Zadatak 081 (Mirela, maturantica)

Prvi član aritmetičkog niza iznosi 1, zbroj prvih m članova odnosi se prema zbroju prvih n članova kao $m^2 : n^2$. Nađi taj niz.

Rješenje 081

Ponovimo!

$$x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\text{ ili }\; y = 0 \;\text{ ili }\; x = y = 0.$$

Razmjer

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ s_m : s_n &= m^2 : n^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ n^2 \cdot s_m &= m^2 \cdot s_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &a_1 = 1 \\ &n^2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (m-1) \cdot d\right] = m^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \left[2 \cdot 1 + (m-1) \cdot d\right] = m^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot d\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \left[2 + (m-1) \cdot d\right] = m^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \left[2 + (n-1) \cdot d\right] \Rightarrow \left[m,\ n \neq 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 \cdot \frac{m}{2} \cdot \left[2 + (m-1) \cdot d\right] = m^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \left[2 + (n-1) \cdot d\right] \;/\cdot \frac{2}{m \cdot n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot \left[2 + (m-1) \cdot d\right] = m \cdot \left[2 + (n-1) \cdot d\right] \Rightarrow n \cdot \left[2 + m \cdot d - d\right] = m \cdot \left[2 + n \cdot d - d\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot n + m \cdot n \cdot d - n \cdot d = 2 \cdot m + m \cdot n \cdot d - m \cdot d \Rightarrow 2 \cdot n + m \cdot n \cdot d - n \cdot d = 2 \cdot m + m \cdot n \cdot d - m \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot n - n \cdot d = 2 \cdot m - m \cdot d \Rightarrow 2 \cdot n - n \cdot d - 2 \cdot m + m \cdot d = 0 \Rightarrow 2 \cdot n - 2 \cdot m - n \cdot d + m \cdot d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot n - 2 \cdot m) - (n \cdot d - m \cdot d) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (n - m) - d \cdot (n - m) = 0 \Rightarrow (n - m) \cdot (2 - d) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &n - m = 0 \;\text{ nema smisla jer je } n \neq m \\ &2 - d = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2 - d = 0 \Rightarrow -d = -2 \;/\cdot (-1) \Rightarrow d = 2.$$

Traženi niz (slijed) glasi:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = 1\ ,\ d = 2 \\ &a_{n+1} = a_n + d \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Vježba 081

Prvi član aritmetičkog niza iznosi 1, zbroj prvih m članova odnosi se prema zbroju prvih n članova kao m : n. Nađi taj niz.

Rezultat: Konstantan niz (slijed): 1, 1, 1, ...

Zadatak 082 (Valentina, maturantica)

Nađi prvi član i razliku aritmetičkog niza općeg člana $a_n = \frac{3 \cdot n - 1}{6}$.

Rješenje 082

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

$$a_n = \frac{3 \cdot n - 1}{6} \Rightarrow a_n = \frac{3 \cdot n}{6} - \frac{1}{6} \Rightarrow a_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{proširimo sa} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{array} \right] \Rightarrow a_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot (n-1) + \frac{3-1}{6} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot (n-1) + \frac{2}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot (n-1) + \frac{1}{3} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{2}.$$

Prvi član a_1 i razlika d glase:

$$\left. \begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{2} \end{array} \right\}.$$

Vježba 082

Nađi prvi član i razliku aritmetičkog niza općeg člana $a_n = \frac{2 \cdot n - 1}{4}$.

Rezultat: $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$.

Zadatak 083 (Branislav, srednja škola)

Odredi geometrijski niz ako je $a_1 = 3$, $a_n = 192$, $s_n = 129$.

Rješenje 083

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \ , \ q \neq 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 192 = 3 \cdot q^{n-1} \\ 129 = 3 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 192 = 3 \cdot q^{n-1} \;\; / \cdot \dfrac{q}{3} \\ 129 = 3 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \;\; / : 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 64 \cdot q = q^n \\ 43 = \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 43 = \frac{64 \cdot q - 1}{q - 1} \Rightarrow 43 = \frac{64 \cdot q - 1}{q - 1} \;/ \cdot (q-1) \Rightarrow 43 \cdot (q-1) = 64 \cdot q - 1 \Rightarrow 43 \cdot q - 43 = 64 \cdot q - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 43 \cdot q - 64 \cdot q = -1 + 43 \Rightarrow -21 \cdot q = 42 \;/ : (-21) \Rightarrow q = -2.$$

Geometrijski niz glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \;,\; q = -2 \\ a_1,\, a_1 \cdot q,\, a_1 \cdot q^2,\, a_1 \cdot q^3,\, a_1 \cdot q^4,\, \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow 3,\, -6,\, 12,\, -24,\, 48,\, -96,\, \ldots$$

Vježba 083

Odredi geometrijski niz ako je $a_1 = 2$, $a_n = 128$, $s_n = 86$.

Rezultat: 2, – 4, 8, – 16, 32, – 64, 128, ...

Zadatak 084 (Nikolina, gimnazija)

Dan je niz $a_n = n - \cos(n \cdot \pi)$, $n \in N$. Koliko je članova niza koji su strogo manji od a_{2006}?

Rješenje 084

Ponovimo!

$$\cos(2 \cdot k \cdot \pi) = 1 \quad , \quad \cos((2 \cdot k - 1) \cdot \pi) = -1 \;,\; k \in Z.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačni niz (slijed)

$$f : N \to R \;,\; n \mapsto f(n) = a_n.$$

Niz se može zadati formulom kojom se opći član, tj. n – ti član niza izražava pomoću rednog broja n. Kažemo da je n – ti član niza a_n funkcija svog indeksa n,

$$a_n = f(n).$$

Najprije odredimo vrijednost člana a_{2006}:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n - \cos(n \cdot \pi) \\ n = 2006 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{2006} = 2006 - \cos(2006 \cdot \pi) \Rightarrow a_{2006} = 2006 - 1 \Rightarrow a_{2006} = 2005.$$

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n - \cos(n \cdot \pi) \\ a_n < a_{2006} \;,\; a_{2006} = 2005 \end{array}\right\} \Rightarrow n - \cos(n \cdot \pi) < 2005.$$

Probom (metodom ćorave koke ☺) dobije se rješenje:

- n = 2006

$$2006 - \cos(2006 \cdot \pi) < 2005 \Rightarrow 2006 - 1 < 2005 \Rightarrow 2005 < 2005. \text{ nema smisla}$$

- n = 2005

$$2005 - \cos(2005 \cdot \pi) < 2005 \Rightarrow 2005 - (-1) < 2005 \Rightarrow 2005 + 1 < 2005 \Rightarrow 2006 < 2005. \text{ nema smisla}$$

- n = 2004

$$2004 - \cos(2004 \cdot \pi) < 2005 \Rightarrow 2004 - 1 < 2005 \Rightarrow 2003 < 2005. \text{ točno je}$$

Broj članova niza je 2004.

Vježba 084

Dan je niz $a_n = n - \cos(n \cdot \pi)$, $n \in N$. Koliko je članova niza koji su strogo manji od a_{1006}?

Rezultat: 1004.

Zadatak 085 (Silvija, srednja škola)

U geometrijskom nizu je zbroj prvih 6 članova jednak trostrukom zbroju prvih triju članova. Nađi kvocijent niza.

Rješenje 085

Ponovimo!

$$a \cdot b = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \;,\; q \neq 1.$$

$$s_6 = 3 \cdot s_3 \;\Rightarrow\; a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \;\Rightarrow\; a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \;/\cdot \frac{q-1}{a_1} \;\Rightarrow\; q^6 - 1 = 3 \cdot \left(q^3 - 1\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; q^6 - 1 - 3 \cdot \left(q^3 - 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(q^3\right)^2 - 1 - 3 \cdot \left(q^3 - 1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(q^3 - 1\right) \cdot \left(q^3 + 1\right) - 3 \cdot \left(q^3 - 1\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(q^3 - 1\right) \cdot \left(q^3 + 1 - 3\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left(q^3 - 1\right) \cdot \left(q^3 - 2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} q^3 - 1 = 0 \\ q^3 - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} q^3 = 1 \\ q^3 = 2 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} q^3 = 1 \;/\sqrt[3]{\;} \\ q^3 = 2 \;/\sqrt[3]{\;} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} q_1 = \sqrt[3]{1} \\ q_2 = \sqrt[3]{2} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} q_1 = 1 \text{ nema smisla zbog } q \neq 1 \\ q_2 = \sqrt[3]{2} \text{ rješenje je} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; q = \sqrt[3]{2}.$$

Vježba 085

U geometrijskom nizu je zbroj prva četiri člana jednak dvostrukom zbroju prva dva člana. Nađi kvocijent niza.

Rezultat: – 1.

Zadatak 086 (Nina, gimnazija)

Zbroj prvih 10 članova aritmetičkog niza je 100, a sljedećih 10 je 500. Kolika je razlika 20. i 1. člana tog niza?

Rješenje 086

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

Budući da je zbroj prvih 10 članova aritmetičkog niza 100, a sljedećih 10 iznosi 500, slijedi da je zbroj prvih 20 članova aritmetičkog niza

$$s_{20} = 100 + 500 \Rightarrow s_{20} = 600.$$

Iz formula za zbroj prvih 10 i prvih 20 članova aritmetičkog niza dobije se razlika tog niza.

$$\left.\begin{array}{l} s_{10} = 100 \\ s_{20} = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 9 \cdot d\right] = 100 \\ \frac{20}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 19 \cdot d\right] = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 9 \cdot d\right] = 100 \\ 10 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 19 \cdot d\right] = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 9 \cdot d\right] = 100 \ / : 5 \\ 10 \cdot \left[2 \cdot a_1 + 19 \cdot d\right] = 600 \ / : 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a_1 + 9 \cdot d = 20 \\ 2 \cdot a_1 + 19 \cdot d = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a_1 + 9 \cdot d = 20 \ / \cdot (-1) \\ 2 \cdot a_1 + 19 \cdot d = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 \cdot a_1 - 9 \cdot d = -20 \\ 2 \cdot a_1 + 19 \cdot d = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \cdot d = 40 \Rightarrow 10 \cdot d = 40 \ / : 10 \Rightarrow d = 4.$$

Razlika 20. i 1. člana iznosi:

$$a_{20} - a_1 = a_1 + 19 \cdot d - a_1 = a_1 + 19 \cdot d - a_1 = 19 \cdot d = 19 \cdot 4 = 76.$$

Vježba 086

Zbroj prvih 10 članova aritmetičkog niza je 100, a sljedećih 10 je 500. Kolika je razlika 10. i 1. člana tog niza?

Rezultat: 36.

Zadatak 087 (Josipa, gimnazija)

Tijelo koje se giba niz kosinu prevalilo je u prvoj sekundi put od 2 metra, a u svakoj sljedećoj 1.5 m više nego u prethodnoj. Koliki je put tijelo prevalilo nakon 10 sekundi?

Rješenje 087

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

U zadatku riječ je o aritmetičkom nizu čiji je prvi član $a_1 = 2$, a razlika (diferencija) d = 1.5. Put koji je tijelo prevalilo nakon 10 sekundi jednak je sumi zadanog aritmetičkog niza za prvih 10 članova, n = 10.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \ , \ d = 1.5 \ , \ n = 10 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{10} = \frac{10}{2} \cdot \left[2 \cdot 2 + (10-1) \cdot 1.5\right] \Rightarrow s_{10} = 5 \cdot \left[4 + 9 \cdot 1.5\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{10} = 5 \cdot \left[4 + 13.5\right] \Rightarrow s_{10} = 5 \cdot 17.5 \Rightarrow s_{10} = 87.5.$$

Nakon 10 sekundi tijelo je prevalilo put 87.5 metara.

Vježba 087

Tijelo koje se giba niz kosinu prevalilo je u prvoj sekundi put od 2 metra, a u svakoj sljedećoj 1 m više nego u prethodnoj. Koliki je put tijelo prevalilo nakon 10 sekundi?

Rezultat: 65 m.

Zadatak 088 (Josipa, gimnazija)

Ako je zbroj 2. i 10. člana aritmetičkog niza jednak 12, koliki je zbroj 4., 6. i 8. člana?

Rješenje 088

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj drugog i desetog člana aritmetičkog niza izrazimo pomoću prvog člana a_1 i diferencije d:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \\ a_2 + a_{10} = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + d + a_1 + 9 \cdot d = 12 \Rightarrow 2 \cdot a_1 + 10 \cdot d = 12 \;/:2 \Rightarrow a_1 + 5 \cdot d = 6.$$

Sada računamo zbroj četvrtog, šestog i osmog člana aritmetičkog niza:

$$a_4 + a_6 + a_8 = a_1 + 3 \cdot d + a_1 + 5 \cdot d + a_1 + 7 \cdot d = 3 \cdot a_1 + 15 \cdot d = 3 \cdot (a_1 + 5 \cdot d) = \left[a_1 + 5 \cdot d = 6 \right] = 3 \cdot 6 = 18.$$

Vježba 088

Ako je zbroj 2. i 10. člana aritmetičkog niza jednak 14, koliki je zbroj 4., 6. i 8. člana?

Rezultat: 21.

Zadatak 089 (Josipa, gimnazija)

Za koji su x brojevi 1 + sin x, $\sin^2$ x, 1 + sin 3x uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza?

Rješenje 089

Ponovimo!

$$\sin 3x = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x \quad , \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika):

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2 \cdot a_n = a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Jednadžbu koja sadrži trigonometrijske funkcije nepoznatog broja ili kuta zovemo trigonometrijska jednadžba s jednom nepoznanicom.

Pitamo se za kakve brojeve x i α vrijedi

$$\sin x = \sin \alpha.$$

Zamislimo da je α zadan i da tražimo sve vrijednosti od x za koje vrijedi ta jednakost. Budući da je funkcija sinus periodična s osnovnim periodom $2 \cdot \pi$, jasno je da će ona vrijediti ako je

$$x = \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi,\ k \in Z.$$

Međutim, kako je

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$$

može biti i

$$x = \pi - \alpha + k \cdot 2 \cdot \pi,\ k \in Z.$$

Jednadžba $\sin x = a$, $a \in R$, ima rješenje ako je $|a| \le 1$. Ukoliko odredimo jedno rješenje **α**, zbog valjanosti formule redukcije

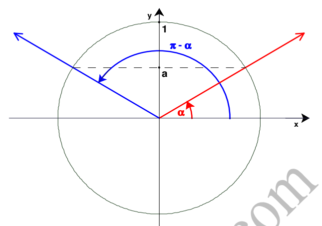
$$\sin(\pi - x) = \sin x,$$

slijedi da je i **$\pi - \alpha$** rješenje jednadžbe $\sin x = a$. Funkcija sinus periodična je,

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x,$$

pa slijedi da su rješenja:

$$x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi \quad , \quad x_2 = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in Z.$$



Budući da su brojevi $1 + \sin x$, $\sin^2 x$, $1 + \sin 3x$ uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza, slijedi da je srednji član aritmetička sredina svojih susjeda:

$$2 \cdot \sin^2 x = 1 + \sin x + 1 + \sin 3x.$$

Transformacijom jednadžbe dobije se:

$$2 \cdot \sin^2 x = 1 + \sin x + 1 + \sin 3x \Rightarrow 2 \cdot \sin^2 x = 1 + \sin x + 1 + 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin^2 x = 2 + 4 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x \Rightarrow 2 \cdot \sin^2 x - 2 - 4 \cdot \sin x + 4 \cdot \sin^3 x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin^2 x + 4 \cdot \sin^3 x - 2 - 4 \cdot \sin x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin^2 x \cdot (1 + 2 \cdot \sin x) - 2 \cdot (1 + 2 \cdot \sin x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + 2 \cdot \sin x) \cdot \left(2 \cdot \sin^2 x - 2\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + 2 \cdot \sin x = 0 \\ 2 \cdot \sin^2 x - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot \sin x = -1 \\ 2 \cdot \sin^2 x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot \sin x = -1 \ /:2 \\ 2 \cdot \sin^2 x = 2 \ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x = -0.5 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x = -0.5 \\ \sin^2 x = 1 \ /\sqrt{\ } \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x = -0.5 \\ \sin x = \pm\sqrt{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x = -0.5 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x = -0.5 \\ \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right\}.$$

Rješavamo trigonometrijske jednadžbe.

- $\sin x = -0.5$

Prvi skup rješenja

$$\sin x = -0.5 \Rightarrow \sin x = -0.5 \ / \cdot (-1) \Rightarrow -\sin x = 0.5 \Rightarrow \left[\sin(\pi + x) = -\sin x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\pi + x) = 0.5 \Rightarrow \sin(\pi + x) = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi + x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \pi + 2 \cdot k \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \quad , \quad k \in Z.$$

Drugi skup rješenja

$$\pi + x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \;\Rightarrow\; \pi + x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \;\Rightarrow\; x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \;,\; k \in Z.$$

Oba skupa rješenja mogu se napisati na kraći način:

$$x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \;,\; k \in Z.$$

- sin x = 1

$$\sin x = 1 \;\Rightarrow\; \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \;,\; k \in Z.$$

- sin x = – 1

$$\sin x = -1 \;\Rightarrow\; \sin x = \sin \frac{3 \cdot \pi}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \;,\; k \in Z.$$

Rješenja

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \quad , \quad x = \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \;,\; k \in Z$$

kraće zapisujemo pomoću izraza:

$$x = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \;,\; k \in Z.$$

Vježba 089

Za koji su x brojevi 1 + sin x, 1 – $\cos^2$ x, 1 + sin 3x uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza?

Rezultat: $x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad , \quad x = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \;,\; k \in Z.$

Zadatak 090 (Nikolina, gimnazija)

Zbroj prvih 7 članova aritmetičkog niza je – 7, a zbroj sljedećih 6 članova iznosi 111. Nađi prvi član tog aritmetičkog niza.

Rješenje 090

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \;,\; a_3 - a_2 = d \;,\; a_4 - a_3 = d \;,\; a_5 - a_4 = d \;,\; a_6 - a_5 = d \;,\; \ldots \;,\; a_n - a_{n-1} = d \;\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \;,\; n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Formula za opći (n – ti) član aritmetičkog niza glasi:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Formula za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza glasi:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

1.inačica

Ako je zbroj prvih 7 članova aritmetičkog niza – 7, slijedi:

$$s_7 = -7 \;\Rightarrow\; \frac{7}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 6 \cdot d \right] = -7 \;\Rightarrow\; \frac{7}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 6 \cdot d \right] = -7 \;/ \cdot \frac{2}{7} \;\Rightarrow\; 2 \cdot a_1 + 6 \cdot d = -2 \;/ : 2 \;\Rightarrow\; a_1 + 3 \cdot d = -1.$$

Ako je zbroj prvih 7 članova aritmetičkog niza – 7, a zbroj sljedećih 6 članova iznosi 111, tada je zbroj prvih 13 članova aritmetičkog niza jednak:

$$s_{13} = -7 + 111 \;\Rightarrow\; s_{13} = 104 \;\Rightarrow\; \frac{13}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 12 \cdot d \right] = 104 \;\Rightarrow\; \frac{13}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 12 \cdot d \right] = 104 \;/ \cdot \frac{2}{13} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a_1+12\cdot d=16\ /:2\ \Rightarrow\ a_1+6\cdot d=8.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se prvi član a_1:

$$\left.\begin{matrix} a_1+3\cdot d=-1 \\ a_1+6\cdot d=8 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{matrix}\right]\Rightarrow\left.\begin{matrix} a_1+3\cdot d=-1\ /\cdot(-2) \\ a_1+6\cdot d=8 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} -2\cdot a_1-6\cdot d=2 \\ a_1+6\cdot d=8 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -a_1=10\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ a_1=-10.$$

2.inačica

Ako je zbroj prvih 7 članova aritmetičkog niza – 7, slijedi:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-7\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1+a_1+d+a_1+2\cdot d+a_1+3\cdot d+a_1+4\cdot d+a_1+5\cdot d+a_1+6\cdot d=-7\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7\cdot a_1+21\cdot d=-7\ /:7\ \Rightarrow\ a_1+3\cdot d=-1.$$

Ako je zbroj prvih 7 članova aritmetičkog niza – 7, a zbroj sljedećih 6 članova iznosi 111, tada slijedi:

$$a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}=111\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1+7\cdot d+a_1+8\cdot d+a_1+9\cdot d+a_1+10\cdot d+a_1+11\cdot d+a_1+12\cdot d=111\ \Rightarrow\ 6\cdot a_1+57\cdot d=111\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 6\cdot a_1+57\cdot d=111\ /:3\ \Rightarrow\ 2\cdot a_1+19\cdot d=37.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se prvi član a_1:

$$\left.\begin{matrix} a_1+3\cdot d=-1 \\ 2\cdot a_1+19\cdot d=37 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{matrix}\right]\Rightarrow\left.\begin{matrix} a_1+3\cdot d=-1\ /\cdot 19 \\ 2\cdot a_1+19\cdot d=37\ /\cdot(-3) \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix} 19\cdot a_1+57\cdot d=-19 \\ -6\cdot a_1-57\cdot d=-111 \end{matrix}\right\}\Rightarrow 13\cdot a_1=-130\ /:13\ \Rightarrow\ a_1=-10.$$

Vježba 090

Zbroj prvih 7 članova aritmetičkog niza je -7, a zbroj sljedećih 6 članova iznosi 111. Nađi razliku (diferenciju) tog aritmetičkog niza.

Rezultat: 3.

Zadatak 091 (Vesna, gimnazija)

Nađi zbroj svih dvoznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite od 0.

Rješenje 091

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\ ,\ a_3-a_2=d\ ,\ a_4-a_3=d\ ,\ a_5-a_4=d\ ,\ a_6-a_5=d\ ,\ \dots\ ,\ a_n-a_{n-1}=d\ \dots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Formula za opći (n – ti) član aritmetičkog niza glasi:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Formula za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza glasi:

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right].$$

Odredimo broj svih dvoznamenkastih brojeva.

Prvi broj je 10, zadnji je 99, a razlika iznosi 1.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \ , \ a_n = 99 \ , \ d = 1 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow 99 = 10 + (n-1) \cdot 1 \Rightarrow 99 = 10 + n - 1 \Rightarrow 99 = 9 + n \Rightarrow n = 90.$$

Zbroj svih dvoznamenkastih brojeva iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \ , \ n = 90 \ , \ a_{90} = 99 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{90} = \frac{90}{2} \cdot [10 + 99] \Rightarrow s_{90} = 45 \cdot 109 \Rightarrow s_{90} = 4905.$$

Sada izračunamo broj dvoznamenkastih brojeva kojima je zadnja znamenka 0.
Prvi broj je 10, zadnji je 90, a razlika iznosi 10.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \ , \ a_n = 90 \ , \ d = 10 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow 90 = 10 + (n-1) \cdot 10 \Rightarrow 90 = 10 + (n-1) \cdot 10 \ / : 10 \Rightarrow 9 = 1 + n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = 1 + n - 1 \Rightarrow n = 9.$$

Zbroj svih dvoznamenkastih brojeva kojima je zadnja znamenka 0 iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \ , \ n = 9 \ , \ a_9 = 90 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_9 = \frac{9}{2} \cdot [10 + 90] \Rightarrow s_9 = \frac{9}{2} \cdot 100 \Rightarrow s_9 = 450.$$

Zbroj svih dvoznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite od 0 jednak je:

$$s_{90} - s_9 = 4905 - 450 \Rightarrow s_{90} - s_9 = 4455.$$

Vježba 091

Nađi zbroj svih dvoznamenkastih brojeva.

Rezultat: 4905.

Zadatak 092 (Vesna, gimnazija)

Nađi vrijednost izraza $\dfrac{x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2009}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{1}{x^{2009}}}, x > 0.$

Rješenje 092

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \ , \ q \neq 1.$$

Računamo zbroj geometrijskog niza iz brojnika:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2009} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = x \ , \ q = x \ , \ n = 2009 \\ s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{array}\right] \Rightarrow x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2009} = x \cdot \frac{1 - x^{2009}}{1 - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+x^2+x^3+\ldots+x^{2009}=\frac{x\cdot\left(1-x^{2009}\right)}{1-x}\Rightarrow x+x^2+x^3+\ldots+x^{2009}=\frac{x\cdot\left(x^{2009}-1\right)}{x-1}.$$

Računamo zbroj geometrijskog niza iz nazivnika:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}\Rightarrow\begin{bmatrix} a_1=\frac{1}{x}\ ,\ q=\frac{1}{x}\ ,\ n=2009 \\ s_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^{2009}}{1-\frac{1}{x}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}=\frac{1-\frac{1}{x^{2009}}}{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}=\frac{1-\frac{1}{x^{2009}}}{x-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}=\frac{\frac{x^{2009}-1}{x^{2009}}}{x-1}\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}=\frac{\frac{x^{2009}-1}{x^{2009}}}{\frac{x-1}{1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}=\frac{x^{2009}-1}{(x-1)\cdot x^{2009}}.$$

Vrijednost zadanog izraza iznosi:

$$\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^{2009}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}}=\frac{\frac{x\cdot\left(x^{2009}-1\right)}{x-1}}{\frac{x^{2009}-1}{(x-1)\cdot x^{2009}}}\Rightarrow \frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^{2009}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}}=\frac{\frac{x\cdot\left(x^{2009}-1\right)}{x-1}}{\frac{x^{2009}-1}{(x-1)\cdot x^{2009}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^{2009}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}}=\frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{x^{2009}}}\Rightarrow \frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^{2009}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}}=\frac{x\cdot x^{2009}}{1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^{2009}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}}=\frac{x^{2010}}{1}\Rightarrow \frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^{2009}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{2009}}}=x^{2010}.$$

Vježba 092

Nađi vrijednost izraza $\dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^{10}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{1}{x^{10}}}$, $x>0$.

Rezultat: x^{11}.

Zadatak 093 (Nina, gimnazija)

Koliki je deveti član aritmetičkog niza ako je zbroj trostrukog trećeg i šesterostrukog dvanaestog jednak 81?

Rješenje 093

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Formula za opći (n – ti) član aritmetičkog niza glasi:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

$$3 \cdot a_3 + 6 \cdot a_{12} = 81 \Rightarrow 3 \cdot a_3 + 6 \cdot a_{12} = 81 \ /:3 \Rightarrow a_3 + 2 \cdot a_{12} = 27 \Rightarrow a_1 + 2 \cdot d + 2 \cdot (a_1 + 11 \cdot d) = 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + 2 \cdot d + 2 \cdot a_1 + 22 \cdot d = 27 \Rightarrow 3 \cdot a_1 + 24 \cdot d = 27 \ /:3 \Rightarrow a_1 + 8 \cdot d = 9 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1 + 8 \cdot d = 9 \\ a_9 = a_1 + 8 \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow a_9 = 9.$$

Vježba 093

Koliki je deveti član aritmetičkog niza ako je zbroj šesterostrukog trećeg i dvanaesterostrukog dvanaestog jednak 162?

Rezultat: 9.

Zadatak 094 (Nina, gimnazija)

Prvi član aritmetičkog niza je 2. Zbroj prvih m njegovih članova odnosi se prema zbroju prvih n članova kao $\frac{m \cdot (m+1)}{n \cdot (n+1)}$. Koji je to niz?

Rješenje 094

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Formula za opći (n – ti) član aritmetičkog niza glasi:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Formule za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza glase:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_n] \quad , \quad s_n = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d].$$

$$\frac{s_m}{s_n} = \frac{m \cdot (m+1)}{n \cdot (n+1)} \Rightarrow \frac{\frac{m}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (m-1) \cdot d]}{\frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]} = \frac{m \cdot (m+1)}{n \cdot (n+1)} \Rightarrow \frac{\frac{m}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (m-1) \cdot d]}{\frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]} = \frac{m \cdot (m+1)}{n \cdot (n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m\cdot\left[2\cdot a_1+(m-1)\cdot d\right]}{n\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right]}=\frac{m\cdot(m+1)}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow \left[a_1=2\right] \Rightarrow \frac{m\cdot\left[2\cdot 2+(m-1)\cdot d\right]}{n\cdot\left[2\cdot 2+(n-1)\cdot d\right]}=\frac{m\cdot(m+1)}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m\cdot\left[4+(m-1)\cdot d\right]}{n\cdot\left[4+(n-1)\cdot d\right]}=\frac{m\cdot(m+1)}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow \frac{m\cdot\left[4+(m-1)\cdot d\right]}{n\cdot\left[4+(n-1)\cdot d\right]}=\frac{m\cdot(m+1)}{n\cdot(n+1)} \;/\cdot\frac{n}{m} \Rightarrow \frac{4+(m-1)\cdot d}{4+(n-1)\cdot d}=\frac{m+1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4+(m-1)\cdot d)\cdot(n+1)=(m+1)\cdot(4+(n-1)\cdot d) \Rightarrow (4+m\cdot d-d)\cdot(n+1)=(m+1)\cdot(4+n\cdot d-d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n+4+m\cdot n\cdot d+m\cdot d-n\cdot d-d=4\cdot m+4+m\cdot n\cdot d+n\cdot d-m\cdot d-d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n+4+m\cdot n\cdot d+m\cdot d-n\cdot d-d=4\cdot m+4+m\cdot n\cdot d+n\cdot d-m\cdot d-d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n+m\cdot d-n\cdot d=4\cdot m+n\cdot d-m\cdot d \Rightarrow m\cdot d-n\cdot d-n\cdot d+m\cdot d=4\cdot m-4\cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot m\cdot d-2\cdot n\cdot d=4\cdot m-4\cdot n \Rightarrow 2\cdot d\cdot(m-n)=4\cdot(m-n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot d\cdot(m-n)=4\cdot(m-n) \;/\cdot\frac{1}{2\cdot(m-n)} \Rightarrow d=2.$$

Budući da je prvi član $a_1 = 2$ i razlika d = 2, aritmetički niz glasi:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

Vježba 094

Prvi član aritmetičkog niza je 2. Zbroj prvih 5 njegovih članova odnosi se prema zbroju prvih 8 članova kao $\frac{30}{72}$. Koji je to niz?

Rezultat: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...

Zadatak 095 (Nina, gimnazija)

Nađi zbroj prvih m + n članova aritmetičkog niza kojemu je m – ti član jednak n, a n – ti član iznosi m.

Rješenje 095

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2-a_1=d\;,\;a_3-a_2=d\;,\;a_4-a_3=d\;,\;a_5-a_4=d\;,\;a_6-a_5=d\;,\;\ldots\;,\;a_n-a_{n-1}=d\;\ldots$$

$$a_n-a_{n-1}=d\;,\;n\ge 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Formula za opći (n – ti) član aritmetičkog niza glasi:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Formule za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza glase:

$$s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right]\quad,\quad s_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right].$$

$$\left.\begin{array}{l}a_m=n\\a_n=m\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1+(m-1)\cdot d=n\\a_1+(n-1)\cdot d=m\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\\text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1+(m-1)\cdot d=n\\a_1+(n-1)\cdot d=m\;/\cdot(-1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}a_1+(m-1)\cdot d=n\\-a_1-(n-1)\cdot d=-m\end{array}\right\} \Rightarrow (m-1)\cdot d-(n-1)\cdot d=n-m \Rightarrow (m-1-n+1)\cdot d=n-m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-1-n+1)\cdot d=n-m \Rightarrow (m-n)\cdot d=n-m \;/\cdot\frac{1}{m-n} \Rightarrow d=\frac{n-m}{m-n} \Rightarrow d=\frac{-(m-n)}{m-n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{-(m-n)}{m-n} \Rightarrow d = -1.$$

Računamo prvi član niza:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + (m-1) \cdot d = n \\ d = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + (m-1) \cdot (-1) = n \Rightarrow a_1 - m + 1 = n \Rightarrow a_1 = m + n - 1.$$

Zbroj prvih m + n članova aritmetičkog niza iznosi:

$$s_{m+n} = \frac{m+n}{2} \cdot [2 \cdot (m+n-1) + (m+n-1) \cdot (-1)] \Rightarrow s_{m+n} = \frac{m+n}{2} \cdot [2 \cdot m + 2 \cdot n - 2 - m - n + 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{m+n} = \frac{m+n}{2} \cdot [m+n-1].$$

Vježba 095

Nađi zbroj prvih 14 članova aritmetičkog niza kojemu je šesti član jednak 8, a osmi član iznosi 6.

Rezultat: 91.

Zadatak 096 (Josip, gimnazija)

U geometrijskom nizu svaki je član (osim prvog) geometrijska sredina članova između kojih leži. Dokaži!

Rješenje 096

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \Rightarrow q = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G = \sqrt{x \cdot y}.$$

Neka su a, b i c tri uzastopna člana geometrijskog niza. Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a, b, c \\ \text{geometrijski} \\ \text{niz} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot c \; / \sqrt{\ } \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}.$$

Vježba 096

U aritmetičkom nizu svaki je član (osim prvog) aritmetička sredina članova između kojih leži. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 097 (Josip, gimnazija)

U geometrijskom nizu bilo koji član a_n geometrijska je sredina članova a_{n-r} i a_{n+r}. Dokaži!

Rješenje 097

Ponovimo!

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad , \quad \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \quad , \quad \sqrt{x^2} = x \; , \; x \geq 0.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;,\; n \geq 1.$$

Neka su x i y pozitivni brojevi. Tada je njihova geometrijska sredina definirana izrazom

$$G = \sqrt{x \cdot y}.$$

$$\sqrt{a_{n-r} \cdot a_{n+r}} = \sqrt{a_1 \cdot q^{n-r-1} \cdot a_1 \cdot q^{n+r-1}} = \sqrt{a_1^2 \cdot q^{n-r-1+n+r-1}} = \sqrt{a_1^2 \cdot q^{n-r-1+n+r-1}} =$$

$$= \sqrt{a_1^2 \cdot q^{2 \cdot n-2}} = \sqrt{a_1^2 \cdot q^{2 \cdot (n-1)}} = \sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{q^{2 \cdot (n-1)}} = a_1 \cdot q^{n-1} = a_n.$$

Vježba 097

U aritmetičkom nizu bilo koji član a_n aritmetička je sredina članova a_{n-r} i a_{n+r}. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 098 (Neno, gimnazija)

Nađi geometrijski niz za koji vrijedi da je svaki njegov član dva puta veći od zbroja članova koji slijede iza njega.

Rješenje 098

Ponovimo!

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad , \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad , \quad x \cdot y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ili } y = 0 \text{ ili } x = y = 0.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q ≠ 0, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.
Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom q ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \;,\; n \geq 1.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \;,\; q \neq 1.$$

Geometrijski red

$$a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \ldots + a_1 \cdot q^n + \ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q| < 1.$$

Njegova je suma jednaka

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Neka je s_n zbroj prvih n članova geometrijskog niza, a s zbroj cijelog niza (geometrijskog reda). Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$a_n = 2 \cdot (s - s_n) \;\Rightarrow\; a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{a_1}{1-q} - a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \right) \;\Rightarrow\; a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot a_1 \cdot \left(\frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} \right) \Big/ \cdot \frac{1}{a_1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} \right) \;\Rightarrow\; q^{n-1} = 2 \cdot \frac{1-1+q^n}{1-q} \;\Rightarrow\; q^{n-1} = 2 \cdot \frac{1-1+q^n}{1-q} \;\Rightarrow\; q^{n-1} = 2 \cdot \frac{q^n}{1-q} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^{n-1}\cdot(1-q)=2\cdot q^{n} \Rightarrow q^{n-1}-q^{n}=2\cdot q^{n} \Rightarrow q^{n-1}-q^{n}-2\cdot q^{n}=0 \Rightarrow q^{n-1}-3\cdot q^{n}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^{n}\cdot q^{-1}-3\cdot q^{n}=0 \Rightarrow q^{n}\cdot\left(q^{-1}-3\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} q^{n}=0 \\ q^{-1}-3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q=0 \text{ nema smisla} \\ \frac{1}{q}-3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q}-3=0 \Rightarrow \frac{1}{q}=3 \Rightarrow \frac{1}{q}=\frac{3}{1} \Rightarrow q=\frac{1}{3}.$$

Traženi geometrijski niz glasi:

$$a_1, \frac{a_1}{3}, \frac{a_1}{9}, \frac{a_1}{27}, \frac{a_1}{81}, \frac{a_1}{243}, \ldots$$

Vježba 098

Nađi geometrijski niz za koji vrijedi da je svaki njegov član jednak zbroju članova koji slijede iza njega.

Rezultat: $q=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1, \frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{4}, \frac{a_1}{8}, \frac{a_1}{16}, \frac{a_1}{32}, \ldots$

Zadatak 099 (Neno, gimnazija)

Nađi geometrijski niz čiji je zbroj jednak n – terostrukom prvom članu. (n > 0)

Rješenje 099

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q ≠ 0, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Geometrijski red

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^{2}+a_1\cdot q^{3}+\ldots+a_1\cdot q^{n}+\ldots$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q|<1.$$

Njegova je suma jednaka

$$s=\frac{a_1}{1-q}.$$

Neka je s zbroj cijelog niza (geometrijskog reda). Iz uvjeta zadatka dobije se:

$$n\cdot a_1=s \Rightarrow n\cdot a_1=\frac{a_1}{1-q} \Rightarrow n\cdot a_1=\frac{a_1}{1-q} \;/\cdot\frac{1}{a_1} \Rightarrow n=\frac{1}{1-q} \Rightarrow n=\frac{1}{1-q} \;/\cdot\frac{1-q}{n} \Rightarrow 1-q=\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -q=\frac{1}{n}-1 \;/\cdot(-1) \Rightarrow q=1-\frac{1}{n} \Rightarrow q=\frac{n-1}{n}.$$

Svaki geometrijski niz koji ima kvocijent

$$q=\frac{n-1}{n}$$

ima traženo svojstvo.

Vježba 099

Nađi geometrijski niz čiji je zbroj jednak dvostrukom prvom članu. (n > 0)

Rezultat: $q=\frac{1}{2} \Rightarrow a_1, \frac{a_1}{2}, \frac{a_1}{4}, \frac{a_1}{8}, \frac{a_1}{16}, \frac{a_1}{32}, \ldots$

Zadatak 100 (Vix, gimnazija)

U nizu (a_n) vrijedi $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, tj. svaki član niza je jednak zbroju dvaju prethodnih članova. Peti član je jednak 17. Zbroj početnih šest članova niza je jednak:

$$A.\ 51 \qquad B.\ 68 \qquad C.\ 85 \qquad D.\ 102$$

Rješenje 100

Ponovimo!

Rekurzivna formula ili rekurzija je formula kojom se opći član niza izražava pomoću prethodnih članova. Uz rekurziju treba zadati i vrijednosti prvih nekoliko članova niza – onoliko koliko se prethodnih članova javlja u rekurziji.

Budući da se u rekurziji

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

javljaju dva prethodna člana, treba zadati i vrijednosti prva dva člana. Označimo prva dva člana niza:

$$a_1 = a \quad , \quad a_2 = b.$$

Dalje slijedi:

$a_3 = a_1 + a_2 = a + b$

$a_4 = a_2 + a_3 = b + (a + b) = b + a + b = a + 2 \cdot b$

$a_5 = a_3 + a_4 = (a + b) + (a + 2 \cdot b) = a + b + a + 2 \cdot b = 2 \cdot a + 3 \cdot b$

$a_6 = a_4 + a_5 = (a + 2 \cdot b) + (2 \cdot a + 3 \cdot b) = a + 2 \cdot b + 2 \cdot a + 3 \cdot b = 3 \cdot a + 5 \cdot b.$

Iz uvjeta zadatka je $a_5 = 17$ pa zbroj prvih šest članova niza iznosi:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \Rightarrow s = a + b + (a + b) + (a + 2 \cdot b) + (2 \cdot a + 3 \cdot b) + (3 \cdot a + 5 \cdot b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = a + b + a + b + a + 2 \cdot b + 2 \cdot a + 3 \cdot b + 3 \cdot a + 5 \cdot b \Rightarrow s = 8 \cdot a + 12 \cdot b \Rightarrow s = 4 \cdot (2 \cdot a + 3 \cdot b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_5 = 2 \cdot a + 3 \cdot b\right] \Rightarrow s = 4 \cdot a_5 \Rightarrow s = 4 \cdot 17 \Rightarrow s = 68.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 100

U nizu (a_n) vrijedi $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, tj. svaki član niza je jednak zbroju dvaju prethodnih članova. Peti član je jednak 10. Zbroj početnih šest članova niza je jednak:

$$A.\ 20 \qquad B.\ 50 \qquad C.\ 40 \qquad D.\ 10$$

Rezultat: C.