarrow s_n = n^2.$$

**Vježba 151**

Odredi zbroj prvih 100 neparnih prirodnih brojeva.

**Rezultat:** $100^2 = 10000.$



**Zadatak 152 (Ella, gimnazija)**

U deset škrinja nalaze se zlatnici, u devet su ispravne mase po 10 g, a u jednoj su lakši, po 9 g. Kako pomoću jednog vaganja otkriti u kojoj su škrinji neispravni zlatnici?

**Rješenje 152**

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[ a_1 + a_n \right].$$

- 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10

Iz svake škrinje uzmeno određeni broj zlatnika i to:

- iz prve škrinje uzmemo 1 zlatnik
- iz druge škrinje uzmemo 2 zlatnika
- iz treće škrinje uzmemo 3 zlatnika
- iz četvrte škrinje uzmemo 4 zlatnika
- iz pete škrinje uzmemo 5 zlatnika
- iz šeste škrinje uzmemo 6 zlatnika
- iz sedme škrinje uzmemo 7 zlatnika
- iz osme škrinje uzmemo 8 zlatnika
- iz devete škrinje uzmemo 9 zlatnika
- iz desete škrinje uzmemo 10 zlatnika.

Uočimo da je niz uzetih zlatnika aritmetički niz čiji je prvi član $a_1 = 1$, diferencija $d = 1$, a posljednji član $a_{10} = 10$.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Zbroj niza iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \ , \ a_{10} = 10 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left(a_1 + a_n\right) \end{array}\right\} \Rightarrow s_{10} = \frac{10}{2} \cdot \left(a_1 + a_{10}\right) \Rightarrow s_{10} = \frac{10}{2} \cdot \left(1 + 10\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{10} = \frac{10}{2} \cdot 11 \Rightarrow s_{10} = 5 \cdot 11 \Rightarrow s_{10} = 55.$$

Iz škrinje je uzeto 55 zlatnika. Njihova bi ukupna masa, da su svi ispravni, iznosila

$$55 \cdot 10 \ g = 550 \ g.$$

Ako pomoću vage izmjerimo 549 g, dakle 1 g manje, znači da je samo jedan zlatnik neispravan pa se neispravni zlatnici nalaze u prvoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 548 g, dakle 2 g manje, znači da su samo dva zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u drugoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 547 g, dakle 3 g manje, znači da su samo tri zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u trećoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 546 g, dakle 4 g manje, znači da su samo četiri zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u četvrtoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 545 g, dakle 5 g manje, znači da su samo pet zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u petoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 544 g, dakle 6 g manje, znači da su samo šest zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u šestoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 543 g, dakle 7 g manje, znači da su samo sedam zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u sedmoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 542 g, dakle 8 g manje, znači da su samo osam zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u osmoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 541 g, dakle 9 g manje, znači da su samo devet zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u devetoj škrinji.
Ako pomoću vage izmjerimo 540 g, dakle 10 g manje, znači da su samo deset zlatnika neispravna pa se neispravni zlatnici nalaze u desetoj.

**Vježba 152**

U pet škrinja nalaze se zlatnici, u četiri su ispravne mase po 10 g, a u jednoj su lakši, po 9 g. Kako pomoću jednog vaganja otkriti u kojoj su škrinji neispravni zlatnici?

**Rezultat:** Analogno zaključivanje.

**Zadatak 153 (4A, TUPŠ)**

Počevši od kojeg člana aritmetičkog niza 100, 102, 104, … svi ostali članovi bivaju veći od 459?

**Rješenje 153**

Ponovimo!

$$a > b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Postavljeni niz

100, 102, 104, …

je aritmetički niz čiji je prvi član $a_1$ = 100, a razlika d = 102 – 100 = 104 – 102 = … = 2.

Računamo redni broj od kojega su svi članovi niza veći od 459.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 100 \ , \ d = 2 \\ a_n > 459 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 100 \ , \ d = 2 \\ a_1 + (n-1) \cdot d > 459 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 + (n-1) \cdot 2 > 459 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 + 2 \cdot n - 2 > 459 \Rightarrow 2 \cdot n > 459 - 100 + 2 \Rightarrow 2 \cdot n > 361 \Rightarrow 2 \cdot n > 361 \ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > 180.5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n \text{ mora biti} \\ \text{cijeli broj} \end{array}\right] \Rightarrow n = 181.$$

**Vježba 153**

Počevši od kojeg člana aritmetičkog niza 100, 102, 104, … svi ostali članovi bivaju veći od 119?

**Rezultat:** n = 11.

**Zadatak 154 (4A, TUPŠ)**

Na kojem se mjestu u aritmetičkom nizu 2004, 2000, 1996, … nalazi član 1892?

**Rješenje 154**

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \dots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Postavljeni niz

2004, 2000, 1996, …

je aritmetički niz čiji je prvi član $a_1$ = 2004, a razlika d = 2000 – 2004 = 1996 – 2000 = … = – 4.
Računamo na kojem se mjestu n nalazi član $a_n$ = 1892.

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 2004 \ , \ d = -4 \ , \ a_n = 1892 \\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1892 = 2004 + (n-1)\cdot(-4) \Rightarrow 1892 = 2004 - 4\cdot n + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n = 2004 + 4 - 1892 \Rightarrow 4\cdot n = 116 \Rightarrow 4\cdot n = 116 \ /:4 \Rightarrow n = 29.$$

**Vježba 154**

Na kojem se mjestu u aritmetičkom nizu 2004, 2000, 1996, … nalazi član 1924?

**Rezultat:** n = 21.

**Zadatak 155 (Ajax, gimnazija)**

Između brojeva 4 i 37 treba umetnuti članove aritmetičkog niza tako da zbroj umetnutih i zadanih članova bude 246. Odredi opći član niza.

**Rješenje 155**

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad a = b \Rightarrow b = a.$$



Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot\left[a_1 + a_n\right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Najprije odredimo broj članova n aritmetičkog niza.

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 4 \\ a_n = 37 \\ s_n = 246 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[s_n = \frac{n}{2}\cdot\left[a_1 + a_n\right]\right] \Rightarrow 246 = \frac{n}{2}\cdot[4+37] \Rightarrow 246 = \frac{n}{2}\cdot 41 \Rightarrow 246 = \frac{41\cdot n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{41\cdot n}{2} = 246 \Rightarrow \frac{41\cdot n}{2} = 246 \ /\cdot\frac{2}{41} \Rightarrow n = 12.$$

Računamo razliku (diferenciju) d aritmetičkog niza.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_{12} = 37 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \\ a_{12} = a_1 + 11\cdot d \end{array}\right] \Rightarrow 37 = 4 + 11\cdot d \Rightarrow 4 + 11\cdot d = 37 \Rightarrow 11\cdot d = 37 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot d = 33 \Rightarrow 11\cdot d = 33 \;/:11 \Rightarrow d = 3.$$

Opći član niza glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \;,\; d = 3 \\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 4 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow a_n = 4 + 3\cdot n - 3 \Rightarrow a_n = 3\cdot n + 1.$$

**Vježba 155**

Između brojeva 2 i 35 treba umetnuti članove aritmetičkog niza tako da zbroj umetnutih i zadanih članova bude 222. Odredi opći član niza.

**Rezultat:** $a_n = 3\cdot n - 1.$

**Zadatak 156 (Ajax, gimnazija)**

Najmanji unutarnji kut višekuta je 117º, a najveći 171º. Koliko višekut ima stranica ako su mjere kutova višekuta uzastopni članovi aritmetičkog niza?

**Rješenje 156**

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot\left[a_1 + a_n\right].$$



Suma unutarnjih kutova mnogokuta jednaka je:

$$K(n) = (n-2)\cdot 180^0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Ako slovom n označimo broj stranica višekuta (mnogokuta, poligona, n – terokuta) tada je

$$a_1 = 117 \;,\; a_n = 171.$$

Budući da su mjere kutova višekuta uzastopni članovi aritmetičkog niza, zbroj mjera kutova možemo zapisati na dva načina:

- $s_n = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$
- $K(n) = (n-2)\cdot 180.$

Dalje slijedi:

$$s_n = K(n) \Rightarrow \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n) = (n-2)\cdot 180 \Rightarrow \frac{n}{2}\cdot(117+171) = (n-2)\cdot 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\cdot 288 = 180\cdot n - 360 \Rightarrow \frac{n}{2}\cdot 288 = 180\cdot n - 360 \Rightarrow 144\cdot n = 180\cdot n - 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 144\cdot n - 180\cdot n = -360 \Rightarrow -36\cdot n = -360 \Rightarrow -36\cdot n = -360\ /:(-36) \Rightarrow n = 10.$$

**Vježba 156**

Najmanji unutarnji kut višekuta je 30º, a najveći 150º. Koliko višekut ima stranica ako su mjere kutova višekuta uzastopni članovi aritmetičkog niza?

**Rezultat:** n = 4.

**Zadatak 157 (Fatalne oči, ekonomija)**

Prvi članovi aritmetičkog i geometrijskog niza su jednaki 3, drugi član aritmetičkog veći je za 6 od drugog člana geometrijskog, a treći su članovi jednaki. Koji su to nizovi?

**Rješenje 157**

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m} .$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika):

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2\cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Niz $(a_n)$ je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom $a_1$ i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} \ , \ n \ge 1.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G = \sqrt{x\cdot y}.$$

Niz je geometrijski ako je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina dvaju susjednih članova.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \Rightarrow a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a = b + n \quad , \quad a - n = b \quad , \quad a - b = n.$$

Neka je:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aritmetički niz
- $b_1, b_2, b_3, \ldots$ geometrijski niz.

1.inačica

Prema uvjetima zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \ , \ b_1 = 3 \\ a_2 = b_2 + 6 \\ a_3 = b_3 \end{array}\right\}.$$

Budući da za aritmetički niz vrijedi da je svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika), slijedi:

$$2 \cdot a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow 2 \cdot (b_2 + 6) = 3 + b_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} b_2 = b_1 \cdot q = 3 \cdot q \\ b_3 = b_1 \cdot q^2 = 3 \cdot q^2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot (3 \cdot q + 6) = 3 + 3 \cdot q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot q + 12 = 3 + 3 \cdot q^2 \Rightarrow 6 \cdot q + 12 = 3 + 3 \cdot q^2 \ /:3 \Rightarrow 2 \cdot q + 4 = 1 + q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot q + 4 - 1 - q^2 = 0 \Rightarrow -q^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow -q^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow q^2 - 2 \cdot q - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q^2 - 2 \cdot q - 3 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = -3 \\ q_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = \dfrac{2+4}{2} \\ q_2 = \dfrac{2-4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = \dfrac{6}{2} \\ q_2 = -\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = 3 \\ q_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Postoje dva geometrijska niza.

- $\left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ q = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3, 9, 27, \ldots \qquad b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

- $\left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ q = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3, -3, 3, \ldots \qquad b_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}.$

Sada tražimo aritmetičke nizove.
Uz pomoć prvog geometrijskog niza

$$3, 9, 27, \ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ b_2 = 9 \\ b_3 = 27 \end{array}\right\}$$

i uvjeta zadatka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = b_2 + 6 \\ a_3 = b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = 9 + 6 \\ a_3 = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = 15 \\ a_3 = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow 3, 15, 27, \ldots.$$

Diferencija toga aritmetičkog niza iznosi

$$d = 15 - 3 = 27 - 15 = \ldots = 12$$

pa opći član aritmetičkog niza glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ d = 12 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 3 + (n-1) \cdot 12 \Rightarrow a_n = 3 + 12 \cdot n - 12 \Rightarrow a_n = 12 \cdot n - 9.$$

Uz pomoć drugog geometrijskog niza

$$3, -3, 3, \ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ b_2 = -3 \\ b_3 = 3 \end{array}\right\}$$

i uvjeta zadatka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = b_2 + 6 \\ a_3 = b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = -3 + 6 \\ a_3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3, 3, 3, \ldots.$$

Diferencija toga aritmetičkog niza iznosi

$$d = 3 - 3 = \ldots = 0$$

pa opći član aritmetičkog niza glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ d = 0 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 3 + (n-1) \cdot 0 \Rightarrow a_n = 3 + 0 \Rightarrow a_n = 3.$$

2.inačica
Prema uvjetima zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \ , \ b_1 = 3 \\ a_2 = b_2 + 6 \\ a_3 = b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \ , \ a_1 = 3 \\ b_2 = a_2 - 6 \\ b_3 = a_3 \end{array}\right\}.$$

Budući da za geometrijski niz vrijedi da je svaki član geometrijskog niza (osim prvog) jednak je geometrijskoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika), slijedi:

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3 \Rightarrow (a_2 - 6)^2 = 3 \cdot a_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_1 + 2 \cdot d \end{bmatrix} \Rightarrow (a_1 + d - 6)^2 = 3 \cdot (a_1 + 2 \cdot d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 + d - 6)^2 = 3 \cdot (3 + 2 \cdot d) \Rightarrow (d - 3)^2 = 3 \cdot (3 + 2 \cdot d) \Rightarrow d^2 - 6 \cdot d + 9 = 9 + 6 \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 - 6 \cdot d + 9 = 9 + 6 \cdot d \Rightarrow d^2 - 6 \cdot d = 6 \cdot d \Rightarrow d^2 - 6 \cdot d - 6 \cdot d = 0 \Rightarrow d^2 - 12 \cdot d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \cdot (d - 12) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} d = 0 \\ d - 12 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} d_1 = 0 \\ d_2 = 12 \end{matrix}\right\}.$$

Postoje dva aritmetička niza.

- $\left.\begin{matrix} a_1 = 3 \\ d = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3, 3, 3, \ldots \qquad a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1) \cdot 0 \Rightarrow a_n = 3.$
- $\left.\begin{matrix} a_1 = 3 \\ d = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3, 15, 27, \ldots \qquad a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1) \cdot 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = 3 + 12 \cdot n - 12 \Rightarrow a_n = 12 \cdot n - 9.$$

Sada tražimo geometrijske nizove.
Uz pomoć prvog aritmetičkog niza

$$3, 3, 3, \ldots \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 3 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 3 \end{matrix}\right\}$$

i uvjeta zadatka dobije se:

$$\left.\begin{matrix} b_1 = 3 \\ b_2 = a_2 - 6 \\ b_3 = a_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b_1 = 3 \\ b_2 = 3 - 6 \\ b_3 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b_1 = 3 \\ b_2 = -3 \\ b_3 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3, -3, 3, \ldots.$$

Kvocijent toga geometrijskog niza iznosi

$$q = \frac{-3}{3} = \frac{3}{-3} = \ldots = -1$$

pa opći član geometrijskog niza glasi:

$$\left.\begin{matrix} b_1 = 3 \\ q = -1 \\ b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow b_n = 3 \cdot (-1)^{n-1}.$$

Uz pomoć drugog aritmetičkog niza

$$3, 15, 27, \ldots \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 = 3 \\ a_2 = 15 \\ a_3 = 27 \end{matrix}\right\}$$

i uvjeta zadatka dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ b_2 = a_2 - 6 \\ b_3 = a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ b_2 = 15 - 6 \\ b_3 = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ b_2 = 9 \\ a_3 = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow 3,\ 9,\ 27,\ ....$$

Kvocijent tog aritmetičkog niza iznosi

$$q = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = ... = 3$$

pa opći član geometrijskog niza glasi:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 3 \\ q = 3 \\ b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow b_n = 3 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow b_n = 3^1 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow b_n = 3^n.$$

**Vježba 157**

Prvi članovi aritmetičkog i geometrijskog niza su jednaki 3, drugi član geometrijskog manji je za 6 od drugog člana aritmetičkog, a treći su članovi jednaki. Koji su to nizovi?

**Rezultat:** $\left.\begin{array}{l} a_n = 3\ ,\ b_n = 3 \cdot (-1)^{n-1} \\ a_n = 12 \cdot n - 9\ ,\ b_n = 3^n \end{array}\right\}.$



**Zadatak 158 (4A, 4B, TUPŠ)**

Automobil je kupljen za 18 000 €. Procjenjuje se da će njegova vrijednost svake godine padati za jednaki iznos. Nakon 12 godina vrijednost automobila iznosit će 10 % njegove početne vrijednosti. Nakon koliko će godina, prema toj procjeni, vrijednost automobila iznositi 40 % njegove početne vrijednosti?

*A. nakon* 6 *god.* *B. nakon* 7 *god.* *C. nakon* 8 *god.* *D. nakon* 9 *god.*

**Rješenje 158**

Ponovimo!

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100}$ , $81\ \% = \frac{81}{100}$ , $4.5\ \% = \frac{4.5}{100}$ , $0.3\ \% = \frac{0.3}{100}$ , $p\ \% = \frac{p}{100}$.

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d\ ,\ a_3 - a_2 = d\ ,\ a_4 - a_3 = d\ ,\ a_5 - a_4 = d\ ,\ a_6 - a_5 = d\ ,\ ...\ ,\ a_n - a_{n-1} = d\ ...$$

$$a_n - a_{n-1} = d\ ,\ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Automobil je kupljen za 18 000 €. Procjenjuje se da će njegova vrijednost svake godine padati za jednaki iznos. Nakon 12 godina vrijednost automobila iznosit će 10 % njegove početne vrijednosti, a to iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 18\,000 \\ a_{12} = \dfrac{10}{100} \cdot a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{12} = \frac{10}{100} \cdot 18\,000 \Rightarrow a_{12} = 1800.$$

Budući da vrijednost automobila svake godine pada za jednaki iznos, riječ je o aritmetičkom nizu čija je razlika negativan broj.

$$a_{12} = a_1 + 11 \cdot d \Rightarrow a_1 + 11 \cdot d = a_{12} \Rightarrow 11 \cdot d = a_{12} - a_1 \Rightarrow 11 \cdot d = a_{12} - a_1 \ /:11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_{12} - a_1}{11} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 = 18\,000 \\ n = 12 \\ a_{12} = 1800 \end{bmatrix} \Rightarrow d = \frac{1800 - 18\,000}{11} \Rightarrow d = -1473.$$

Računamo nakon koliko će godina vrijednost automobila iznositi 40 % njegove početne vrijednosti?

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 18\,000 \\ a_n = \dfrac{40}{100} \cdot a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = \frac{40}{100} \cdot 18\,000 \Rightarrow a_n = 7\,200.$$

Broj godina n iznosi:

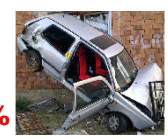
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_1 + (n-1) \cdot d = a_n \Rightarrow (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \Rightarrow (n-1) \cdot d = a_n - a_1 \ /:d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n = 7\,200 \\ a_1 = 18\,000 \\ d = -1473 \end{bmatrix} \Rightarrow n = \frac{7\,200 - 18\,000}{-1473} + 1 \Rightarrow n = 8.$$

Odgovor je pod C.

18000 EUR

10 %





**Vježba 158**

Automobil je kupljen za 18 000 €. Procjenjuje se da će njegova vrijednost svake godine padati za jednaki iznos. Nakon 12 godina vrijednost automobila iznosit će 10 % njegove početne vrijednosti. Nakon koliko će godina, prema toj procjeni, vrijednost automobila iznositi 40 % njegove početne vrijednosti?

*A. nakon* 6 *god.* *B. nakon* 7 *god.* *C. nakon* 8 *god.* *D. nakon* 9 *god.*

**Rezultat:** B.

**Zadatak 159 (Marijan, gimnazija)**

Kvocijent desetoga i trećeg člana aritmetičkog niza je 5. Dokaži da je zbroj pet početnih članova niza jednak desetom članu tog niza.

**Rješenje 159**

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom $a_1$ i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Kvocijent desetoga i trećeg člana aritmetičkog niza je 5 pa slijedi:

$$\frac{a_{10}}{a_3} = 5 \Rightarrow \frac{a_{10}}{a_3} = 5 \ / \cdot a_3 \Rightarrow a_{10} = 5 \cdot a_3 \Rightarrow a_1 + 9 \cdot d = 5 \cdot (a_1 + 2 \cdot d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + 9 \cdot d = 5 \cdot a_1 + 10 \cdot d \Rightarrow 9 \cdot d - 10 \cdot d = 5 \cdot a_1 - a_1 \Rightarrow -d = 4 \cdot a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -d = 4 \cdot a_1 \ / \cdot (-1) \Rightarrow d = -4 \cdot a_1.$$

Dokazujemo da je zbroj pet početnih članova niza jednak desetom članu tog niza.

$$s_5 = a_{10} \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot (2 \cdot a_1 + 4 \cdot d) = a_1 + 9 \cdot d \Rightarrow 5 \cdot a_1 + 10 \cdot d = a_1 + 9 \cdot d \Rightarrow 5 \cdot a_1 - a_1 = 9 \cdot d - 10 \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot a_1 = -d \Rightarrow d = -4 \cdot a_1.$$

Vidimo da vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_{10}}{a_3} = 5 \Rightarrow d = -4 \cdot a_1 \ \text{uvjet} \\ s_5 = a_{10} \Rightarrow d = -4 \cdot a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{točna je tvrdnja } s_5 = a_{10}.$$

**Vježba 159**

Kvocijent trećega i desetog člana aritmetičkog niza je 0.2. Dokaži da je zbroj pet početnih članova niza jednak desetom članu tog niza.

**Rezultat:** Dokaz analogan.

**Zadatak 160 (Ivan, gimnazija)**

Dva se aritmetička niza podudaraju u prvom članu koji je jednak a. Razlika prvog niza je pozitivan broj, a drugoga njezin suprotan broj. Zbroj n početnih članova prvog niza je A, a drugoga B. Vrijednost izraza $\frac{A-B}{A+B}$ je jednaka:

$$A. \ \frac{n+1}{2} \cdot \frac{d}{a} \qquad B. \ \frac{n+1}{2} \cdot \frac{a}{d} \qquad C. \ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{d}{a} \qquad D. \ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a}{d}$$

**Rješenje 160**

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član $a_1$ i razliku d.
Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Brojevi koji imaju jednake apsolutne vrijednosti, a različite predznake zovu se suprotni brojevi. Oni su simetrično smješteni na brojevnom pravcu u odnosu na broj 0. Zbroj dvaju suprotnih brojeva je nula.
Neka su zadana dva aritmetička niza

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots \text{ i } b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots b_n, \ldots$$

pri čemu je

$$a_1 = b_1 = a.$$

Razlika prvog niza je pozitivan broj d, a drugoga njezin suprotan broj – d .
Zbroj n početnih članova prvog niza je A:

$$A = \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right] \Rightarrow A = \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right].$$

Zbroj n početnih članova drugog niza je B:

$$B = \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot b_1 + (n-1) \cdot (-d) \right] \Rightarrow B = \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right].$$

Računamo omjer.

$$\frac{A-B}{A+B} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right] - \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right]}{\frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right] + \frac{n}{2} \cdot \left[ 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-B}{A+B} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \left( \left( 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right) - \left( 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right) \right)}{\frac{n}{2} \cdot \left( \left( 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right) + \left( 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right) \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-B}{A+B} = \frac{\frac{n}{2} \cdot \left( \left( 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right) - \left( 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right) \right)}{\frac{n}{2} \cdot \left( \left( 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right) + \left( 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right) \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-B}{A+B} = \frac{\left( 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right) - \left( 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right)}{\left( 2 \cdot a + (n-1) \cdot d \right) + \left( 2 \cdot a - (n-1) \cdot d \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-B}{A+B}=\frac{2\cdot a+(n-1)\cdot d-2\cdot a+(n-1)\cdot d}{2\cdot a+(n-1)\cdot d+2\cdot a-(n-1)\cdot d} \Rightarrow \frac{A-B}{A+B}=\frac{2\cdot a+(n-1)\cdot d-2\cdot a+(n-1)\cdot d}{2\cdot a+(n-1)\cdot d+2\cdot a-(n-1)\cdot d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-B}{A+B}=\frac{(n-1)\cdot d+(n-1)\cdot d}{2\cdot a+2\cdot a} \Rightarrow \frac{A-B}{A+B}=\frac{2\cdot(n-1)\cdot d}{4\cdot a} \Rightarrow \frac{A-B}{A+B}=\frac{2\cdot(n-1)\cdot d}{4\cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A-B}{A+B}=\frac{(n-1)\cdot d}{2\cdot a} \Rightarrow \frac{A-B}{A+B}=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{d}{a}.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 160**

Dva se aritmetička niza podudaraju u prvom članu koji je jednak 1. Razlika prvog niza je pozitivan broj, a drugoga njezin suprotan broj. Zbroj n početnih članova prvog niza je A, a drugoga B. Vrijednost izraza $\frac{A-B}{A+B}$ je jednaka:

$A.\ \frac{n+1}{2}\cdot d \qquad B.\ \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{d} \qquad C.\ \frac{n-1}{2}\cdot d \qquad D.\ \frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{d}$

**Rezultat:** C.