Zadatak 101 (Sanja, srednja škola)

U razvoju binomnog izraza $\left(2^m + 2^n\right)^5$ treći je član, nakon sređivanja jednak 20480, a četvrti član 5120. Odredi m – n.

Rješenje 101

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a - c = b - d.$$

Iz binomne formule

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} \cdot a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot b^n,$$

zaključujemo da r-ti član glasi:

$$\binom{n}{r-1} \cdot a^{n-r+1} \cdot b^{r-1}.$$

$$\text{[Počinje se brojiti od 0: } \overset{1}{\binom{n}{0}}, \overset{2}{\binom{n}{1}}, \overset{3}{\binom{n}{2}}, \overset{4}{\binom{n}{3}}, \ldots \overset{n+1}{\binom{n}{n}}.]$$

Promatramo razvoj binomnog izraza:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + b^5.$$

U zadatku treći član iznosi:

$$10 \cdot a^3 \cdot b^2 = 20\,480,$$

a četvrti

$$10 \cdot a^2 \cdot b^3 = 5120.$$

Ako baze a i b zamijenimo sa 2^m i 2^n, dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \cdot \left(2^m\right)^3 \cdot \left(2^n\right)^2 = 20480 \\ 10 \cdot \left(2^m\right)^2 \cdot \left(2^n\right)^3 = 5120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 \cdot 2^{3 \cdot m} \cdot 2^{2 \cdot n} = 20480 \;/:10 \\ 10 \cdot 2^{2 \cdot m} \cdot 2^{3 \cdot n} = 5120 \;/:10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^{3 \cdot m} \cdot 2^{2 \cdot n} = 2048 \\ 2^{2 \cdot m} \cdot 2^{3 \cdot n} = 512 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^{3 \cdot m + 2 \cdot n} = 2048 \\ 2^{2 \cdot m + 3 \cdot n} = 512 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^{3 \cdot m + 2 \cdot n} = 2^{11} \\ 2^{2 \cdot m + 3 \cdot n} = 2^9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot m + 2 \cdot n = 11 \\ 2 \cdot m + 3 \cdot n = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot m + 2 \cdot n - (2 \cdot m + 3 \cdot n) = 11 - 9 \Rightarrow 3 \cdot m + 2 \cdot n - 2 \cdot m - 3 \cdot n = 2 \Rightarrow m - n = 2.$$

Vježba 101

U razvoju binomnog izraza $\left(2^m + 2^n\right)^5$ treći je član, nakon sređivanja jednak 20480, a četvrti član 5120. Odredi m + n.

Rezultat: 4.

Zadatak 102 (Ivan, srednja škola)

$$\text{Izračunajte}: \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \ \ldots \ + \frac{1}{2756}.$$

Rješenje 102

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad -a+a=0.$$

Uočimo da se nazivnici razlomaka mogu rastaviti na faktore na sljedeći način:

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ \ldots\ +\frac{1}{2756}=\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ \ldots\ +\frac{1}{52\cdot 53}.$$

Svaki razlomak može se transformirati u razliku dva razlomka:

$$\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{5-4}{4\cdot 5}=\frac{5}{4\cdot 5}-\frac{4}{4\cdot 5}=\frac{5}{4\cdot 5}-\frac{4}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5} \quad , \quad \frac{1}{5\cdot 6}=\frac{6-5}{5\cdot 6}=\frac{6}{5\cdot 6}-\frac{5}{5\cdot 6}=\frac{6}{5\cdot 6}-\frac{5}{5\cdot 6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{6\cdot 7}=\frac{7-6}{6\cdot 7}=\frac{7}{6\cdot 7}-\frac{6}{6\cdot 7}=\frac{7}{6\cdot 7}-\frac{6}{6\cdot 7}=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\ \ldots$$

$$\ldots\ \frac{1}{52\cdot 53}=\frac{53-52}{52\cdot 53}=\frac{53}{52\cdot 53}-\frac{52}{52\cdot 53}=\frac{53}{52\cdot 53}-\frac{52}{52\cdot 53}=\frac{1}{52}-\frac{1}{53}.$$

U ovom rastavu poslužili smo se metodom neodređenih koeficijenata:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},\ A \text{ i } B \text{ su nepoznati koeficijenti koje moramo izračunati.}$$

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}\ /\cdot n\cdot(n+1) \Rightarrow 1=A\cdot(n+1)+B\cdot n \Rightarrow$$

$$1=A\cdot n+A+B\cdot n \Rightarrow 1=(A+B)\cdot n+A \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow 1+B=0 \Rightarrow B=-1.$$

Zato je:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Konačno se dobije:

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ \ldots\ +\frac{1}{2756}=\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ \ldots\ +\frac{1}{51\cdot 52}+\frac{1}{52\cdot 53}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ \ldots\ +\frac{1}{51}-\frac{1}{52}+\frac{1}{52}-\frac{1}{53}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ \ldots\ +\frac{1}{51}-\frac{1}{52}+\frac{1}{52}-\frac{1}{53}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{53}=\frac{53-4}{4\cdot 53}=\frac{49}{212}.$$

Vježba 102

$$\text{Izračunajte}: \frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ \ldots\ +\frac{1}{132}.$$

Rezultat: $\frac{1}{6}.$

Zadatak 103 (Maria, gimnazija)

Niz je zadan formulom f(n) = f(n – 1) + n. Nađi f(100), ako je f(0) = 1.

Rješenje 103

Ponovimo!

$$1+2+3+4+5+\ \ldots\ +(n-2)+(n-1)+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Rekurzivna formula ili rekurzija je formula kojom se opći član niza izražava pomoću prethodnih članova. U rekurzivnoj formuli mora biti poznat prvi član, a ponekad je potrebno zadati više od jednog početnog člana niza. Iz zadane rekurzivne formule slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(n)=f(n-1)+n \\ f(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(100)=f(99)+100 \Rightarrow f(100)=f(99)+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(98)+99+100 \Rightarrow f(100)=f(98)+99+100 \Rightarrow f(100)=f(97)+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(97)+98+99+100 \Rightarrow f(100)=f(96)+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(96)+97+98+99+100 \Rightarrow f(100)=f(95)+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(95)+96+97+98+99+100 \Rightarrow f(100)=f(94)+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(94)+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow f(100)=f(93)+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\ldots$$

$$\Rightarrow f(100)=f(2)+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(2)+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(1)+2+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(1)+2+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(0)+1+2+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=f(0)+1+2+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=1+1+2+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=1+1+2+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100.$$

Računamo f(100).

$$f(100)=1+1+2+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=1+(1+2+3+4+5+6+7+\ \ldots\ +93+94+95+96+97+98+99+100) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(100)=1+\frac{100\cdot(100+1)}{2} \Rightarrow f(100)=1+\frac{100\cdot 101}{2} \Rightarrow f(100)=50501.$$

Vježba 103

Niz je zadan formulom f(n) = f(n – 1) + n. Nađi f(1000), ako je f(0) = 1.

Rezultat: 500501.

Zadatak 104 (Tony, tehnička škola)

Riješi jednadžbu: $2^{x+2}+2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}+\ldots=3^{x+3}+3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}+\ldots$.

Rješenje 104

Ponovimo!

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad a^0=1.$$

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju glasi:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Geometrijski red

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi $|q| < 1$. Njegova je suma jednaka

$$s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}.$$

$$2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} + \ldots = 3^{x+3} + 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^1 + 2^x + 2^x \cdot 2^{-1} + \ldots = 3^x \cdot 3^3 + 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^1 + 3^x + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \left(2^2 + 2^1 + 1 + 2^{-1} + \ldots\right) = 3^x \cdot \left(3^3 + 3^2 + 3^1 + 1 + \ldots\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \left(4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) = 3^x \cdot \left(27 + 9 + 3 + 1 + \ldots\right).$$

Oba geometrijska reda konvergentna su pa njihove sume iznose:

- $$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \;,\; q = \frac{1}{2} \\ s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \end{array}\right\} \Rightarrow s = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow s = 4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow s = 4 \cdot 2 \Rightarrow s = 8.$$

- $$27 + 9 + 3 + 1 + \ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 27 \;,\; q = \frac{1}{3} \\ s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \end{array}\right\} \Rightarrow s = 27 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow s = 27 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow s = 27 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow s = \frac{81}{2}.$$

Jednadžba sada glasi:

$$2^x \cdot 8 = 3^x \cdot \frac{81}{2} \Rightarrow 2^x \cdot 8 = 3^x \cdot \frac{81}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow 2^x \cdot 16 = 3^x \cdot 81 \Rightarrow 2^x \cdot 2^4 = 3^x \cdot 3^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x+4} = 3^{x+4} \Rightarrow 2^{x+4} = 3^{x+4} \;/\cdot \frac{1}{3^{x+4}} \Rightarrow \frac{2^{x+4}}{3^{x+4}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4.$$

Vježba 104

Riješi jednadžbu: $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^x = 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x.$

Rezultat: x = 0.

Zadatak 105 (Josipa, srednja škola)

Ako je 4. član geometrijskog niza jednak 3, umnožak prvih sedam članova tog niza iznosi:

$A)\ 343 \qquad B)\ 2187 \qquad C)\ 177147 \qquad D)\ 81$

Rješenje 105

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \ n \ge 1.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$a_4 = 3 \Rightarrow a_1 \cdot q^3 = 3.$$

Umnožak prvih sedam članova niza iznosi:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot a_1 \cdot q^3 \cdot a_1 \cdot q^4 \cdot a_1 \cdot q^5 \cdot a_1 \cdot q^6 = a_1^7 \cdot q^{21} =$$

$$= \left(a_1 \cdot q^3\right)^7 = 3^7 = 2187.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 105

Ako je 4. član geometrijskog niza jednak 2, umnožak prvih sedam članova tog niza iznosi:

$A)$ 32 $\quad B)$ 512 $\quad C)$ 64 $\quad D)$ 128

Rezultat: D.

Zadatak 106 (Josipa, srednja škola)

U nekom aritmetičkom nizu (a_n) je $a_{12} + a_{13} + a_{14} = 33$. Koliko je

$$a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{19} + a_{22} + a_{25}?$$

Rješenje 106

Ponovimo!

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

$$1 + 2 + 3 + \ \dots \ + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

U aritmetičkom nizu vrijedi

$$a_m + a_n = a_x + a_y$$

ako i samo ako je

$$m + n = x + y.$$

1.inačica

$$a_{12} + a_{13} + a_{14} = 33 \Rightarrow \left(a_1 + 11 \cdot d\right) + \left(a_1 + 12 \cdot d\right) + \left(a_1 + 13 \cdot d\right) = 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + 11 \cdot d + a_1 + 12 \cdot d + a_1 + 13 \cdot d = 33 \Rightarrow 3 \cdot a_1 + 36 \cdot d = 33 \Rightarrow 3 \cdot a_1 + 36 \cdot d = 33 \ /:3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + 12 \cdot d = 11.$$

Računamo zadani zbroj.

$$a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} + a_{19} + a_{22} + a_{25} =$$

$$= a_1 + \left(a_1 + 3 \cdot d\right) + \left(a_1 + 6 \cdot d\right) + \left(a_1 + 9 \cdot d\right) + \ \dots \ + \left(a_1 + 18 \cdot d\right) + \left(a_1 + 21 \cdot d\right) + \left(a_1 + 24 \cdot d\right) =$$

$$=a_1+a_1+3\cdot d+a_1+6\cdot d+a_1+9\cdot d+a_1+12\cdot d+a_1+15\cdot d+a_1+18\cdot d+a_1+21\cdot d+a_1+24\cdot d=$$

$$=9\cdot a_1+(3\cdot d+6\cdot d+9\cdot d+12\cdot d+15\cdot d+18\cdot d+21\cdot d+24\cdot d)=$$

$$=9\cdot a_1+3\cdot d\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8)=9\cdot a_1+3\cdot d\cdot\frac{8\cdot(8+1)}{2}=9\cdot a_1+3\cdot d\cdot\frac{8\cdot 9}{2}=$$

$$=9\cdot a_1+3\cdot d\cdot\frac{8\cdot 9}{2}=9\cdot a_1+3\cdot d\cdot 4\cdot 9=9\cdot(a_1+12\cdot d)=\left[a_1+12\cdot d=11\right]=9\cdot 11=99.$$

2.inačica

Uporabit ćemo činjenicu da je za aritmetički niz

$$a_m+a_n=a_x+a_y$$

ako i samo ako je

$$m+n=x+y.$$

$$a_{12}+a_{13}+a_{14}=33\ \Rightarrow\ (a_{12}+a_{14})+a_{13}=33\ \Rightarrow\ (a_{13}+a_{13})+a_{13}=33\ \Rightarrow\ 2\cdot a_{13}+a_{13}=33\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3\cdot a_{13}=33\ \Rightarrow\ 3\cdot a_{13}=33\ /:3\ \Rightarrow\ a_{13}=11.$$

Zadani zbroj iznosi:

$$a_1+a_4+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{16}+a_{19}+a_{22}+a_{25}=$$

$$=(a_1+a_{25})+(a_4+a_{22})+(a_7+a_{19})+(a_{10}+a_{16})+a_{13}=$$

$$=(a_{13}+a_{13})+(a_{13}+a_{13})+(a_{13}+a_{13})+(a_{13}+a_{13})+a_{13}=2\cdot a_{13}+2\cdot a_{13}+2\cdot a_{13}+2\cdot a_{13}+a_{13}=$$

$$=9\cdot a_{13}=\left[a_{13}=11\right]=9\cdot 11=99.$$

Vježba 106

U nekom aritmetičkom nizu (a_n) je $a_{12}+a_{13}+a_{14}=66$. Koliko je

$$a_1+a_4+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{16}+a_{19}+a_{22}+a_{25}?$$

Rezultat: 198.

Zadatak 107 (Ivan, gimnazija)

Koliki je umnožak drugog, osmog i šesnaestog člana niza s općim članom $a_n=\sqrt{n}$?

$A)\ 16 \quad B)\ 36 \quad C)\ 24 \quad D)\ 48$

Rješenje 107

Ponovimo!

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}\quad,\quad x^1=x\quad,\quad x^n\cdot x^m=x^{n+m}\quad,\quad\sqrt{x^2}=x\ ,\ x\ge 0.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačni niz (sljed)

$$f:N\to R\ ,\ n\mapsto f(n)=a_n.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Kažemo da je n – ti član niza (a_n) funkcija svog indeksa n.

$$a_n=f(n).$$

Umnožak zadanih članova niza iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = \sqrt{2} \\ a_8 = \sqrt{8} \\ a_{16} = \sqrt{16} \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 \cdot a_8 \cdot a_{16} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 16} = \sqrt{16 \cdot 16} = \sqrt{16^2} = 16.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 107

Koliki je umnožak drugog i osmog člana niza s općim članom $a_n = \sqrt{n}$?

$$A)\ 16 \qquad B)\ 8 \qquad C)\ 4 \qquad D)\ 2$$

Rezultat: C.

Zadatak 108 (Ivan, gimnazija)

Zbroj dekadskih logaritama prvih jedanaest uzastopnih članova geometrijskog niza jednak je 5.5. Šesti član tog niza je:

$$A)\ \sqrt{10} \qquad B)\ \sqrt{2} \qquad C)\ \sqrt{5} \qquad D)\ 2 \cdot \sqrt{2}$$

Rješenje 108

Ponovimo!

Definicija:

$$\log_b a = c \ , \ b > 0 \ , \ b \neq 1 \ , \ a > 0 \ \Leftrightarrow \ b^c = a.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

$$\log_{10} x = \log x \quad , \quad \log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad , \quad \log x^n = n \cdot \log x \quad , \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

$$x^1 = x \quad , \quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y \quad , \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zapis prvih nekoliko članova geometrijskog niza može se prikazati na razne načine (ovisno o uvjetima zadatka):

- $a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, a \cdot q^4, a \cdot q^5, a \cdot q^6, a \cdot q^7, \ldots$
- $\frac{a}{q}, a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3, a \cdot q^4, a \cdot q^5, a \cdot q^6, \ldots$

- $\frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, a\cdot q, a\cdot q^2, a\cdot q^3, a\cdot q^4, a\cdot q^5, ...$
- $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, a\cdot q, a\cdot q^2, a\cdot q^3, a\cdot q^4, ...$

itd.

1.inačica

Zapišimo prvih jedanaest uzastopnih članova geometrijskog niza na sljedeći način:

$$\frac{a}{q^5}, \frac{a}{q^4}, \frac{a}{q^3}, \frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, a\cdot q, a\cdot q^2, a\cdot q^3, a\cdot q^4, a\cdot q^5.$$

Uočimo da je šesti član toga niza broj a.

Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$\log\frac{a}{q^5}+\log\frac{a}{q^4}+\log\frac{a}{q^3}+\log\frac{a}{q^2}+\ ...\ +\log\left(a\cdot q^2\right)+\log\left(a\cdot q^3\right)+\log\left(a\cdot q^4\right)+\log\left(a\cdot q^5\right)=5.5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log\left(\frac{a}{q^5}\cdot\frac{a}{q^4}\cdot\frac{a}{q^3}\cdot\frac{a}{q^2}\cdot\frac{a}{q}\cdot a\cdot a\cdot q\cdot a\cdot q^2\cdot a\cdot q^3\cdot a\cdot q^4\cdot a\cdot q^5\right)=5.5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log\left(\frac{a}{q^5}\cdot\frac{a}{q^4}\cdot\frac{a}{q^3}\cdot\frac{a}{q^2}\cdot\frac{a}{q}\cdot a\cdot a\cdot q\cdot a\cdot q^2\cdot a\cdot q^3\cdot a\cdot q^4\cdot a\cdot q^5\right)=5.5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log a^{11}=5.5\ \Rightarrow\ 11\cdot\log a=5.5\ \Rightarrow\ 11\cdot\log a=5.5\ /:11\ \Rightarrow\ \log a=0.5\ \Rightarrow\ \log a=\frac{5}{10}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log a=\frac{5}{10}\ \Rightarrow\ \log a=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a=10^{\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ a=\sqrt{10}.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Zapišimo prvih jedanaest uzastopnih članova geometrijskog niza na sljedeći način:

$$\frac{a}{q^5}, \frac{a}{q^4}, \frac{a}{q^3}, \frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, a\cdot q, a\cdot q^2, a\cdot q^3, a\cdot q^4, a\cdot q^5.$$

Uočimo da je šesti član toga niza broj a.

Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$\log\frac{a}{q^5}+\log\frac{a}{q^4}+\log\frac{a}{q^3}+\log\frac{a}{q^2}+\ ...\ +\log\left(a\cdot q^2\right)+\log\left(a\cdot q^3\right)+\log\left(a\cdot q^4\right)+\log\left(a\cdot q^5\right)=5.5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log a-\log q^5+\log a-\log q^4+\log a-\log q^3+\ ...\ +\log a+\log q^3+\log a+\log q^4+\log a+\log q^5=5.5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log a-\log q^5+\log a-\log q^4+\log a-\log q^3+\ ...\ +\log a+\log q^3+\log a+\log q^4+\log a+\log q^5=5.5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log a+\log a+\log a+\log a+\log a+\log a+\log a+\log a+\log a+\log a+\log a=5.5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 11\cdot\log a=5.5\ \Rightarrow\ 11\cdot\log a=5.5\ /:11\ \Rightarrow\ \log a=0.5\ \Rightarrow\ \log a=\frac{5}{10}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log a=\frac{5}{10}\ \Rightarrow\ \log a=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a=10^{\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ a=\sqrt{10}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 108

Zbroj dekadskih logaritama prvih jedanaest uzastopnih članova geometrijskog niza jednak je 55. Šesti član tog niza je:

$$A)\ 10 \qquad B)\ 10^{5} \qquad C)\ 10^{-5} \qquad D)\ 1$$

Rezultat: B.

Zadatak 109 (Vlado, gimnazija)

Niz (a_n) zadan je rekurzivno: $a_0 = 0$, $a_n = n + a_{n-1}$, $n \in N$. Kojem broju je jednak a_{2006}?

Rješenje 109

Ponovimo!

$$1+2+3+4+5+\ \dots\ +n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačni niz (sljed)

$$f : N \to R \ , \ n \mapsto f(n) = a_n.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Kažemo da je n – ti član niza (a_n) funkcija svog indeksa n.

$$a_n = f(n).$$

Rekurzivna formula ili rekurzija je formula kojom se opći član niza izražava pomoću prethodnih članova. Uz rekurziju treba zadati i vrijednosti prvih nekoliko članova niza – onoliko koliko se prethodnih članova javlja u rekurziji.
Napišemo nekoliko članova zadanog niza.

$a_0 = 0$

$a_1 = 1 + a_0 = 1 + 0 = 1$

$a_2 = 2 + a_1 = 2 + 1 = 1 + 2$

$a_3 = 3 + a_2 = 3 + 2 + 1 = 1 + 2 + 3$

$a_4 = 4 + a_3 = 4 + 3 + 2 + 1 = 1 + 2 + 3 + 4$

$a_5 = 5 + a_4 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

…

$a_{2006} = 2006 + a_{2005} = 2006 + 2005 + 2004 +\ \dots\ + 3 + 2 + 1 = 1 + 2 + 3 +\ \dots\ + 2004 + 2005 + 2006.$

Uoči da je član a_{2006} jednak zbroju prvih 2006 prirodnih brojeva. Tada je:

$$a_{2006} = 1+2+3+\ \dots\ +2004+2005+2006 = \frac{2006 \cdot (2006+1)}{2} = \frac{2006 \cdot 2007}{2} =$$

$$= \frac{2006 \cdot 2007}{2} = 1003 \cdot 2007 = 2013021.$$

Vježba 109

Niz (a_n) zadan je rekurzivno: $a_0 = 0$, $a_n = n + a_{n-1}$, $n \in N$. Kojem broju je jednak a_{2000}?

Rezultat: 2001000.

Zadatak 110 (Josipa, gimnazija)

Nađi član a_p aritmetičkog niza u kojem je $a_m = n$, $a_n = m$. ($m \neq n$)

Rješenje 110

Ponovimo!

$$-x + x = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1}=a_n+d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

- $$\left.\begin{matrix} a_m=n \\ a_m=a_1+(m-1)\cdot d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{bmatrix} \Rightarrow a_1+(m-1)\cdot d=n.$$
- $$\left.\begin{matrix} a_n=m \\ a_n=a_1+(n-1)\cdot d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{bmatrix} \Rightarrow a_1+(n-1)\cdot d=m.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo razliku d.

$$\left.\begin{matrix} a_1+(m-1)\cdot d=n \\ a_1+(n-1)\cdot d=m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{oduzmemo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix} \Rightarrow a_1+(m-1)\cdot d-\left(a_1+(n-1)\cdot d\right)=n-m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1+(m-1)\cdot d-a_1-(n-1)\cdot d=n-m \Rightarrow a_1+m\cdot d-d-a_1-n\cdot d+d=n-m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1+m\cdot d-d-a_1-n\cdot d+d=n-m \Rightarrow m\cdot d-n\cdot d=n-m \Rightarrow (m-n)\cdot d=n-m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-n)\cdot d=n-m \;/\cdot\frac{1}{m-n} \Rightarrow d=\frac{n-m}{m-n} \Rightarrow d=\frac{-(m-n)}{m-n} \Rightarrow d=\frac{-(m-n)}{m-n} \Rightarrow d=-1.$$

Računamo prvi član a_1.

$$\left.\begin{matrix} a_m=a_1+(m-1)\cdot d \\ a_m=n \;,\; d=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix} \Rightarrow a_1+(m-1)\cdot(-1)=n \Rightarrow a_1-m+1=n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=m+n-1.$$

Računamo član a_p.

$$\left.\begin{matrix} a_p=a_1+(p-1)\cdot d \\ a_1=m+n-1 \;,\; d=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix} \Rightarrow a_p=m+n-1+(p-1)\cdot(-1) \Rightarrow a_p=m+n-1-p+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_p=m+n-1-p+1 \Rightarrow a_p=m+n-p.$$

Vježba 110

Nađi član a_{10} aritmetičkog niza u kojem je $a_m = n$, $a_n = m$. $(m \neq n)$

Rezultat: $a_{10}=m+n-10.$

Zadatak 111 (Monika, gimnazija)

Odredi šest brojeva čija je aritmetička sredina jednaka 3, a svaki je sljedeći od prethodnog veći za 0.4.

Rješenje 111

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ \dots \ + a_n}{n}.$$

Aritmetička sredina dobije se da zbroj pozitivnih brojeva podijelimo njihovim brojem.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

Označimo slovom x prvi od šest traženih brojeva. Budući da je sljedeći broj za 0.4 veći od prethodnog, dobije se niz:

$$x \ , \ x + 0.4 \ , \ x + 0.8 \ , \ x + 1.2 \ , \ x + 1.6 \ , \ x + 2.$$

Aritmetička sredina zadanih šest brojeva je 3 pa slijedi:

$$\frac{x + (x + 0.4) + (x + 0.8) + (x + 1.2) + (x + 1.6) + (x + 2)}{6} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x + x + 0.4 + x + 0.8 + x + 1.2 + x + 1.6 + x + 2}{6} = 3 \Rightarrow \frac{6 \cdot x + 6}{6} = 3 \Rightarrow \frac{6 \cdot (x + 1)}{6} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6 \cdot (x + 1)}{6} = 3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 3 - 1 \Rightarrow x = 2.$$

Traženi brojevu su:

$$2 \ , \ 2.4 \ , \ 2.8 \ , \ 3.2 \ , \ 3.6 \ , \ 4.$$

2.inačica

Označimo slovom x prvi od šest traženih brojeva. Budući da je sljedeći broj za 0.4 veći od prethodnog, dobije se niz:

$$x \ , \ x + 0.4 \ , \ x + 0.8 \ , \ x + 1.2 \ , \ x + 1.6 \ , \ x + 2.$$

Aritmetička sredina zadanih šest brojeva je 3 pa slijedi:

$$\frac{x + (x + 0.4) + (x + 0.8) + (x + 1.2) + (x + 1.6) + (x + 2)}{6} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x + x + 0.4 + x + 0.8 + x + 1.2 + x + 1.6 + x + 2}{6} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x + x + 0.4 + x + 0.8 + x + 1.2 + x + 1.6 + x + 2}{6} = 3 \ / \cdot 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + x + 0.4 + x + 0.8 + x + 1.2 + x + 1.6 + x + 2 = 18 \Rightarrow 6 \cdot x = 18 - 0.4 - 0.8 - 1.2 - 1.6 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot x = 18 - 6 \Rightarrow 6 \cdot x = 12 \Rightarrow 6 \cdot x = 12 \ / : 6 \Rightarrow x = 2.$$

Traženi brojevu su:

$$2 \ , \ 2.4 \ , \ 2.8 \ , \ 3.2 \ , \ 3.6 \ , \ 4.$$

Vježba 111

Odredi pet brojeva čija je aritmetička sredina jednaka 6, a svaki je sljedeći od prethodnog veći za 2.

Rezultat: 2, 4, 6, 8, 10.

Zadatak 112 (Jelena, srednja škola)

Posljednji, 25 – ti red stadiona može primiti 2048 gledatelja. Svaki prethodni red prima 20 gledatelja manje. Koliko gledatelja prima prvi red stadiona? Koliko je gledatelja na stadionu, ako je popunjen do posljednjeg mjesta?

Rješenje 112

Ponovimo!

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right].$$

Budući da je riječ o aritmetičkom nizu (zadana je razlika d i n – ti član), prvi član dobit ćemo iz formule za opći član niza.

$$\left.\begin{array}{l} a_{25} = 2048 \ , \ d = 20 \\ a_{25} = a_1 + 24 \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow 2048 = a_1 + 24 \cdot 20 \Rightarrow 2048 = a_1 + 480 \Rightarrow a_1 + 480 = 2048 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 2048 - 480 \Rightarrow a_1 = 1568.$$

Kada je stadion popunjen do posljednjeg mjesta broj gledatelja iznosi (računamo zbroj prvih n članova aritmetičkog niza):

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1568 \ , \ a_{25} = 2048 \\ s_{25} = \frac{25}{2} \cdot \left(a_1 + a_{25}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow s_{25} = \frac{25}{2} \cdot (1568 + 2048) \Rightarrow s_{25} = \frac{25}{2} \cdot 3616 \Rightarrow s_{25} = 45200.$$

Vježba 112

Posljednji, 25 – ti red stadiona može primiti 2008 gledatelja. Svaki prethodni red prima 20 gledatelja manje. Koliko gledatelja prima prvi red stadiona?

Rezultat: 1528.

Zadatak 113 (4A, TUPŠ)

Izračunaj q ako je $S_3 = 35$, $a_1 = 5$.

Rješenje 113

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \ , \ q \neq 1.$$

Razlika kubova:

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right).$$

Budući da je riječ o geometrijskom nizu, količnik q dobije se iz sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} S_3 = 35 \\ a_1 = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \cdot \dfrac{1-q^3}{1-q} = 35 \\ a_1 = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{matrix}\right] \Rightarrow 5 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = 35 \Rightarrow 5 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = 35 \; /:5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^3}{1-q} = 7 \Rightarrow \frac{(1-q) \cdot \left(1+q+q^2\right)}{1-q} = 7 \Rightarrow \frac{(1-q) \cdot \left(1+q+q^2\right)}{1-q} = 7 \Rightarrow 1+q+q^2 = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+q+q^2-7=0 \Rightarrow q^2+q-6=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} q^2+q-6=0 \\ a=1 \;,\; b=1 \;,\; c=-6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \;,\; b=1 \;,\; c=-6 \\ q_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = \dfrac{-1+5}{2} \\ q_2 = \dfrac{-1-5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = \dfrac{4}{2} \\ q_2 = -\dfrac{6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = 2 \\ q_2 = -3 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 113

Izračunaj q ako je $S_3 = 28$, $a_1 = 4$.

Rezultat: $q_1 = 2$, $q_2 = -3$.

Zadatak 114 (4A, TUPŠ)

Izračunaj q ako je $S_3 = \dfrac{7}{4}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$.

Rješenje 114

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \;,\; q \neq 1.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;,\; n \geq 1.$$

Razlika kubova:

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right).$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

1.inačica

Budući da je riječ o geometrijskom nizu, količnik q dobije se iz sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}S_3=\frac{7}{4}\\a_2=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{7}{4}\\a_1\cdot q=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{7}{4}\\a_1\cdot q=\frac{1}{2}\ /\cdot\frac{1}{q}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{7}{4}\\a_1=\frac{1}{2\cdot q}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\\text{supstitucije}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\cdot q}\cdot\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{7}{4}\Rightarrow\frac{1}{2\cdot q}\cdot\frac{(1-q)\cdot\left(1+q+q^2\right)}{1-q}=\frac{7}{4}\Rightarrow\frac{1}{2\cdot q}\cdot\frac{(1-q)\cdot\left(1+q+q^2\right)}{1-q}=\frac{7}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1+q+q^2}{2\cdot q}=\frac{7}{4}\Rightarrow\frac{1+q+q^2}{2\cdot q}=\frac{7}{4}\ /\cdot4\cdot q\Rightarrow2\cdot\left(1+q+q^2\right)=7\cdot q\Rightarrow$$

$$\Rightarrow2+2\cdot q+2\cdot q^2=7\cdot q\Rightarrow2+2\cdot q+2\cdot q^2-7\cdot q=0\Rightarrow2\cdot q^2-5\cdot q+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow2\cdot q^2-5\cdot q+2=0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot q^2-5\cdot q+2=0\\a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=2\\q_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot2}}{2\cdot2}\Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}\Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}\Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}q_1=\frac{5+3}{4}\\q_2=\frac{5-3}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}q_1=\frac{8}{4}\\q_2=\frac{2}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}q_1=2\\q_2=\frac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

2.inačica

Budući da je riječ o geometrijskom nizu, količnik q dobije se iz sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}S_3=\frac{7}{4}\\a_2=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{7}{4}\\a_1\cdot q=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{podijelimo}\\\text{jednadžbe}\end{array}\right]\Rightarrow\frac{a_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q}}{a_1\cdot q}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{a_1\cdot\frac{1-q^3}{1-q}}{a_1\cdot q}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{\frac{1-q^3}{1-q}}{q}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{1-q^3}{1-q}}{\frac{q}{1}}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{1}}\Rightarrow\frac{1-q^3}{q\cdot(1-q)}=\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{(1-q)\cdot\left(1+q+q^2\right)}{q\cdot(1-q)}=\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{(1-q)\cdot\left(1+q+q^2\right)}{q\cdot(1-q)}=\frac{7}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1+q+q^2}{q}=\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{1+q+q^2}{q}=\frac{7}{2}\ /\cdot2\cdot q\Rightarrow2\cdot\left(1+q+q^2\right)=7\cdot q\Rightarrow$$

$$\Rightarrow2+2\cdot q+2\cdot q^2=7\cdot q\Rightarrow2+2\cdot q+2\cdot q^2-7\cdot q=0\Rightarrow2\cdot q^2-5\cdot q+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot q^2-5\cdot q+2=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot q^2-5\cdot q+2=0 \\ a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=2 \\ q_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1=\dfrac{5+3}{4} \\ q_2=\dfrac{5-3}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1=\dfrac{8}{4} \\ q_2=\dfrac{2}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1=2 \\ q_2=\dfrac{1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 114

Izračunaj q ako je $S_3 = 28$, $a_2 = 8$.

Rezultat: $q_1 = 2$, $q_2 = -3$.

Zadatak 115 (Matea, srednja škola)

Turistički autobus za razgledavanje grada uveo je novi način plaćanja karata. Prvi putnik koji uđe u autobus plaća 83 kn, a svaki sljedeći 3 kn manje.

1) Koliko je svoju kartu platio osmi putnik?
2) Odredite formulu C(n) za cijenu (u kunama) koju je platio n – ti putnik.
3) Koji je po redu ušao putnik koji je platio 32 kn?

Rješenje 115

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \dots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \dots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1}=a_n+d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1)

Budući da je riječ o aritmetičkom nizu (zadan je prvi član i razlika d), osmi član dobit ćemo iz formule za opći član niza.

$$\left.\begin{matrix} a_1=83\ ,\ d=-3 \\ a_8=a_1+7\cdot d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_8=83+7\cdot(-3) \Rightarrow a_8=83-21 \Rightarrow a_8=62.$$

Osmi putnik svoju je kartu platio 62 kn.

2)
Formula C(n) za cijenu (u kunama) koju je platio n – ti putnik ako je zadan prvi član i diferencija glasi:

$$C(n)=a_1+(n-1)\cdot d \Rightarrow C(n)=83+(n-1)\cdot(-3) \Rightarrow C(n)=83-3\cdot n+3 \Rightarrow C(n)=86-3\cdot n.$$

3)
Računamo koji je po redu ušao putnik koji je platio 32 kn.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=83 \;,\; d=-3 \;,\; a_n=32 \\ a_n=a_1+(n-1)\cdot d \\ n=? \end{array}\right\} \Rightarrow 32=83+(n-1)\cdot(-3) \Rightarrow 32=83-3\cdot n+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot n=83+3-32 \Rightarrow 3\cdot n=54 \Rightarrow 3\cdot n=54 \;/:3 \Rightarrow n=18.$$

Putnik koji je platio 32 kn ušao je osamnaesti po redu u autobus.

Vježba 115

Turistički autobus za razgledavanje grada uveo je novi način plaćanja karata. Prvi putnik koji uđe u autobus plaća 83 kn, a svaki sljedeći 3 kn manje. Koliko je svoju kartu platio deseti putnik?

Rezultat: 56 kn.

Zadatak 116 (Katarina, srednja škola)

Tri pozitivna broja čine geometrijski niz. Umnožak prvoga i trećega člana je 1.44. Koji je drugi član toga niza?

Rješenje 116

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2}=a \;,\; a\geq 0.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q ≠ 0, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se količnik (kvocijent) geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1} \;,\; n\geq 1.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G=\sqrt{x\cdot y}.$$

Neka su a, b i c tri uzastopna člana geometrijskog niza. Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a,\, b,\, c \\ \text{geometrijski} \\ \text{niz} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{c}{b} \Rightarrow b^2=a\cdot c \;/\sqrt{\;} \Rightarrow b=\sqrt{a\cdot c}.$$

Računamo drugi član zadanog geometrijskog niza.

$$\left.\begin{array}{l} a,\, b,\, c \\ \frac{b}{a}=\frac{c}{b} \\ a\cdot c=1.44 \end{array}\right\} \Rightarrow b=\sqrt{a\cdot c} \Rightarrow b=\sqrt{1.44} \Rightarrow b=\sqrt{1.2^2} \Rightarrow b=1.2.$$

Vježba 116

Tri pozitivna broja čine geometrijski niz. Umnožak prvoga i trećega člana je 1.69. Koji je drugi član toga niza?

Rezultat: 1.3.

Zadatak 117 (Marko, srednja škola)

Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ako je $S_1 = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ \ldots$, $S_2 = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \ \ldots$, nađite $S_1 + S_2$.

Rješenje 117

Ponovimo!

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$, $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Geometrijski red

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n + \ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Geometrijski red

$$1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ \ldots$$

je konvergentan jer mu je količnik

$$q = \sin^2 x < 1 \text{ zbog } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

pa njegov zbroj iznosi

$$S_1 = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ \ldots \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = \sin^2 x \\ S_1 = \frac{1}{1 - q} \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{1 - \sin^2 x} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Geometrijski red

$$1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \ \ldots$$

je konvergentan jer mu je količnik

$$q = \cos^2 x < 1 \text{ zbog } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

pa njegov zbroj iznosi

$$S_2 = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \ \ldots \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q = \cos^2 x \\ S_2 = \frac{1}{1 - q} \end{array}\right\} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{1 - \cos^2 x} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Računamo zbroj $S_1 + S_2$.

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \left[\begin{array}{l} \text{proširujemo} \\ \text{razlomak sa } 4 \end{array}\right] =$$

$$=\frac{4}{4\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=\frac{4}{(2\cdot\cos x\cdot\sin x)^2}=\frac{4}{(\sin 2x)^2}=\frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Vježba 117

Neka je $0<x<\frac{\pi}{2}$. Ako je $S_1=1+\sin^2 x+\sin^4 x+\sin^6 x+\ \dots\ ,$ $S_2=1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\ \dots\ ,$ nađite $S_1^{-1}+S_2^{-1}$.

Rezultat: 1.

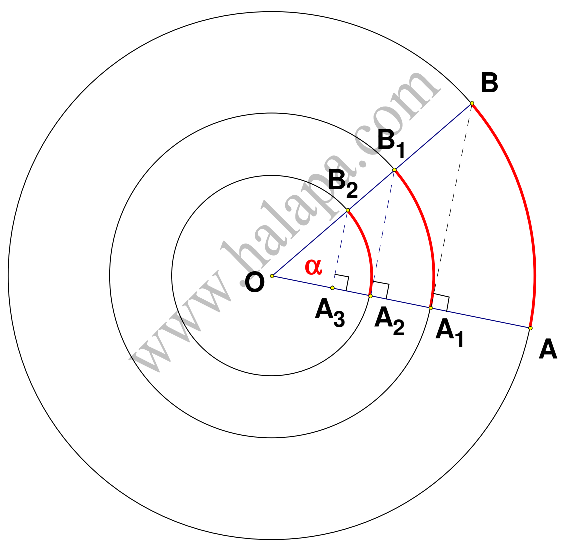
Zadatak 118 (Frendice, gimnazija)

Na slici je prikazan niz koncentričnih kružnica sa središtem u točki O. α je mjera kuta $\angle AOB$ izražena u stupnjevima, a $|OA| = 10$ cm. Na polumjeru OA leži niz točaka $A_1, A_2, A_3, \dots$, a na polumjeru OB niz točaka $B_1, B_2, B_3, \dots$.

Točka A_1 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točka B na taj polumjer.

Točka A_2 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točka B_1 na taj polumjer itd.

Zbroj duljina svih kružnih lukova $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A_1B_1}+\overset{\frown}{A_2B_2}+\overset{\frown}{A_3B_3}+\ \dots$ jednak je $\frac{5\cdot\pi\cdot\alpha}{18}$ *cm.* Odredite α.



Rješenje 118

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Geometrijski red

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+\ \dots\ +a_1\cdot q^n+\ \dots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q|<1.$$

Njegova je suma jednaka

$$s=\frac{a_1}{1-q}.$$

Ako je r polumjer kružnice, tada je duljina luka sa središnjim kutom od α stupnjeva dana formulom:

$$l(\alpha)=\frac{r\cdot\pi}{180^0}\cdot\alpha.$$

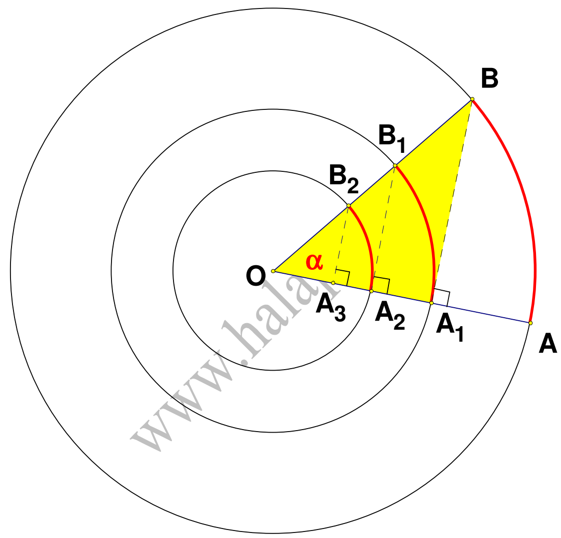
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Sa slike vidi se (kružnice su koncentrične):

$$|OA|=|OB|=10\ cm\ ,\ |OA_1|=|OB_1|\ ,\ |OA_2|=|OB_2|\ ,\ |OA_3|=|OB_3|\ ,\ ...$$

Računamo duljinu luka $l=|\widehat{AB}|$.

$$l=\frac{|OA|\cdot\pi\cdot\alpha}{180}\ \Rightarrow\ l=\frac{10\cdot\pi\cdot\alpha}{180}\ \Rightarrow\ l=\frac{10\cdot\pi\cdot\alpha}{180}\ \Rightarrow\ l=\frac{\pi\cdot\alpha}{18}.$$

- Računamo duljinu luka $l_1=|\widehat{A_1B_1}|$.



Uočimo pravokutan trokut $\triangle OA_1B$ i pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos\alpha=\frac{|OA_1|}{|OB|}\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{|OA_1|}{|OB|}\ /\cdot|OB|\ \Rightarrow\ |OA_1|=|OB|\cdot\cos\alpha\ \Rightarrow\ |OA_1|=10\cdot\cos\alpha.$$

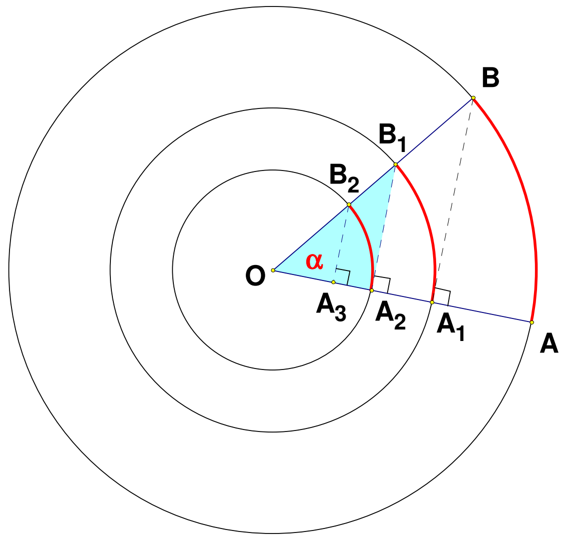
Duljina luka l_1 iznosi:

$$l_1=\frac{|OA_1|\cdot\pi\cdot\alpha}{180}\ \Rightarrow\ \left[\,|OA_1|=10\cdot\cos\alpha\,\right]\ \Rightarrow\ l_1=\frac{10\cdot\cos\alpha\cdot\pi\cdot\alpha}{180}\ \Rightarrow\ l_1=\frac{10\cdot\pi\cdot\alpha\cdot\cos\alpha}{180}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ l_1=\frac{10\cdot\pi\cdot\alpha\cdot\cos\alpha}{180}\ \Rightarrow\ l_1=\frac{\pi\cdot\alpha\cdot\cos\alpha}{18}.$$

- Računamo duljinu luka $l_2=|\widehat{A_2B_2}|$.

Uočimo pravokutan trokut $\triangle OA_2B_1$ i pomoću funkcije kosinus dobije se:



$$\cos\alpha = \frac{|OA_2|}{|OB_1|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|OA_2|}{|OB_1|} \; / \cdot |OB_1| \Rightarrow |OA_2| = |OB_1| \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[|OB_1| = |OA_1| = 10 \cdot \cos\alpha \right] \Rightarrow |OA_2| = 10 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow |OA_2| = 10 \cdot \cos^2\alpha.$$

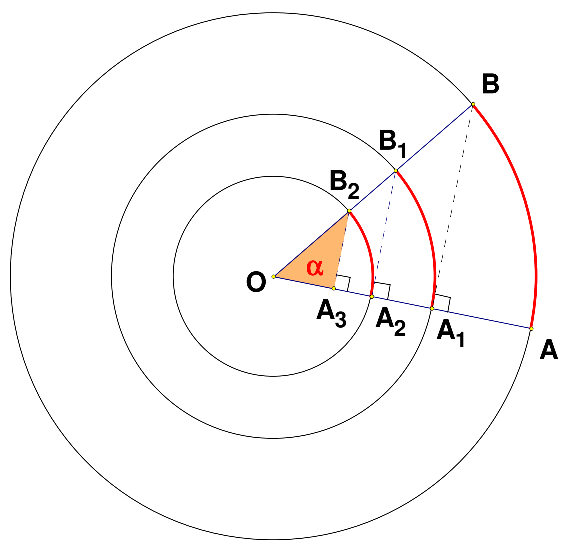
Duljina luka l_2 iznosi:

$$l_2 = \frac{|OA_2| \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow \left[|OA_2| = 10 \cdot \cos^2\alpha \right] \Rightarrow l_2 = \frac{10 \cdot \cos^2\alpha \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow l_2 = \frac{10 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{180} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2 = \frac{10 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{180} \Rightarrow l_2 = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{18}.$$

- Računamo duljinu luka $l_3 = \left|\widehat{A_3B_3}\right|$.

Uočimo pravokutan trokut $\triangle OA_3B_2$ i pomoću funkcije kosinus dobije se:



$$\cos\alpha = \frac{|OA_3|}{|OB_2|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|OA_3|}{|OB_2|} \; / \cdot |OB_2| \Rightarrow |OA_3| = |OB_2| \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[|OB_2| = |OA_2| = 10 \cdot \cos^2\alpha \right] \Rightarrow |OA_3| = 10 \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow |OA_3| = 10 \cdot \cos^3\alpha.$$

Duljina luka l_3 iznosi:

$$l_3 = \frac{|OA_3| \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow \left[|OA_3| = 10 \cdot \cos^3\alpha \right] \Rightarrow l_3 = \frac{10 \cdot \cos^3\alpha \cdot \pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow l_3 = \frac{10 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{180} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_3 = \frac{10 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{180} \Rightarrow l_3 = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{18}.$$

Dakle, vrijedi:

$$l = \frac{\pi \cdot \alpha}{18} \;,\; l_1 = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos\alpha}{18} \;,\; l_2 = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{18} \;,\; l_3 = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{18} \;,\; \ldots \;,\; l_n = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^n\alpha}{18} \;,\; \ldots$$

Budući da je zadan zbroj duljina svih kružnih lukova, slijedi:

$$l + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \ldots = \frac{5 \cdot \pi \cdot \alpha}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi \cdot \alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^4\alpha}{18} + \ldots = \frac{5 \cdot \pi \cdot \alpha}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi \cdot \alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^2\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^3\alpha}{18} + \frac{\pi \cdot \alpha \cdot \cos^4\alpha}{18} + \ldots = \frac{5 \cdot \pi \cdot \alpha}{18} \; / \cdot \frac{18}{\pi \cdot \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha + \cos^4\alpha + \ldots = 5.$$

Na lijevoj strani jednakosti je konvergentan geometrijski red jer je količnik

$$|q| = |\cos\alpha| < 1$$

pa vrijedi

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \;,\; q = \cos\alpha \\ \dfrac{a_1}{1-q} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1-\cos\alpha} = 5 \Rightarrow \frac{1}{1-\cos\alpha} = 5 \; / \cdot (1-\cos\alpha) \Rightarrow 1 = 5 \cdot (1-\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = 5 - 5 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 5 \cdot \cos\alpha = 5 - 1 \Rightarrow 5 \cdot \cos\alpha = 4 \Rightarrow 5 \cdot \cos\alpha = 4 \; /: 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \alpha = 36^0 \, 52' \, 11.6''.$$

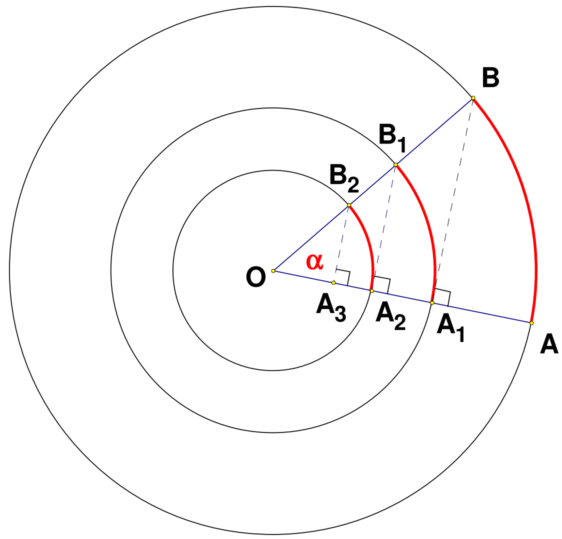
Vježba 118

Na slici je prikazan niz koncentričnih kružnica sa središtem u točki O. α je mjera kuta $\angle AOB$ izražena u stupnjevima, a $|OA| = 10$ cm. Na polumjeru OA leži niz točaka A_1, A_2, A_3, ... , a na polumjeru OB niz točaka B_1, B_2, B_3, ...

Točka A_1 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točka B na taj polumjer.

Točka A_2 je sjecište polumjera $\overline{OA}$ i okomice iz točka B_1 na taj polumjer itd.

Zbroj duljina svih kružnih lukova $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A_1B_1} + \overset{\frown}{A_2B_2} + \overset{\frown}{A_3B_3} + \ldots$ jednak je $\frac{\pi \cdot \alpha}{18}$ *cm*. Odredite α.



Rezultat: 90°.

Zadatak 119 (Ivana, gimnazija)

O brojevima a, b i c znamo sljedeće: niz a, b, c je aritmetički niz, a + c = 10 i niz a + 1, b + 4, c + 19 je geometrijski niz. Odredite te brojeve.

Rješenje 119

Ponovimo!

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \ldots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika):

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot a_n=a_{n-1}+a_{n+1}.$$

Niz je geometrijski ako je kvocijent svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalan i iznosi q. Broj q zovemo kvocijent (količnik) geometrijskog niza.

$$\frac{a_2}{a_1}=q\ ,\ \frac{a_3}{a_2}=q\ ,\ \frac{a_4}{a_3}=q\ ,\ \frac{a_5}{a_4}=q\ ,\ \frac{a_6}{a_5}=q\ ,\ \ldots\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=q\ \ldots .$$

Svaki član geometrijskog niza (osim prvog) jednak je geometrijskoj sredini susjednih članova (prethodnika i sljedbenika).

$$a_n=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}\ \Rightarrow\ a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}.$$

Niz a, b, c je aritmetički pa vrijedi:

$$b=\frac{a+c}{2}\ \Rightarrow\ b=\frac{a+c}{2}\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ 2\cdot b=a+c\ \Rightarrow\ a+c=2\cdot b.$$

Iz sustava jednadžbi

$$\begin{cases} a+c=10 \\ a+c=2\cdot b \end{cases}$$

izračunamo član b.

$$\left.\begin{array}{l} a+c=10 \\ a+c=2\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot b=10 \Rightarrow 2\cdot b=10 \;/:2 \Rightarrow b=5.$$

Niz a + 1, b + 4, c + 19 je geometrijski pa vrijedi:

$$b+4=\sqrt{(a+1)\cdot(c+19)} \Rightarrow b+4=\sqrt{(a+1)\cdot(c+19)} \;/^{2} \Rightarrow (b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)\cdot(c+19)=(b+4)^2.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo članove a i c.

$$\left.\begin{array}{l} a+c=10 \\ b=5 \\ (a+1)\cdot(c+19)=(b+4)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=10-a \\ b=5 \\ (a+1)\cdot(c+19)=(b+4)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)\cdot(10-a+19)=(5+4)^2 \Rightarrow (a+1)\cdot(29-a)=9^2 \Rightarrow (a+1)\cdot(29-a)=81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 29\cdot a-a^2+29-a=81 \Rightarrow 29\cdot a-a^2+29-a-81=0 \Rightarrow -a^2+28\cdot a-52=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a^2+28\cdot a-52=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow a^2-28\cdot a+52=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2-28\cdot a+52=0 \\ a=1\;,\; b=-28\;,\; c=52 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\;,\; b=-28\;,\; c=52 \\ a_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{1,2}=\frac{-(-28)\pm\sqrt{(-28)^2-4\cdot 1\cdot 52}}{2\cdot 1} \Rightarrow a_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{784-208}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{576}}{2} \Rightarrow a_{1,2}=\frac{28\pm 24}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{28+24}{2} \\ a_2=\dfrac{28-24}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{52}{2} \\ a_2=\dfrac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=26 \\ a_2=2 \end{array}\right\}.$$

Vidimo da su dva rješenja za prvi član niza što znači da će postojati dva niza sa navedenim svojstvima.
Sada računamo član c.

$$\left.\begin{array}{l} a_1=26 \\ a_2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow [\,c=10-a\,] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1=10-26 \\ c_2=10-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1=-16 \\ c_2=8 \end{array}\right\}.$$

Traženi nizovi su:

$$\left.\begin{array}{l} a_1, b, c_1 \\ 26, 5, -16 \end{array}\right\} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a_2, b, c_2 \\ 2, 5, 8 \end{array}\right\}$$

Vježba 119

O brojevima a, b i c znamo sljedeće: niz a, b, c je aritmetički niz, a + c = 20 i niz a + 2, b + 8, c + 38 je geometrijski niz. Odredite te brojeve.

Rezultat: 52, 10, – 32 , 4, 19, 16.

Zadatak 120 (Sara, gimnazija)

Dokaži da su brojevi $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_{12} 2}$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza (slijeda).

Rješenje 120

Ponovimo!

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika):

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Brojevi

$$\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_{12} 2}$$

tri su uzastopna člana aritmetičkog niza (slijeda) pa vrijedi:

$$\frac{1}{\log_6 2} = \frac{\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{12} 2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_6 2} = \frac{\frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{12} 2}}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{\log_6 2} = \frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_{12} 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log_2 6 = \log_2 3 + \log_2 12 \Rightarrow \log_2 6^2 = \log_2 (3 \cdot 12) \Rightarrow \log_2 36 = \log_2 36.$$ Dokaz gotov.

Vježba 120

Dokaži da su brojevi $\frac{1}{\log_4 2}, \frac{1}{\log_8 2}, \frac{1}{\log_{16} 2}$ tri uzastopna člana aritmetičkog niza (slijeda).

Rezultat: Dokaz analogan.