Zadatak 021 (4A, hotelijerska škola)

Koliko članova aritmetičkog niza – 9, – 6, – 3, ... treba zbrojiti da zbroj bude 66?

Rješenje 021

Radi se o aritmetičkom nizu kod kojeg je:

- prvi član $a_1 = -9$
- diferencija $d = -6 - (-9) = -6 + 9 = 3$
- zbroj prvih n članova $s_n = 66$.

Kako je

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right]$$

treba odrediti n iz jednadžbe:

$$\frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot (-9) + (n-1) \cdot 3 \right] = 66 \Rightarrow \frac{n}{2} \cdot [-18 + 3n - 3] = 66 \Rightarrow \frac{n}{2} \cdot [3n - 21] = 66 \ / \cdot 2 \Rightarrow n \cdot [3n - 21] = 132 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3n^2 - 21n - 132 = 0 \ / : 3 \Rightarrow n^2 - 7n - 44 = 0 \Rightarrow n_{1,2} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot (-44)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 176}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{7 \pm 15}{2}.$$

Rješenja su:

$$n_1 = \frac{7+15}{2} = \frac{22}{2} = 11 \ , \ n_2 = \frac{7-15}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \ (\text{nema smisla jer je broj članova niza pozitivan broj})$$

Vježba 021

Koliko članova aritmetičkog niza – 9, – 6, – 3, ... treba zbrojiti da zbroj bude 12?

Rezultat: n = 8.

Zadatak 022 (4A, hotelijerska škola)

Ako je za svaki $n \in N$ zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak $2n + 3n^2$, nađite k – ti član.

Rješenje 022

Traženi član naći ćemo pomoću parcijalnih suma s_k i s_{k-1}:

$$\left. \begin{array}{l} s_k = 2k + 3k^2 \\ s_{k-1} = 2(k-1) + 3(k-1)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a_k = s_k - s_{k-1} = 2k + 3k^2 - \left[2(k-1) + 3(k-1)^2 \right] =$$

$$= 2k + 3k^2 - \left[2k - 2 + 3\left(k^2 - 2k + 1\right) \right] = 2k + 3k^2 - \left[2k - 2 + 3k^2 - 6k + 3 \right] =$$

$$= 2k + 3k^2 - 2k + 2 - 3k^2 + 6k - 3 = [\text{poništimo suprotne članove}] = 6k - 1.$$

Vježba 022

Ako je za svaki $n \in N$ zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak $n^2 + n$, nađite k – ti član.

Rezultat: $a_k = 2k$.

Zadatak 023 (4A, hotelijerska škola)

Dan je niz $a_n = n - \cos(n \cdot \pi)$, $n \in N$. Koliki je broj članova niza koji su manji od a_{2006}?

Rješenje 023

Za funkciju kosinus vrijedi:

$$\cos(2k \cdot \pi) = 1 \quad , \quad \cos((2k-1) \cdot \pi) = -1 \quad , \quad k \in Z.$$

Vrijednosti sljedećih članova niza su:

$$a_{2006} = 2006 - \cos(2006 \cdot \pi) = 2006 - 1 = 2005,$$

$$a_{2005}=2005-\cos(2005\cdot\pi)=2005-(-1)=2006,$$
$$a_{2004}=2004-\cos(2004\cdot\pi)=2004-1=2003,$$
$$a_{2003}=2003-\cos(2003\cdot\pi)=2003-(-1)=2004,$$
$$a_{2002}=2002-\cos(2002\cdot\pi)=2002-1=2001,$$
$$a_{2001}=2001-\cos(2001\cdot\pi)=2001-(-1)=2002.$$

Vidi se da svi članovi ispred člana a_{2006} imaju manju vrijednost od njega, osim člana a_{2005}. Dakle, broj članova niza koji su manji od a_{2006} iznosi 2004.

Vježba 023

Dan je niz $a_n=n-\cos(n\cdot\pi),\ n\in N.$ Koliki je broj članova niza koji su manji od a_{2000}?

ezultat: 1998.

Zadatak 024 (4A, hotelijerska škola)

Vrijednost sume $\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 14}+\ ...\ +\frac{1}{2002\cdot 2006}$ jednaka je:

A. $\frac{501}{4012}$ B. $\frac{603}{5012}$ C. $\frac{503}{4028}$ D. $\frac{527}{4028}$ E. $\frac{607}{4018}$

Rješenje 024

Uočimo da su u nazivnicima faktori parni brojevi pa iz svakog nazivnika izlučimo 4:

$$\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 14}+\ ...\ +\frac{1}{2002\cdot 2006}=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ ...\ +\frac{1}{1001\cdot 1003}\right].$$

Razlomci se mogu prikazati na sljedeći način:

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right),\qquad \frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),\qquad \frac{1}{5\cdot 7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)...$$

$$...\frac{1}{1001\cdot 1003}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1001}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1003}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1001}-\frac{1}{1003}\right).$$

U ovom rastavu poslužili smo se metodom neodređenih koeficijenata:

$$\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{A}{2\cdot n-1}+\frac{B}{2\cdot n+1},$$ A i B su nepoznati koeficijenti koje moramo izračunati.

$$\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{A}{2\cdot n-1}+\frac{B}{2\cdot n+1}\ /\cdot(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)\ \Rightarrow\ 1=A\cdot(2\cdot n+1)+B\cdot(2\cdot n-1)\ \Rightarrow$$

$$1=2\cdot A\cdot n+A+2\cdot B\cdot n-B\ \Rightarrow\ 1=(2\cdot A+2\cdot B)\cdot n+(A-B)\ \Rightarrow\ \begin{cases}2\cdot A+2\cdot B=0\\ A-B=1\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}2\cdot A+2\cdot B=0\ /:2\\ A-B=1\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}A+B=0\\ A-B=1\end{cases}\ \Rightarrow\ 2\cdot A=1\ \Rightarrow\ A=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ B=-\frac{1}{2}.$$

Zato je:

$$\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot n-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n+1}\right).$$

Konačno se dobije:

$$\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 14}+\ ...\ +\frac{1}{2002\cdot 2006}=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ ...\ +\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1001}-\frac{1}{1003}\right)\right]=$$

$$=\left[\text{izlučimo } \frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ \dots\ +\frac{1}{1001}-\frac{1}{1003}\right]=\left[\text{poništimo suprotne članove}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\left[1-\frac{1}{1003}\right]=\frac{1}{8}\cdot\frac{1002}{1003}=\left[\text{kratimo s } 2\right]=\frac{1}{\underset{4}{\underbrace{8}}}\cdot\frac{\overset{501}{\overbrace{1002}}}{1003}=\frac{1}{4}\cdot\frac{501}{1003}=\frac{501}{4012}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 024

Kolika je vrijednost sume $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{9\cdot 10}$?

Rezultat: $\frac{9}{10}$.

Zadatak 025 (4A, hotelijerska škola)

Zbroj prvog i sedmog člana aritmetičkog niza jednak je 27. Koliki je zbroj trećeg i petog člana?

Rješenje 025

Formula za n-ti član aritmetičkog niza (slijeda) glasi: $a_n = a_1 + (n - 1)\cdot d$.

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_7=27 \\ a_3+a_5=? \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} a_1+a_1+6d=27 \\ a_3+a_5=? \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2a_1+6d=27 \\ a_3+a_5=? \end{array}\right\}\Rightarrow a_3+a_5=a_1+2d+a_1+4d=2a_1+6d=27.$$

Vježba 025

Zbroj prvog i devetog člana aritmetičkog niza jednak je 22. Koliki je zbroj četvrtog i šestog člana?

Rezultat: 22.

Zadatak 026 (Znatiželjna, gimnazija)

Neka su $a_1+a_2+a_3+a_4+\ \dots$ i $a_1-a_2+a_3-a_4+\ \dots$ beskonačni konvergentni geometrijski redovi, s_1 i s_2 redom njihove sume. Nađite sumu $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+\ \dots$!

Rješenje 026

Budući da je $a_1+a_2+a_3+a_4+\ \dots$ beskonačni konvergentni geometrijski red, njegov količnik (kvocijent) je q pa suma iznosi:

$$s_1=\frac{a_1}{1-q}.$$

Budući da je $a_1-a_2+a_3-a_4+\ \dots$ beskonačni konvergentni geometrijski red, njegov količnik (kvocijent) je – q pa suma iznosi:

$$s_2=\frac{a_1}{1-(-q)}=\frac{a_1}{1+q}.$$

Beskonačni konvergentni geometrijski red $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+\ \dots$ ima količnik (kvocijent) q^2 pa je suma jednaka:

$$s=\frac{a_1^2}{1-q^2}\Rightarrow s=\frac{a_1^2}{(1-q)\cdot(1+q)}=\frac{a_1}{1-q}\cdot\frac{a_1}{1+q}=s_1\cdot s_2.$$

Vježba 026

Neka su $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \dots$ i $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ \dots$ beskonačni konvergentni geometrijski redovi.

Nađite sumu $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ \dots$

Rezultat: $s = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

Zadatak 027 (4A, hotelijerska škola)

U beskonačnom konvergentnom redu svaki je član jednak četverostrukom zbroju članova koji slijede iza njega. Nađite količnik (kvocijent) q reda.

Rješenje 027

Neka je s suma beskonačnog konvergentnog reda:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots .$$

Zbroj članova koji slijedi iza prvog člana a_1 je:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = s - a_1.$$

Zbog uvjeta zadatka vrijedi:

$$a_1 = 4 \cdot (s - a_1) \Rightarrow a_1 = 4s - 4a_1 \Rightarrow 5a_1 = 4s \Rightarrow a_1 = \frac{4}{5} \cdot s.$$

Iz formule za sumu beskonačnog konvergentnog reda dobije se q:

$$s = \frac{a_1}{1-q} \;/\cdot(1-q) \Rightarrow s \cdot (1-q) = a_1 \Rightarrow s \cdot (1-q) = \frac{4}{5} \cdot s \;/:s \Rightarrow 1 - q = \frac{4}{5} \Rightarrow q = \frac{1}{5}.$$

Vježba 027

U beskonačnom konvergentnom redu svaki je član jednak dvostrukom zbroju članova koji slijede iza njega. Nađite količnik (kvocijent) q reda.

Rezultat: $q = \frac{1}{3}.$

Zadatak 028 (Anamarija, hotelijerska škola)

Gumena loptica ispuštena je s visine 3 m na tvrdu podlogu. Svaki put kad udari u nju, odbije se do $\frac{2}{3}$ visine. Izračunajte ukupni put (padanje i podizanje) koji loptica prevali do umirenja.

Rješenje 028

Kada loptica prvi put padne na podlogu prevali put:

$$s_1 = 3 \text{ m}.$$

Odbije se do $\frac{2}{3}$ visine i ponovno padne na podlogu:

$$s_2 = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot 3}_{\text{podizanje}} + \underbrace{\frac{2}{3} \cdot 3}_{\text{padanje}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right).$$

Iznovice se odbije do $\frac{2}{3}$ visine i ponovno padne na podlogu:

$$s_3 = \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3}_{\text{podizanje}} + \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3}_{\text{padanje}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\right).$$

Ukupni put koji loptica prevali do umirenja je:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = 3 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) + 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\right) + 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\right) + \ldots = 3 + 2 \cdot 3 \cdot \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 3 + 6 \cdot \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right] = \left[\begin{array}{c} \text{zbroj beskonačnog geometrijskog reda} \\ a_1 = \frac{2}{3} \;,\; q = \frac{2}{3} \;,\; s = \frac{a_1}{1-q} \end{array}\right] =$$

$$=3+6\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=3+6\cdot\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=3+6\cdot 2=3+12=15\ m.$$

Vježba 028

Gumena loptica ispuštena je s visine 6 m na tvrdu podlogu. Svaki put kad udari u nju, odbije se do $\frac{2}{3}$ visine. Izračunajte ukupni put (padanje i podizanje) koji loptica prevali do umirenja.

Rezultat: 30 m.

Zadatak 029 (Anamarija, hotelijerska škola)

Izračunajte zbroj prvih sto zajedničkih članova aritmetičkih nizova:

17, 21, 25, ... i 16, 21, 26, ... !

Rješenje 029

U prvom nizu: 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, ... razlika je d = 4.

U drugom nizu: 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76, 81, ... razlika je d = 5.

Niz koji se sastoji od zajedničkih članova oba aritmetička niza glasi: 21, 41, 61, ...

Prvi član je $a_1 = 21$, a razlika d = 4 · 5 = 20. Stoti član ima vrijednost:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=a_1+(n-1)\cdot d \\ a_1=21,\ d=20 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{100}=a_1+99\cdot d=21+99\cdot 20=2001.$$

Zbroj prvih sto zajedničkih članova iznosi:

$$\left.s_n=\frac{n}{2}\cdot\left(a_1+a_n\right)\right\} \Rightarrow s_{100}=\frac{100}{2}\cdot\left(a_1+a_{100}\right)=50\cdot(21+2001)=50\cdot 2022=101100.$$

Vježba 029

Izračunajte zbroj prvih deset zajedničkih članova aritmetičkih nizova:

17, 21, 25, ... i 16, 21, 26, ... !

Rezultat: 1110.

Zadatak 030 (Anamarija, hotelijerska škola)

Niz (a_n) definiran je na sljedeći način: $a_1=-6,\ a_{n+1}=a_n+n,\ za\ n\in N$. Koliko je a_{2004}?

Rješenje 030

Prvi član je $a_1 = -6$. Uporabom rekurzivne formule $a_{n+1}=a_n+n$ dobije se:

$$a_{2004}=a_{2003}+2003=$$
$$=a_{2002}+2002+2003=$$
$$=a_{2001}+2001+2002+2003=$$
$$=a_{2000}+2000+2001+2002+2003=$$

....

$$=a_3+3+4+5+\ \ldots\ +2000+2001+2002+2003=$$
$$=a_2+2+3+4+5+\ \ldots\ +2000+2001+2002+2003=$$
$$=a_1+1+2+3+4+5+\ \ldots\ +2000+2001+2002+2003=$$
$$=a_1+[1+2+3+4+5+\ \ldots\ +2000+2001+2002+2003]=$$
$$=-6+\left[\begin{array}{c} 1+2+3+4+5+\ \ldots\ +2000+2001+2002+2003 \\ 1+2+3+4+\ \ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2} \end{array}\right]=-6+\frac{2003\cdot 2004}{2}=2007000.$$

Vježba 030

Niz (a_n) definiran je na sljedeći način: $a_1=0,\ a_{n+1}=a_n+n,\ za\ n\in N$. Koliko je a_{2004}?

Rezultat: 2007006.

Zadatak 031 (Anamarija, hotelijerska škola)

Prvi, treći i jedanaesti član aritmetičkog niza su tri uzastopna člana geometrijskog niza. Kolika je najveća moguća vrijednost omjera dva uzastopna člana geometrijskog niza?

Rješenje 031

Prvi, treći i jedanaesti član aritmetičkog niza glase:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \Rightarrow \begin{cases} a_1 \\ a_3 = a_1 + 2d \\ a_{11} = a_1 + 10d. \end{cases}$$

Za geometrijski niz vrijedi svojstvo:

$$a_{n-1}\cdot a_{n+1} = a_n^2.$$

Budući da su a_1, a_3 i a_{11} tri uzastopna člana geometrijskog niza, slijedi:

$$a_1\cdot(a_1+10d) = (a_1+2d)^2 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 d = a_1^2 + 4a_1 d + 4d^2 \Rightarrow 6a_1 d = 4d^2 \;/:2d \Rightarrow 3a_1 = 2d \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}d.$$

Količnik je:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow q = \frac{a_1+2d}{a_1} = \frac{\frac{2}{3}d + 2d}{\frac{2}{3}d} = \frac{\frac{8}{3}d}{\frac{2}{3}d} = \frac{8}{2} = 4.$$

Vježba 031

Prvi, četvrti i šesnaesti član aritmetičkog niza su tri uzastopna člana geometrijskog niza. Kolika je najveća moguća vrijednost omjera dva uzastopna člana geometrijskog niza?

Rezultat: 4.

Zadatak 032 (4A, hotelijerska škola)

Za koji $x \in R$ su brojevi log (x + 1), log (x – 2), log (x – 3) uzastopni članovi aritmetičkog niza?

Rješenje 032

Budući da su zadani logaritmi, moramo provesti diskusiju.

$$\left.\begin{matrix} \log(x+1) \\ \log(x-2) \\ \log(x-3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+1>0 \\ x-2>0 \\ x-3>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x>-1 \\ x>2 \\ x>3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x>3.$$

Iz definicije aritmetičkog niza slijedi:

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \Rightarrow \log(x-2) = \frac{\log(x+1)+\log(x-3)}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow 2\cdot\log(x-2) = \log(x+1)+\log(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[n\cdot\log a = \log a^n \;,\; \log a + \log b = \log(a\cdot b)\right] \Rightarrow \log(x-2)^2 = \log(x+1)\cdot(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 3x + x - 3 \Rightarrow -4x + 3x - x = -3 - 4 \Rightarrow -2x = -7 \;/:(-2) \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

Budući da je x > 0, znači rješenje je $x = \frac{7}{2}.$

Vježba 032

Za koji $x \in R$ su brojevi log (x – 1), log (x – 3), log (x – 4) uzastopni članovi aritmetičkog niza?

Rezultat: x = 5.

Zadatak 033 (4A, hotelijerska škola)

Ako je $S=\frac{2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+\ ...\ +2^{x+10}}{2^{x-10}+2^{x-9}+2^{x-8}+\ ...\ +2^x}$, koliko je $\frac{S}{2^5}$?

Rješenje 033

$$S=\frac{2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+\ ...\ +2^{x+10}}{2^{x-10}+2^{x-9}+2^{x-8}+\ ...\ +2^x}=\frac{2^x\cdot\left(1+2^1+2^2+\ ...\ +2^{10}\right)}{2^x\cdot\left(2^{-10}+2^{-9}+\ ...\ +1\right)}=\frac{1+2+2^2+\ ...\ +2^{10}}{1+2^{-1}+2^{-2}+\ ...\ +2^{-10}}=$$

$$=\frac{1\cdot\frac{2^{11}-1}{2-1}}{1\cdot\frac{\left(2^{-1}\right)^{11}-1}{2^{-1}-1}}=\frac{\frac{2^{11}-1}{1}}{\frac{2^{-11}-1}{2^{-1}-1}}=\frac{\left(2^{11}-1\right)\cdot\left(2^{-1}-1\right)}{2^{-11}-1}=\frac{\left(2^{11}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\frac{1}{2^{11}}-1}=\frac{\left(2^{11}-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1-2^{11}}{2^{11}}}=$$

$$=\frac{\left(2^{11}-1\right)\cdot\left(-2^{-1}\right)\cdot2^{11}}{1-2^{11}}=\frac{\left(1-2^{11}\right)\cdot2^{-1}\cdot2^{11}}{1-2^{11}}=2^{10}.$$

Vježba 033

Ako je $S=\frac{2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+\ ...\ +2^{x+10}}{2^{x-10}+2^{x-9}+2^{x-8}+\ ...\ +2^x}$, koliko je $\frac{S}{2^{10}}$?

Rezultat: 1.

Zadatak 034 (Dolores, gimnazija)

Neka je $0<x<\frac{\pi}{2}$. Ako je $s_1=1+\sin^2 x+\sin^4 x+...$, $s_2=1+\cos^2 x+\cos^4 x+...$, nađite s_1+s_2.

Rješenje 034

$$0<x<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 0<\sin^2 x<1\ \Rightarrow\ s_1=\frac{1}{1-\sin^2 x}=\left[\cos^2 x+\sin^2 x=1\right]=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$0<x<\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 0<\cos^2 x<1\ \Rightarrow\ s_2=\frac{1}{1-\cos^2 x}=\left[\cos^2 x+\sin^2 x=1\right]=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Suma iznosi:

$$s_1+s_2=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\cdot\frac{4}{4}=\frac{4}{(2\cdot\sin x\cdot\cos x)^2}=\frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Vježba 034

Neka je $0<x<\frac{\pi}{2}$. Ako je $s_1=1+\sin^2 x+\sin^4 x+...$, $s_2=1+\cos^2 x+\cos^4 x+...$, nađite $\frac{1}{4}\cdot\left(s_1+s_2\right)$.

Rezultat: $\frac{1}{\sin^2 2x}$.

Zadatak 035 (4A, hotelijerska škola)

Koliki je zbroj svih peteroznamenkastih brojeva u čijem se dekadskom zapisu svaka od znamenki 1, 2, 3, 4, 5 pojavljuje točno jednom?

Rješenje 035

Broj svih peteroznamenkastih brojeva u čijem se dekadskom zapisu svaka od znamenki 1, 2, 3, 4, 5 pojavljuje točno jednom iznosi:

$P_5 = 5\ ! = 120$ (permutacije bez ponavljanja)

Radi se o aritmetičkom nizu kod kojeg je:

- prvi član $a_1 = 12345$
- diferencija d = 1

- n = 120 broj članova
- zadnji član a_{120} = 54321.

Zbroj svih brojeva dobijemo pomoću formule za sumu prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

Suma iznosi:

$$s_{120} = \frac{120}{2} \cdot [12345 + 54321] = 60 \cdot 66666 = 3999960.$$

Vježba 035

Koliki je zbroj svih četveroznamenkastih brojeva u čijem se dekadskom zapisu svaka od znamenki 1, 2, 3, 4 pojavljuje točno jednom?

Rezultat: 66660.

Zadatak 036 (Mira, gimnazija)

U geometrijskom nizu je zbroj prvih 6 članova jednak trostrukom zbroju prva tri člana. Nađi količnik niza.

Rješenje 036

Ponovimo!

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza glasi:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Budući da je zbroj prvih 6 članova jednak trostrukom zbroju prva tri člana, slijedi:

$$s_6 = 3 \cdot s_3 \Rightarrow a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 3 \cdot a_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \, / \cdot \frac{q-1}{a_1} \Rightarrow q^6 - 1 = 3 \cdot \left(q^3 - 1\right) \Rightarrow \left(q^3\right)^2 - 1 = 3 \cdot \left(q^3 - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(q^3 - 1\right) \cdot \left(q^3 + 1\right) - 3 \cdot \left(q^3 - 1\right) = 0 \Rightarrow \left(q^3 - 1\right) \cdot \left(q^3 + 1 - 3\right) = 0 \Rightarrow \left(q^3 - 1\right) \cdot \left(q^3 - 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q^3 - 1 = 0 \\ q^3 - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q^3 = 1 \, / \sqrt[3]{\ } \\ q^3 = 2 \, / \sqrt[3]{\ } \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = 1 \\ q_2 = \sqrt[3]{2} \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 036

U geometrijskom nizu je zbroj prva 4 člana jednak dvostrukom zbroju prva dva člana. Nađi količnik niza.

Rezultat: $q_1 = 1$, $q_2 = -1$.

Zadatak 037 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka 1?

Rješenje 037

Ponovimo!

Opći (n – ti) član aritmetičkog niza:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

Budući da su to prirodni brojevi između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka 1, riječ je o aritmetičkom nizu s diferencijom (razlikom) 10.

Zato vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 51 \ , \ d = 10 \ , \ a_n = 341 \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow 341 = 51 + (n-1) \cdot 10 \Rightarrow 10 \cdot (n-1) = 341 - 51 \Rightarrow 10 \cdot (n-1) = 290 \ /:10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = 29 \Rightarrow n = 30.$$

Zbroj iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n = 30 \ , \ a_1 = 51 \ , \ a_n = 341 \\ s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right] \end{array}\right\} \Rightarrow s_{30} = \frac{30}{2} \cdot [51 + 341] \Rightarrow s_{30} = 15 \cdot 392 = 5880.$$

Vježba 037

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka 3?

Rezultat: 5940.

Zadatak 038 (Nena, hotelijerska škola)

Sinusi triju kutova u pravokutnom trokutu čine rastući geometrijski niz. Koliko iznosi prvi član tog niza?

Rješenje 038

Ponovimo!

$$\sin\left(90^0 - x\right) = \cos x \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Označimo članove niza slovima a_1, a_2 i a_3:

$$a_1 = \sin\alpha \quad , \quad a_2 = \sin\beta \quad , \quad a_3 = \sin\gamma.$$

Budući da je trokut pravokutan, vrijedi:

$$\gamma = 90^0 \Rightarrow a_3 = \sin 90^0 \Rightarrow a_3 = 1.$$

Ostala dva kuta u pravokutnom trokutu manja su od 90° pa imaju sinuse strogo manje od 1. Svaki član geometrijskog niza, osim prvog, geometrijska je sredina njemu susjednih članova. Zato pišemo:

$$a_2 = \sqrt{a_1 \cdot a_3} \Rightarrow a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow a_2^2 = a_1 \cdot 1 \Rightarrow a_2^2 = a_1.$$

Računamo prvi član niza a_1:

$$\alpha + \beta = 90^0 \Rightarrow \beta = 90^0 - \alpha \Rightarrow \sin\beta = \sin\left(90^0 - \alpha\right) \Rightarrow \sin\beta = \cos\alpha \Rightarrow \sin\beta = \cos\alpha \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\beta = \cos^2\alpha \Rightarrow \sin^2\beta = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ a_1 = \sin\alpha \ , \ a_2 = \sin\beta \end{array}\right] \Rightarrow a_2^2 = 1 - a_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a_2^2 = a_1\right] \Rightarrow a_1 = 1 - a_1^2 \Rightarrow a_1^2 + a_1 - 1 = 0 \Rightarrow \left(a_1\right)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \left(a_1\right)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a_1\right)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Sinus kuta mora biti pozitivan broj pa rješenje glasi:

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Vježba 038

Sinusi triju kutova u pravokutnom trokutu čine rastući geometrijski niz. Koliko iznosi drugi član tog niza?

Rezultat: $a_2 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}.$

Zadatak 039 (Nena, hotelijerska škola)

Ako je 1 + 3 + 5 + 7 + … + m = 1012036, koliko iznosi m?

Rješenje 039

Ponovimo!

Aritmetički niz (slijed):

$$a_1, \; a_2 = a_1 + d, \; a_3 = a_1 + 2 \cdot d, \; a_4 = a_1 + 3 \cdot d, \; \dots, \; n - ti \text{ član } a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

Najprije odredimo broj članova niza 1, 3, 5, 7, … , m.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1, \; d = 2, \; a_n = m \\ a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow m = 1 + 2 \cdot n - 2 \Rightarrow m = 2 \cdot n - 1 \Rightarrow n = \frac{m+1}{2}.$$

Budući da je poznat zbroj niza, broj m iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n = \dfrac{m+1}{2} \\ s_n = \dfrac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] \end{array}\right\} \Rightarrow 1012036 = \frac{\frac{m+1}{2}}{2} \cdot [1 + m] \Rightarrow 1012036 = \frac{m+1}{4} \cdot (m+1) \Rightarrow \frac{(m+1)^2}{4} = 1012036 \; / \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 = 4048144 \; / \sqrt{} \Rightarrow m + 1 = \sqrt{4048166} \Rightarrow m + 1 = 2012 \Rightarrow m = 2011.$$

Vježba 039

Ako je 1 + 3 + 5 + 7 + … + m = 100, koliko iznosi m?

Rezultat: m = 19.

Zadatak 040 (Sanja, informatika)

Odredite t tako da niz $\sin^2 t$, $5 \cdot \sin t$, 9 bude aritmetički.

Rješenje 040

Ponovimo!

Niz (slijed) je aritmetički, ako je razlika svakog člana i člana ispred njega stalna i iznosi d:

$$a_n - a_{n-1} = d \; , \; n \ge 2.$$

Pretpostavimo da su zadana prva tri člana aritmetičkog niza. Tada slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \sin^2 t \; , \; a_2 = 5 \cdot \sin t \; , \; a_3 = 9 \\ a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 - 5 \cdot \sin t = 5 \cdot \sin t - \sin^2 t \Rightarrow 9 - 5 \cdot \sin t - 5 \cdot \sin t + \sin^2 t = 0 \Rightarrow$$

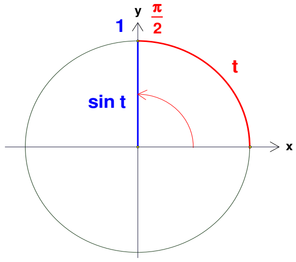
$$\Rightarrow \sin^2 t - 10 \cdot \sin t + 9 = 0.$$

Dobije se "kvadratna trigonometrijska jednadžba" koja se zamjenom (supstitucijom) transformira u opću kvadratnu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2 t - 10 \cdot \sin t + 9 = 0 \\ \sin t = x \; \text{supstitucija} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 10 \cdot x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{10+8}{2} \\ x_2 = \dfrac{10-8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{18}{2} = 9 \\ x_2 = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se na supstituciju:



- $\left.\begin{array}{l}\sin t = x \\ x = 9\end{array}\right\} \Rightarrow \sin t = 9$ nema smisla jer vrijedi $-1 \leq \sin t \leq 1$.

- $\left.\begin{array}{l}\sin t = x \\ x = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \sin t = 1.$

Rješenje elementarne trigonometrijske jednadžbe sin t = 1 iznosi:

$$\sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \;,\; k \in Z.$$

Vježba 040

Odredite t tako da niz sin t, 2, 3 bude aritmetički.

Rezultat: $\sin t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \;,\; k \in Z.$