Zadatak 061 (Mirela, maturantica)

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak je $4 \cdot n^2$. Izračunaj član a_{10}.

Rješenje 061

Ponovimo!

Ako je s_n zbroj prvih n članova niza za n-ti član vrijedi:

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Budući da je zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak $4 \cdot n^2$, za a_{10} vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} s_n &= 4 \cdot n^2 \\ a_n &= s_n - s_{n-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_{10} = s_{10} - s_9 \Rightarrow a_{10} = 4 \cdot 10^2 - 4 \cdot 9^2 \Rightarrow a_{10} = 4 \cdot \left(10^2 - 9^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{10} = 4 \cdot (10-9) \cdot (10+9) \Rightarrow a_{10} = 4 \cdot 1 \cdot 19 \Rightarrow a_{10} = 76.$$

Vježba 061

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak je $3 \cdot n^2$. Izračunaj član a_{10}.

Rezultat: 57.

Zadatak 062 (Dado, student)

Pomoću D 'Alembertova kriterija ispitaj konvergenciju reda $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}} + \ldots + \frac{2 \cdot n - 1}{\left(\sqrt{2}\right)^n} + \ldots .$

Rješenje 062

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \lim_{n \to \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \to \infty} a_n \, , \; c \text{ je konstanta} \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Red brojeva

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazivamo konvergentnim, ako njegova parcijalna suma

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

ima limes kada $n \to \infty$ (čitaj: en teži u beskonačnost). Veličinu

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

nazivamo sumom reda. Ako limesa

$$\lim_{n \to \infty} s_n$$

nema, onda red nazivamo divergentnim.

D 'Alembertov kriterij

Neka je $a_n > 0$ (počevši od nekog $n = n_0$) i neka postoji limes

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Tada zadani red:

- konvergira kada je $q < 1$,
- divergira kada je $q > 1$,
- kriterij ne daje odluku (red može konvergirati ili divergirati) kada je $q = 1$.

Ispitajmo konvegenciju reda:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\cdot\sqrt{2}}+\ \dots\ +\frac{2\cdot n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}+\ \dots .$$

Budući da je opći član

$$a_n=\frac{2\cdot n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}},$$

slijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot(n+1)-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}}{\frac{2\cdot n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot n+2-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}}{\frac{2\cdot n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}}{\frac{2\cdot n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot n+1)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{n}}{(2\cdot n-1)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot n+1)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{n}}{(2\cdot n-1)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{n}\cdot\sqrt{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n+1}{(2\cdot n-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n+1}{2\cdot n-1}=\left[\begin{array}{l}\text{brojnik i nazivnik}\\ \text{dijelimo sa n}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2\cdot n}{n}-\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2+0}{2-0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1\ \Rightarrow\ \text{red konvergira.}$$

Vježba 062

Pomoću D 'Alembertova kriterija ispitaj konvergenciju reda $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^{2}}+\frac{5}{2^{3}}+\ \dots\ +\frac{2\cdot n-1}{2^{n}}+\ \dots .$

Rezultat: Red je konvergentan.

Zadatak 063 (Dado, student)

Pomoću Cauchyjeva kriterija ispitaj konvergenciju reda $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^{2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{3}+\ \dots\ +\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)^{n}+\ \dots .$

Rješenje 063

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^{n}}=a\quad,\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Red brojeva

$$a_1+a_2+a_3+\ \dots\ +a_n+\ \dots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

nazivamo konvergentnim, ako njegova parcijalna suma

$$s_n=a_1+a_2+a_3+\ \dots\ +a_n$$

ima limes kada $n\to\infty$ (čitaj: en teži u beskonačnost). Veličinu

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n$$

nazivamo sumom reda. Ako limesa

$$\lim_{n\to\infty}s_n$$

nema, onda red nazivamo divergentnim.

Cauchyjev kriterij

Neka je $a_n\geq 0$ (počevši od nekog $n = n_0$) i neka postoji limes

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

Tada zadani red:

- konvergira kada je q < 1,
- divergira kada je q > 1,
- kriterij ne daje odluku (red može konvergirati ili divergirati) kada je q = 1.

Ispitajmo konvegenciju reda:

$$\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^{2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{3}+\ldots+\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)^{n}+\ldots.$$

Budući da je opći član

$$a_n=\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)^{n},$$

slijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2\cdot n-1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2\cdot n-1}=\left[\begin{array}{l}\text{brojnik i nazivnik}\\ \text{dijelimo sa n}\end{array}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{2\cdot n}{n}-\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow \text{ red konvergira.}$$

Vježba 063

Pomoću Cauchyjeva kriterija ispitaj konvergenciju reda $\frac{2}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\left(\frac{4}{6}\right)^{3}+\ldots+\left(\frac{n+1}{2\cdot n}\right)^{n}+\ldots.$

Rezultat: Red je konvergentan.

Zadatak 064 (Šime, informatika)

Koliki je umnožak prvih osam članova geometrijskog niza ako je umnožak četvrtog i petog člana tog niza jednak m?

Rješenje 064

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad (a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i količnikom $q \neq 0$ ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ ,\ n\geq 1.$$

Budući da je umnožak četvrtog i petog člana geometrijskog niza jednak m, slijedi:

$$a_4\cdot a_5=m\Rightarrow a_1\cdot q^{3}\cdot a_1\cdot q^{4}=m\Rightarrow a_1^{2}\cdot q^{7}=m.$$

Sada računamo umnožak prvih osam članova geometrijsko niza:

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot a_7\cdot a_8=a_1\cdot\left(a_1\cdot q\right)\cdot\left(a_1\cdot q^{2}\right)\cdot\left(a_1\cdot q^{3}\right)\cdot\left(a_1\cdot q^{4}\right)\cdot\left(a_1\cdot q^{5}\right)\cdot\left(a_1\cdot q^{6}\right)\cdot\left(a_1\cdot q^{7}\right)=$$

$$=a_1\cdot a_1\cdot q\cdot a_1\cdot q^{2}\cdot a_1\cdot q^{3}\cdot a_1\cdot q^{4}\cdot a_1\cdot q^{5}\cdot a_1\cdot q^{6}\cdot a_1\cdot q^{7}=a_1^{8}\cdot q^{28}=\left(a_1^{2}\cdot q^{7}\right)^{4}=m^{4}.$$

Vježba 064

Koliki je umnožak prvih osam članova geometrijskog niza ako je umnožak četvrtog i petog člana tog niza jednak 2?

Rezultat: 16.

Zadatak 065 (Šime, informatika)

Između $\frac{3}{2}$ i $\frac{15}{4}$ umetnite pet brojeva koji će sa dva zadana tvoriti sedam uzastopnih članova rastućeg aritmetičkog niza.

Rješenje 065

Ponovimo!

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza počevši od drugog jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Između dva zadana broja a i b umetnuti (interpolirati) aritmetički niz od r članova znači odrediti r brojeva koji zajedno s brojevima a i b čine aritmetički niz, kojem je a prvi, a b posljednji član. Diferencija (razlika) d tako dobivenog aritmetičkog niza od r + 2 člana jednaka je

$$d = \frac{b-a}{r+1}.$$

Računamo diferenciju d:

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{3}{2}\ ,\ b = \frac{15}{4} \\ r = 5 \\ d = \frac{b-a}{r+1} \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{\frac{15}{4} - \frac{3}{2}}{5+1} \Rightarrow d = \frac{\frac{15-6}{4}}{6} \Rightarrow d = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{6}{1}} \Rightarrow d = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow d = \frac{3}{8}.$$

Članovi niza glase:

- $a_1 = \frac{3}{2}$
- $a_2 = a_1 + d = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = \frac{12+3}{8} = \frac{15}{8}$
- $a_3 = a_2 + d = \frac{15}{8} + \frac{3}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$
- $a_4 = a_3 + d = \frac{9}{4} + \frac{3}{8} = \frac{18+3}{8} = \frac{21}{8}$
- $a_5 = a_4 + d = \frac{21}{8} + \frac{3}{8} = \frac{24}{8} = 3$
- $a_6 = a_5 + d = 3 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$
- $a_7 = a_6 + d = \frac{27}{8} + \frac{3}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}.$

Vježba 065

Između 2 i 20 umetnite pet brojeva koji će sa dva zadana tvoriti sedam uzastopnih članova rastućeg aritmetičkog niza.

Rezultat: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

Zadatak 066 (Vlado, gimnazija)

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 11?

Rješenje 066

Ponovimo!

Niz je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2}\cdot\left[a_1 + a_n\right].$$

U zadatku je riječ o aritmetičkom nizu. Prvi član je

$$a_1 = 11.$$

Razlika (diferencija) iznosi:

$$d = 11.$$

Najveći prirodni broj koji je djeljiv s 11, a manji je od 1000 iznosi:

$$a_n = 990.$$

Računamo koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 11:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 11\ ,\ d = 11\ ,\ a_n = 990 \\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow 990 = 11 + (n-1)\cdot 11 \Rightarrow 990 = 11 + 11\cdot n - 11 \Rightarrow 11\cdot n = 990\ /:11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 90.$$

Zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 11 je:

$$\left.\begin{array}{l} n = 90\ ,\ a_1 = 11\ ,\ a_n = 990 \\ s_n = \frac{n}{2}\cdot\left[a_1 + a_n\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n = 90\ ,\ a_1 = 11\ ,\ a_{90} = 990 \\ s_{90} = \frac{90}{2}\cdot\left[a_1 + a_{90}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{90} = \frac{90}{2}\cdot[11 + 990] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{90} = 45\cdot 1001 \Rightarrow s_{90} = 45045.$$

Vježba 066

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 10?

Rezultat: 49500.

Zadatak 067 (Tea, TUPŠ)

$$\text{Izračunajte}: \frac{a+b}{4} + \frac{a+b}{28} + \frac{a+b}{70} + \ \ldots\ + \frac{a+b}{12208}.$$

Rješenje 067

$$\frac{a+b}{4} + \frac{a+b}{28} + \frac{a+b}{70} + \ \ldots\ + \frac{a+b}{12208} = (a+b)\cdot\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \ \ldots\ + \frac{1}{12208}\right].$$

Uočimo da se nazivnici mogu rastaviti na faktore:

$$(a+b)\cdot\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \ \ldots\ + \frac{1}{12208}\right] = (a+b)\cdot\left[\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ \ldots\ + \frac{1}{109\cdot 112}\right].$$

Razlomci se mogu prikazati na sljedeći način:

$$\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right), \qquad \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right),$$

$$\frac{1}{7\cdot 10} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right),\ \ldots\ldots\ldots,\ \frac{1}{109\cdot 112} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{109} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{112} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{109} - \frac{1}{112}\right).$$

U ovom rastavu poslužili smo se metodom neodređenih koeficijenata:

$$\frac{1}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)} = \frac{A}{3\cdot n+1} + \frac{B}{3\cdot n+4},$$ A i B su nepoznati koeficijenti koje moramo izračunati.

$$\frac{1}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)} = \frac{A}{3\cdot n+1} + \frac{B}{3\cdot n+4}\ /\cdot(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4) \Rightarrow 1 = A\cdot(3\cdot n+4) + B\cdot(3\cdot n+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=3\cdot A\cdot n+4\cdot A+3\cdot B\cdot n+B \Rightarrow 1=(3\cdot A+3\cdot B)\cdot n+(4\cdot A+B) \Rightarrow \begin{cases} 2A+2B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\cdot A+3\cdot B=0 \;/:3 \\ 4\cdot A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \;/\cdot(-1) \\ 4\cdot A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A-B=0 \\ 4\cdot A+B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B=-\frac{1}{3}.$$

Zato je:

$$\frac{1}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=\frac{\frac{1}{3}}{3\cdot n+1}-\frac{\frac{1}{3}}{3\cdot n+4}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3\cdot n+1}-\frac{1}{3\cdot n+4}\right).$$

Konačno se dobije:

$$\frac{a+b}{4}+\frac{a+b}{28}+\frac{a+b}{70}+\ ...\ +\frac{a+b}{12208}=(a+b)\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\ ...\ +\frac{1}{12208}\right]=$$

$$=(a+b)\cdot\left[\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ ...\ +\frac{1}{109\cdot 112}\right]=$$

$$=(a+b)\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ ...\ +\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{109}-\frac{1}{112}\right)\right]=\left[\text{izlučimo } \frac{1}{3}\right]=$$

$$=(a+b)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ ...\ +\frac{1}{109}-\frac{1}{112}\right]=\left[\text{poništimo suprotne članove}\right]=$$

$$=\frac{a+b}{3}\cdot\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ ...\ +\frac{1}{109}-\frac{1}{112}\right]=\frac{a+b}{3}\cdot\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{112}\right]=\frac{a+b}{3}\cdot\frac{112-1}{112}=\frac{a+b}{3}\cdot\frac{111}{112}=\frac{37}{112}\cdot(a+b).$$

Vježba 067

Izračunajte: $\frac{x-y}{4}+\frac{x-y}{28}+\frac{x-y}{70}+\ ...\ +\frac{x-y}{12208}.$

Rezultat: $\frac{37}{112}\cdot(x-y).$

Zadatak 068 (Ivana, studentica)

Pomoću D'Alembertova kriterija ispitaj konvergenciju reda

$$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ ...\ +\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ ...\ \cdot(3\cdot n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ ...\ \cdot(4\cdot n-3)}+\ ....$$

Rješenje 068

Ponovimo!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

D'Alembertov kriterij

Neka je $a_n > 0$ (počevši od nekog $n = n_0$) i neka postoji limes

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

Tada red brojeva

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\ ...\ +a_n+\ ...$$

konvergira kada je q < 1, a divergira kada je q > 1.
Ako je q = 1, kriterij ne daje odluku (red može konvergirati ili divergirati).
Opći član reda glasi:

$$a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ ... \ \cdot (3 \cdot n - 1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ ... \ \cdot (4 \cdot n - 3)},$$

a njegov sljedbenik iznosi:

$$a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ ... \ \cdot (3 \cdot n - 1) \cdot (3 \cdot (n+1) - 1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ ... \ \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot (n+1) - 3)} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ ... \ \cdot (3 \cdot n - 1) \cdot (3 \cdot n + 3 - 1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ ... \ \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot n + 4 - 3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ ... \ \cdot (3 \cdot n - 1) \cdot (3 \cdot n + 2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ ... \ \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot n + 1)}.$$

Računamo limes:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ ... \ \cdot (3 \cdot n - 1) \cdot (3 \cdot n + 2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ ... \ \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot n + 1)}}{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ ... \ \cdot (3 \cdot n - 1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ ... \ \cdot (4 \cdot n - 3)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ ... \ \cdot (3 \cdot n - 1) \cdot (3 \cdot n + 2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ ... \ \cdot (4 \cdot n - 3) \cdot (4 \cdot n + 1)}}{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ ... \ \cdot (3 \cdot n - 1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ ... \ \cdot (4 \cdot n - 3)}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot n + 2}{4 \cdot n + 1} = \left[\begin{matrix} \text{brojnik i nazivnik} \\ \text{dijelimo brojem n} \end{matrix} \right] = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3 \cdot n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{4 \cdot n}{n} + \frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3 \cdot n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{4 \cdot n}{n} + \frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{4 + \frac{1}{n}} = \frac{3+0}{4+0} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \text{ red konvergira}.$$

Vježba 068

Pomoću D'Alembertova kriterija ispitaj konvergenciju reda

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ ... \ + \frac{2 \cdot n - 1}{2^n} + \ ....$$

Rezultat: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ red konvergira.

Zadatak 069 (Ivana, studentica)

Pomoću Cauchyjeva kriterija ispitaj konvergenciju reda

$$\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \ ... \ + \left(\frac{n+1}{2 \cdot n - 1}\right)^n + \ ....$$

Rješenje 069

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^n} = a \ , \ a \ge 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Cauchyjev kriterij
Neka je $a_n \ge 0$ (počevši od nekog $n = n_0$) i neka postoji limes

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Tada red brojeva

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ ... \ + a_n + \ ...$$

konvergira kada je q < 1, a divergira kada je q > 1.

Ako je q = 1, kriterij ne daje odluku (red može konvergirati ili divergirati).
Budući da opći član reda glasi:

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2 \cdot n - 1} \right)^n ,$$

limes iznosi:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2 \cdot n - 1} \right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2 \cdot n - 1} = \left[\begin{array}{l} \text{brojnik i nazivnik} \\ \text{dijelimo brojem n} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2 \cdot n}{n} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2 \cdot n}{n} - \frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ red konvergira.}$$

Vježba 069

Pomoću Cauchyjeva kriterija ispitaj konvergenciju reda

$$1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \left(\frac{4}{7} \right)^4 + \ldots + \left(\frac{n}{2 \cdot n - 1} \right)^n + \ldots .$$

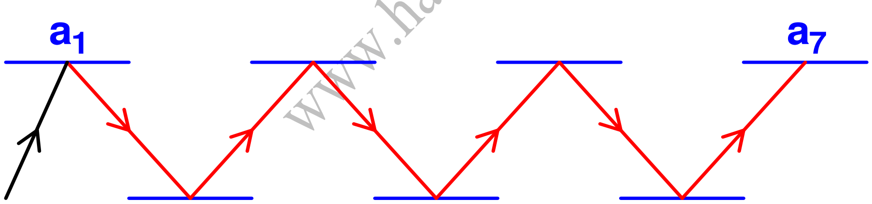
Rezultat: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ red konvergira.

Zadatak 070 (4A, TUPŠ)

Metalno zrcalo apsorbira kod svakog odbijanja 10% svjetlosti. Koliki je intenzitet svjetlosti jedne svjetlosne zrake koja se šest puta odbila od metalnih zrcala ako je početni intenzitet 220 luksa?

Rješenje 070

Ponovimo!
Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 0$ ima oblik



$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Budući da metalno zrcalo apsorbira (upija) kod svakog odbijanja 10% svjetlosti, od zrcala će se odbiti 90% svjetlosti. Početni intenzitet je 220 luksa.
Poslije prvog odbijanja intenzitet je:

$$220 \cdot 0.9 = 198 \text{ luksa.}$$

Poslije drugog odbijanja intenzitet je:

$$198 \cdot 0.9 \approx 178 \text{ luksa.}$$

Poslije trećeg odbijanja intenzitet je:

$$178 \cdot 0.9 \approx 160 \text{ luksa itd.}$$

Dobivamo geometrijski niz 220, 198, 178, … ($a_1 = 220$, $q = 0.9$).
Tada je sedmi član niza taj koji nam kaže koliki je intenzitet svjetlosti jedne svjetlosne zrake koja se šest puta odbila od metalnih zrcala:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 220 \ , \ q = 0.9 \\ a_7 = a_1 \cdot q^6 \end{array} \right\} \Rightarrow a_7 = 220 \cdot 0.9^6 = 116.91702 \ luksa \approx 117 \ luksa.$$

Vježba 070

Metalno zrcalo apsorbira kod svakog odbijanja 10% svjetlosti. Koliki je intenzitet svjetlosti jedne svjetlosne zrake koja se šest puta odbila od metalnih zrcala ako je početni intenzitet 110 luksa?

Rezultat: 58 luksa.

Zadatak 071 (4A, TUPŠ)

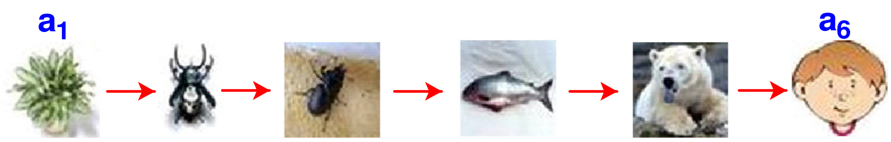
Biljku je pojeo insekt, a insekta kukac. Losos je pojeo kukca, medvjed lososa, a medvjeda ti. Ako je samo 20% energije iskorišteno iz jedne prehrambene karike u drugu, koliko kalorija mora osigurati biljka da bi tebi osigurali 2000 kalorija iz medvjeđeg mesa?

Rješenje 071

Ponovimo!

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 0$ ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \geq 1.$$



Iz uvjeta zadatka zaključujemo da si ti šesti član u prehrambenom lancu, pri čemu se u svakoj prehrambenoj karici iskorišćuje 20 % energije. Dakle, riječ je o geometrijskom nizu kod kojega se traži prvi član:

$$\left.\begin{array}{l} a_6 = 2000, \; q = 0.2 \\ a_6 = a_1 \cdot q^5 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = \frac{a_6}{q^5} \Rightarrow a_1 = \frac{2000}{0.2^5} = 6250000.$$

Vježba 071

Biljku je pojeo insekt, a insekta kukac. Losos je pojeo kukca, medvjed lososa, a medvjeda ti. Ako je samo 20% energije iskorišteno iz jedne prehrambene karike u drugu, koliko kalorija mora osigurati biljka da bi tebi osigurali 1000 kalorija iz medvjeđeg mesa?

Rezultat: 3125000.

Zadatak 072 (4A, TUPŠ)

Frekvencije tonova na glasoviru mjerimo u Hz i oni tvore geometrijski niz. Ton A ima frekvenciju od 400 Hz, a ton A', koji je 12 nota viši, od 800 Hz. Odredi kvocijent geometrijskog niza.

Rješenje 072

Ponovimo!

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 0$ ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Budući da je ton A prvi član, a ton A' dvanaesti član geometrijskog niza, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 400, \; a_{12} = 800 \\ a_{12} = a_1 \cdot q^{11} \end{array}\right\} \Rightarrow q^{11} = \frac{a_{12}}{a_1} \Rightarrow q^{11} = \frac{a_{12}}{a_1} \; / \sqrt[11]{\;} \Rightarrow q = \sqrt[11]{\frac{a_{12}}{a_1}} \Rightarrow q = \sqrt[11]{\frac{800}{400}} \Rightarrow q = \sqrt[11]{2}.$$

Vježba 072

Frekvencije tonova na glasoviru mjerimo u Hz i oni tvore geometrijski niz. Ton A ima frekvenciju od 400 Hz, a ton A', koji je 12 nota viši, od 800 Hz. Koliko Hz ima ton C koji je 3 note viši od tona A?

Rezultat: $400 \cdot \sqrt[11]{4}.$

Zadatak 073 (Ivan, tehnička škola)

Tri broja čine geometrijski niz. Njihov je zbroj 52, a njihov produkt 1728. Koji su to brojevi?

Rješenje 073

Ponovimo!

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član počevši od drugog jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \ , \ n \geq 1.$$

Budući da su zadana tri uzastopna člana geometrijskog niza, srednji član označit ćemo slovom x. Onda je to niz:

$$\frac{x}{q}, \ x, \ x \cdot q.$$

Dalje je:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 52 \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 1728 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 52 \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot x \cdot q = 1728 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 52 \\ x^3 = 1728 \ / \sqrt[3]{\ } \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 52 \\ x = \sqrt[3]{1728} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x}{q} + x + x \cdot q = 52 \\ x = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12}{q} + 12 + 12 \cdot q = 52 \ / \cdot q \Rightarrow 12 + 12 \cdot q + 12 \cdot q^2 = 52 \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 + 12 \cdot q + 12 \cdot q^2 - 52 \cdot q = 0 \Rightarrow 12 \cdot q^2 - 40 \cdot q + 12 = 0 \ / : 4 \Rightarrow 3 \cdot q^2 - 10 \cdot q + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot q^2 - 10 \cdot q + 3 = 0 \\ a = 3 \ , \ b = -10 \ , \ c = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3 \ , \ b = -10 \ , \ c = 3 \\ q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} \Rightarrow q_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = \frac{10 + 8}{6} \\ q_2 = \frac{10 - 8}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = \frac{18}{6} \\ q_2 = \frac{2}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1 = 3 \\ q_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

Prvi niz glasi: $\left.\begin{array}{l} x = 12 \\ q = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4, 12, 36$, drugi niz glasi: $\left.\begin{array}{l} x = 12 \\ q = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 36, 12, 4.$

Vježba 073

Tri broja čine geometrijski niz. Njihov je zbroj 14, a njihov produkt 64. Koji su to brojevi?

Rezultat: 2, 4, 8 i 8, 4, 2.

Zadatak 074 (Jelena, medicinska škola)

Nađi a_1, q i napiši prvih pet članova geometrijskog niza (a_n) za koji vrijedi: $\left\{\begin{array}{l} a_1 \cdot a_{10} = 3 \\ a_5 + a_6 = 4. \end{array}\right.$

Rješenje 074

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član počevši od drugog jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \ , \ n \geq 1.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 0$ ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_{10} = 3 \\ a_5 + a_6 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_1 \cdot q^9 = 3 \\ a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 \cdot q^4 \cdot a_1 \cdot q^5 = 3 \\ a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(a_1 \cdot q^4\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^5\right) = 3 \\ a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena (supstitucija)} \\ x = a_1 \cdot q^4 \ , \ y = a_1 \cdot q^5 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 3 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 3 \\ y = 4 - x \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot (4 - x) = 3 \Rightarrow 4 \cdot x - x^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4 \cdot x - 3 = 0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = 3 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4+2}{2} \\ x_2 = \dfrac{4-2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{6}{2} \\ x_2 = \dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow [\ y = 4 - x \ ] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 4 - 3 \\ y_2 = 4 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x_1, \ y_1) = (3, \ 1) \\ (x_2, \ y_2) = (1, \ 3) \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se na zamjenu (supstituciju).

1.slučaj

- $$\left.\begin{array}{l} (x, \ y) = (3, \ 1) \\ x = a_1 \cdot q^4 \\ y = a_1 \cdot q^5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 \cdot q^4 = 3 \\ a_1 \cdot q^5 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q^5} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{3}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot q = 1 \ / : 3 \Rightarrow q = \frac{1}{3}.$$

Računamo prvi član a_1:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot q^4 = 3 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 3 \Rightarrow a_1 \cdot \frac{1}{81} = 3 \ / \cdot 81 \Rightarrow a_1 = 243.$$

Geometrijski niz glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 243 \\ q = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 243,\ 81,\ 27,\ 9,\ 3,\ ....$$

2.slučaj

- $$\left.\begin{array}{l} (x,\ y) = (1,\ 3) \\ x = a_1 \cdot q^4 \\ y = a_1 \cdot q^5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 \cdot q^4 = 1 \\ a_1 \cdot q^5 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q^5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 3.$$

Računamo prvi član a_1:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot q^4 = 1 \\ q = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \cdot 3^4 = 1 \Rightarrow a_1 \cdot 81 = 1 \ /: 81 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{81}.$$

Geometrijski niz glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{81} \\ q = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{81},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{3},\ 1,\ ....$$

Vježba 074

Četiri broja čine padajući aritmetički niz, a njihov zbroj je 100. Prvi, treći i četvrti član čine geometrijski niz. Odredite ta 4 broja.

Rezultat:
$$\left.\begin{array}{l} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2 \cdot d) + (a_1 + 3 \cdot d) = 100 \\ \frac{a_1 + 2 \cdot d}{a_1} = \frac{a_1 + 3 \cdot d}{a_1 + 2 \cdot d} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 40 \\ d = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow 40,\ 30,\ 20,\ 10.$$

Zadatak 075 (Mela melica, sramežljiva maturantica ☺)

Stranice trokuta čine geometrijski niz kvocijenta $\frac{4}{3}$. Koliki je najmanji kut trokuta?

Rješenje 075

Ponovimo!

U svakom trokutu nasuprot manjoj stranici leži manji kut:

$$a < b < c \Rightarrow \alpha < \beta < \gamma.$$

Poučak o kosinusima:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \quad , \quad \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad , \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član počevši od drugog jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \ , \ n \geq 1.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 0$ ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$

Uočimo ako je $q > 1$ geometrijski niz je rastući, tj.

$$a_{n+1} > a_n.$$

Budući da je kvocijent $q=\frac{4}{3}$ veći od 1, stranice trokuta čine rastući, uzlazni geometrijski niz pa ih možemo zapisati na ovaj način:

$$a=a\quad,\quad b=a\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\cdot a\quad,\quad c=a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}\cdot a.$$

Kako je a najmanja stranica, kut α je najmanji kut pa se uporabom kosinusovog poučka dobije:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\left(\frac{4}{3}\cdot a\right)^2+\left(\frac{16}{9}\cdot a\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{4}{3}\cdot a\cdot\frac{16}{9}\cdot a}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\frac{16}{9}\cdot a^2+\frac{256}{81}\cdot a^2-a^2}{\frac{128}{27}\cdot a^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a^2\cdot\left(\frac{16}{9}+\frac{256}{81}-1\right)}{\frac{128}{27}\cdot a^2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a^2\cdot\left(\frac{16}{9}+\frac{256}{81}-1\right)}{\frac{128}{27}\cdot a^2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\frac{16}{9}+\frac{256}{81}-1}{\frac{128}{27}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\frac{144+256-81}{81}}{\frac{128}{27}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\frac{319}{81}}{\frac{128}{27}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\frac{319}{3}}{\frac{128}{1}}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{319}{384}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{319}{384}\right)\Rightarrow\alpha=33^0\,49'\,35''.$$

Vježba 075

Stranice trokuta čine geometrijski niz kvocijenta $\frac{4}{3}$. Koliki je najveći kut trokuta?

Rezultat: 98° 15' 5".

Zadatak 076 (Mela melica, sramežljiva maturantica ☺)

Zbroj prva tri člana geometrijskog niza iznosi 91. Ako im dodamo redom 25, 27 i 1 dobijemo tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Odredi sedmi član u geometrijskom nizu.

Rješenje 076

Ponovimo!

Svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) jednak je aritmetičkoj sredini dvaju susjednih članova (prethodnika i sljedbenika):

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\Rightarrow 2\cdot a_n=a_{n-1}+a_{n+1}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član počevši od drugog jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q\neq 0$, tj.

$$a_{n+1}=a_n\cdot q\ ,\ n\geq 1.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom $q\neq 0$ ima oblik

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}\ ,\ n\geq 1.$$

Budući da zbroj prva tri člana geometrijskog niza iznosi 91, dobije se jednadžba:

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2=91\Rightarrow a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)=91.$$

Članovima geometrijskog niza dodamo redom 25, 27 i 1:

$$a_1+25 \quad , \quad a_1\cdot q+27 \quad , \quad a_1\cdot q^2+1.$$

Sada se dobiju tri uzastopna člana aritmetičkog niza pa vrijedi jednadžba:

$$2\cdot\left(a_1\cdot q+27\right)=a_1+25+a_1\cdot q^2+1 \Rightarrow 2\cdot a_1\cdot q+54=a_1+a_1\cdot q^2+26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a_1\cdot q-a_1-a_1\cdot q^2=26-54 \Rightarrow -a_1+2\cdot a_1\cdot q-a_1\cdot q^2=-28 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1-2\cdot a_1\cdot q+a_1\cdot q^2=28 \Rightarrow a_1\cdot\left(1-2\cdot q+q^2\right)=28.$$

Rješavamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)=91 \\ a_1\cdot\left(1-2\cdot q+q^2\right)=28 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{podijelimo}\\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)}{a_1\cdot\left(1-2\cdot q+q^2\right)}=\frac{91}{28} \Rightarrow \frac{\cancel{a_1}\cdot\left(1+q+q^2\right)}{\cancel{a_1}\cdot\left(1-2\cdot q+q^2\right)}=\frac{13}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+q+q^2}{1-2\cdot q+q^2}=\frac{13}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{pomnožimo}\\ \text{"dijagonalno"}\end{array}\right] \Rightarrow 13\cdot\left(1-2\cdot q+q^2\right)=4\cdot\left(1+q+q^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13-26\cdot q+13\cdot q^2=4+4\cdot q+4\cdot q^2 \Rightarrow 13-26\cdot q+13\cdot q^2-4-4\cdot q-4\cdot q^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot q^2-30\cdot q+9=0 \;/:3 \Rightarrow 3\cdot q^2-10\cdot q+3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot q^2-10\cdot q+3=0 \\ a=3 \;,\; b=-10 \;,\; c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3 \;,\; b=-10 \;,\; c=3 \\ q_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{6} \Rightarrow q_{1,2}=\frac{10\pm8}{6} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=\dfrac{10+8}{6} \\ q_2=\dfrac{10-8}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=\dfrac{18}{6} \\ q_2=\dfrac{2}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1=3 \\ q_2=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

Postoje dva geometrijska niza.

- Za kvocijent q = 3 odredimo prvi član a_1:

$$\left.\begin{array}{l} q=3 \\ a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)=91 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1\cdot\left(1+3+3^2\right)=91 \Rightarrow a_1\cdot13=91 \;/:13 \Rightarrow a_1=7.$$

Sedmi član geometrijskog niza glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=7 \;,\; q=3 \\ a_7=a_1\cdot q^6 \end{array}\right\} \Rightarrow a_7=7\cdot3^6 \Rightarrow a_7=5103.$$

- Za kvocijent $q=\frac{1}{3}$ odredimo prvi član a_1:

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{1}{3} \\ a_1\cdot\left(1+q+q^2\right)=91 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)=91 \Rightarrow a_1\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=91 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1\cdot\frac{9+3+1}{9}=91 \Rightarrow a_1\cdot\frac{13}{9}=91 \;/\cdot\frac{9}{13} \Rightarrow a_1=63.$$

Sedmi član geometrijskog niza glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 63 \ , \ q = \dfrac{1}{3} \\ a_7 = a_1 \cdot q^6 \end{array}\right\} \Rightarrow a_7 = 63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \Rightarrow a_7 = 63 \cdot \frac{1}{729} \Rightarrow a_7 = \frac{7}{81}.$$

Vježba 076

Zbroj prva tri člana geometrijskog niza iznosi 26. Ako im dodamo redom 1, 6 i 3 dobijemo tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Koji su to brojevi?

Rezultat: 2, 6, 18.

Zadatak 077 (Tony, gimnazija)

Unutarnji kutovi konveksnog n-terokuta čine aritmetički niz s razlikom 5°. Ako je najveći kut tog n-terokuta 160°, nađi n.

Rješenje 077

Ponovimo!

Zbroj svih unutarnjih kutova n-terokuta jednak je

$$s_n = (n-2) \cdot 180^0.$$

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom (diferencijom) d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_1 = a_n - (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right] \ \text{ili} \ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] \ \text{ili} \ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_n - (n-1) \cdot d\right].$$

Budući da unutarnji kutovi konveksnog n-terokuta čine aritmetički niz s razlikom 5°, a najveći kut tog n-terokuta je 160°, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = 160 \ , \ d = 5 \\ s_n = \dfrac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_n - (n-1) \cdot d\right] \\ s_n = (n-2) \cdot 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s_n = \dfrac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot 160 - (n-1) \cdot 5\right] \\ s_n = (n-2) \cdot 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot 160 - (n-1) \cdot 5\right] = (n-2) \cdot 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} \cdot [320 - 5 \cdot n + 5] = (n-2) \cdot 180 \Rightarrow \frac{n}{2} \cdot [325 - 5 \cdot n] = (n-2) \cdot 180 \ / \cdot 2 \Rightarrow n \cdot [325 - 5 \cdot n] = (n-2) \cdot 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 325 \cdot n - 5 \cdot n^2 = 360 \cdot n - 720 \Rightarrow 325 \cdot n - 5 \cdot n^2 - 360 \cdot n + 720 = 0 \Rightarrow -5 \cdot n^2 - 35 \cdot n + 720 = 0 \ / : (-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 7 \cdot n - 144 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n^2 + 7 \cdot n - 144 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 7 \ , \ c = -144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = 7 \ , \ c = -144 \\ n_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot (-144)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 576}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-7 \pm 25}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{-7 + 25}{2} \\ n_2 = \dfrac{-7 - 25}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{18}{2} \\ n_2 = -\dfrac{32}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = 9 \\ n_2 = -16 \ \text{nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 9.$$

Vježba 077

Unutarnji kutovi konveksnog n-terokuta čine aritmetički niz s razlikom 20°. Ako je najveći kut tog n-terokuta 120°, nađi n.

Rezultat: n = 4.

Zadatak 078 (Domagoj, maturant gimnazije)

Koliki su kutovi trokuta ako oni čine aritmetički niz, a zbroj njihovih sinusa iznosi $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Rješenje 078

Ponovimo!

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

Zbroj kutova u trokutu je 180°:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1}=a_n+d.$$

Niz je aritmetički, ako je razlika svakog člana i člana ispred njega stalna i iznosi d:

$$a_n-a_{n-1}=d\ ,\ n\geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Nekoliko prvih članova su

$$a_1\ ,\ a_1+d\ ,\ a_1+2\cdot d\ ,\ \ldots$$

Uočite da se tri uzastopna člana aritmetičkog niza mogu napisati na ova tri načina:

$$x\ ,\ x+d\ ,\ x+2\cdot d\quad \text{ili}\quad x-d\ ,\ x\ ,\ x+d\quad \text{ili}\quad x-2\cdot d\ ,\ x-d\ ,\ x.$$

Formula za transfornaciju

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}.$$

Parnost funkcije kosinus

$$\cos(-x)=\cos x.$$

Označimo kutove trokuta sa

$$\alpha-d\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha+d.$$

Tada se dobiju dvije jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha-d+\alpha+\alpha+d=180^0\\ \sin(\alpha-d)+\sin\alpha+\sin(\alpha+d)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha-d+\alpha+\alpha+d=180^0\\ \sin(\alpha-d)+\sin\alpha+\sin(\alpha+d)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\cdot\alpha=180^0\ \ /:3\\ \sin(\alpha-d)+\sin\alpha+\sin(\alpha+d)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=60^0\\ \sin(\alpha-d)+\sin\alpha+\sin(\alpha+d)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin\left(60^0-d\right)+\sin 60^0+\sin\left(60^0+d\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \sin\left(60^0-d\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(60^0+d\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin\left(60^0-d\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(60^0+d\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \sin\left(60^0-d\right)+\sin\left(60^0+d\right)=\frac{3}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\sin\frac{60^0-d+60^0+d}{2}\cdot\cos\frac{60^0-d-\left(60^0+d\right)}{2}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\sin\frac{60^0-d+60^0+d}{2}\cdot\cos\frac{60^0-d-60^0-d}{2}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\sin\frac{60^0-d+60^0+d}{2}\cdot\cos\frac{60^0-d-60^0-d}{2}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot\sin\frac{120^0}{2}\cdot\cos\frac{-2\cdot d}{2}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\sin 60^0\cdot\cos\frac{-2\cdot d}{2}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot\sin 60^0\cdot\cos(-d)=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos d=\frac{3}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos d=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{3}\cdot\cos d=\frac{3}{2}\ /\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ \cos d=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos d=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ \cos d=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{9}}\ \Rightarrow\ \cos d=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3}\ \Rightarrow\ \cos d=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ d=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \Rightarrow\ d=30^0.$$

Kutovi trokuta su:

$$\left.\begin{matrix}\alpha=60^0\ ,\ d=30^0\\ \alpha-d\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha+d\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ 30^0\ ,\ 60^0\ ,\ 90^0.$$

Vježba 078

Nađi duljine stranica pravokutnog trokuta ako one čine aritmetički niz sa diferencijom 3 cm.

Rezultat: Naputak: $\left.\begin{matrix}a=a\\ b=a+3\\ c=a+6\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ a^2+(a+3)^2=(a+6)^2\ \Rightarrow\ \ldots\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}a=9\ cm\\ b=12\ cm\\ c=15\ cm\end{matrix}\right\}.$

Zadatak 079 (Maja, gimnazija)

U aritmetičkom nizu prvi član iznosi 1, a zbroj prvih pet članova jednak je četvrtini zbroja idućih pet članova. Koji je to niz?

Rješenje 079

Ponovimo!

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1}=a_n+d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Ako sve članove aritmetičkog niza izrazimo pomoću prvog člana a_1 i razlike d, dobije se

$$\left.\begin{matrix}a_1=1\\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{1}{4}\cdot(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}a_1=1\\ a_1+a_1+d+a_1+2\cdot d+a_1+3\cdot d+a_1+4\cdot d=\frac{1}{4}\cdot(a_1+5\cdot d+a_1+6\cdot d+a_1+7\cdot d+a_1+8\cdot d+a_1+9\cdot d)\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ 5 \cdot a_1 + 10 \cdot d = \frac{1}{4} \cdot (5 \cdot a_1 + 35 \cdot d) \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot 1 + 10 \cdot d = \frac{1}{4} \cdot (5 \cdot 1 + 35 \cdot d) \Rightarrow 5 + 10 \cdot d = \frac{1}{4} \cdot (5 + 35 \cdot d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + 10 \cdot d = \frac{1}{4} \cdot (5 + 35 \cdot d) \;/ \cdot 4 \Rightarrow 20 + 40 \cdot d = 5 + 35 \cdot d \Rightarrow 40 \cdot d - 35 \cdot d = 5 - 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot d = -15 \;/ : 5 \Rightarrow d = -3.$$

Traženi niz (slijed) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \;,\; d = -3 \\ a_{n+1} = a_n + d \end{array}\right\} \Rightarrow 1, -2, -5, -8, \ldots$$

Vježba 079

U aritmetičkom nizu prvi član iznosi 1, a zbroj prva dva člana jednak je četvrtini zbroja iduća dva člana. Koji je to niz?

Rezultat: 1, 7, 13, 19, ...

Zadatak 080 (Maja, gimnazija)

Nađi aritmetički niz u kojem, koliko god članova zbrojili, uvijek je zbroj jednak trostrukom kvadratu broja članova.

Rješenje 080

Ponovimo!

Niz (a_n) je aritmetički niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu uvećanom za konstantu d, tj.

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza.
Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$s_n = 3 \cdot n^2 \Rightarrow \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] = 3 \cdot n^2 \Rightarrow [n \neq 0] \Rightarrow \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right] = 3 \cdot n^2 \;/ \cdot \frac{2}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d = 6 \cdot n \Rightarrow 2 \cdot a_1 + n \cdot d - d = 6 \cdot n \Rightarrow 2 \cdot a_1 - d = 6 \cdot n - n \cdot d \Rightarrow 2 \cdot a_1 - d = (6-d) \cdot n.$$

Budući da je $n \neq 0$, jednadžba

$$2 \cdot a_1 - d = (6-d) \cdot n$$

ekvivalentna je sustavu jednadžbi

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot a_1 - d = 0 \\ 6 - d = 0 \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot a_1 - d = 0 \\ 6 - d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a_1 = d \\ -d = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a_1 = d \;/ : 2 \\ -d = -6 \;/ \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{d}{2} \\ d = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = \frac{6}{2} \Rightarrow a_1 = 3.$$

Traženi niz (slijed) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \ , \ d = 6 \\ a_{n+1} = a_n + d \end{array}\right\} \Rightarrow \ 3, 9, 15, 21, ...$$

Vježba 080

Nađi aritmetički niz u kojem, koliko god članova zbrojili, uvijek je zbroj jednak dvostrukom kvadratu broja članova.

Rezultat: 2, 6, 10, 14, 18, ...