Zadatak 001 (Tihomir, prehrambena škola)

U nizu 4, 7, 10, ... odredi deseti član niza.

Rješenje 001

Prvi član niza je $a_1 = 4$.

Razlika je $d = 7 - 4 = 10 - 7 = ... = 3$.

Formula za n-ti član aritmetičkog niza (slijeda) glasi:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Sada je:

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot d = a_1 + 9 \cdot d = 4 + 9 \cdot 3 = 31.$$

Vježba 001

U nizu 1, 3, 5, ... odredi osmi član niza.

Rezultat: 15.

Zadatak 002 (Martina ♥ Bojan, hotelijerska škola)

U aritmetičkom nizu (slijedu) 5, 9, 13, ... zbroj triju uzastopnih članova jest 147. Koji su to članovi?

Rješenje 002

U zadanom aritmetičkom nizu razlika je $d = 13 - 9 = 9 - 5 = ... = 4$.

Budući da su zadana tri uzastopna člana aritmetičkog niza s razlikom 4, možemo ih ovako zapisati:

$$a_n,\ a_n + 4,\ a_n + 8.$$

Njihov zbroj je

$$a_n + a_n + 4 + a_n + 8 = 147 \quad \Rightarrow \quad 3a_n + 12 = 147 \quad \Rightarrow \quad 3a_n = 147 - 12 \quad \Rightarrow \quad 3a_n = 135 \ / : 3$$

$$a_n = 45.$$

Članovi su: 45, 49 i 53.

Vježba 002

U aritmetičkom nizu (slijedu) 2, 5, 8, ... zbroj triju uzastopnih članova jest 69. Koji su to članovi?

Rezultat: 20, 23, 26.

Zadatak 003 (Martina ♥ Bojan, hotelijerska škola)

Na kojem se mjestu u aritmetičkom nizu (slijedu) 11, 22, ... nalazi broj 198?

Rješenje 003

Prvi član aritmetičkog niza je $a_1 = 11$, a razlika iznosi $d = 22 - 11 = 11$.

Broj 198 je vrijednost nekog člana za koji ne znamo na kojem se mjestu nalazi. Zato ćemo zapisati:

$$a_n = 198.$$

Formula za n-ti član aritmetičkog niza glasi:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}.$$

Sada je:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

[uvrstimo poznate vrijednosti za a_n, a_1 i d]

$$198 = 11 + (n - 1) \cdot 11 \quad \Rightarrow \quad 198 = 11 + 11n - 11 \quad \Rightarrow \quad 198 = 11n \ / : 11 \quad \Rightarrow \quad n = 18.$$

Broj 198 nalazi se na 18. mjestu u nizu.

Vježba 003

Na kojem se mjestu u aritmetičkom nizu (slijedu) 7, 10, ... nalazi broj 163?

Rezultat: n = 53.

Zadatak 004 (Martina ♥ Bojan, hotelijerska škola)

Koliko ima neparnih dvoznamenkastih brojeva?

Rješenje 004

Neparni dvoznamenkasti brojevi jesu: 11, 13, 15, 17, ... , 93, 95, 97, 99.

Neparni dvoznamenkasti brojevi čine aritmetički niz (slijed):

$$a_1 = 11,\ a_n = 99,\ d = 13 - 11 = 15 - 13 = \ldots = 99 - 97 = 2.$$

Formula za n-ti član aritmetičkog niza glasi:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.}$$

Sada je:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

$$[\text{uvrstimo poznate vrijednosti za } a_n,\ a_1 \text{ i } d]$$

$$99 = 11 + (n - 1) \cdot 2 \;\Rightarrow\; 99 = 11 + 2n - 2 \;\Rightarrow\; 99 = 2n + 9 \;\Rightarrow\; -2n = 9 - 99 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -2n = -90 \;/ : (-2) \;\Rightarrow\; n = 45.$$

Ima 45 neparnih dvoznamenkastih brojeva..

Vježba 004

Koliko ima parnih dvoznamenkastih brojeva?

Rezultat: n = 45.

Zadatak 005 (Martina ♥ Bojan, hotelijerska škola)

Zbroj prvih dvadeset članova aritmetičkog niza (slijeda) je 130, a zbroj sljedećih dvadeset je 250. Odredite prvi član i razliku tog niza.

Rješenje 005

Budući da je zbroj prvih dvadeset članova aritmetičkog niza jednak 130, to ćemo zapisati:

$$s_{20} = 130.$$

Zbroj sljedećih dvadeset članova niza iznosi 250:

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots + a_{38} + a_{39} + a_{40} = 250.$$

To možemo napisati i na drugi način. Od sume prvih 40 članova oduzmemo sumu prvih 20 članova:

$$s_{40} - s_{20} = 250.$$

Sada imamo:

$$s_{20} = 130,$$

$$s_{40} - s_{20} = 250.$$

Uporabit ćemo formulu za sumu prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

$$\left.\begin{array}{r} s_{20} = 130 \\ s_{40} - s_{20} = 250 \end{array}\right\} + \;\Rightarrow\; [\text{zbrojimo jednakosti}] \;\Rightarrow\; s_{40} = 380.$$

Možemo pisati:

$$\left.\begin{array}{l} s_{20} = 130 \\ s_{40} = 380 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{20}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 19 \cdot d\right] = 130 \\ \frac{40}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 39 \cdot d\right] = 380 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 \cdot \left[2a_1 + 19d\right] = 130 \quad / : 10 \\ 20 \cdot \left[2a_1 + 39d\right] = 380 \quad / : 20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a_1 + 19d = 13 \\ 2a_1 + 39d = 19 \end{array}\right\} \Rightarrow [\text{rabimo metodu suprotnih koeficijenata}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a_1 + 19d = 13 \ / \cdot (-1) \\ 2a_1 + 39d = 19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2a_1 - 19d = -13 \\ 2a_1 + 39d = 19 \end{array}\right\} + \Rightarrow 20d = 6 \Rightarrow d = 0.3$$

Kada smo našli razliku d, prvi član naći ćemo tako da razliku uvrstimo u jednu od formula:

$$2a_1 + 19d = 13 \Rightarrow 2a_1 + 19 \cdot 0.3 = 13 \Rightarrow 2a_1 + 5.7 = 13 \Rightarrow 2a_1 = 13 - 5.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 = 7.3 \ / : 2 \Rightarrow a_1 = 3.65.$$

Vježba 005

Zbroj prvih deset članova aritmetičkog niza (slijeda) je 100, a zbroj sljedećih deset je 300. Odredite prvi član i razliku tog niza.

Rezultat: $a_1 = 1, d = 2.$

Zadatak 006 (Ivančica, Ivana, Danijela, Ivana, Martina, hotelijerska škola)

Niz (a_n) aritmetički je niz. Ako je $a_{11} = 18$, $a_{13} = 8$, odredi a_9.

Rješenje 006

Podsjetimo se kako glasi formula za opći član aritmetičkog niza:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}.$$

Znači da će a_9 biti:

$$a_9 = a_1 + 8d.$$

Moramo naći prvi član a_1 i razliku d. To ćemo dobiti iz zadana dva člana a_{11} i a_{13}.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = 18 \\ a_{13} = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 10d = 18 \\ a_1 + 12d = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 10d = 18 \ / \cdot (-1) \\ a_1 + 12d = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -a_1 - 10d = -18 \\ a_1 + 12d = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d = -10 \Rightarrow 2d = -10 \ / : 2 \Rightarrow d = -5.$$

Dobili smo razliku d = – 5. Prvi član a_1 izračunamo tako da vrijednost razlike uvrstimo u jednu jednadžbu. Uzet ćemo, na primjer, jednadžbu

$$a_1 + 12d = 8.$$

Sada je

$$a_1 + 12 \cdot (-5) = 8 \Rightarrow a_1 - 60 = 8 \Rightarrow a_1 = 68.$$

Konačno računamo a_9:

$$a_9 = a_1 + 8d = 68 + 8 \cdot (-5) = 68 - 40 = 28.$$

Vježba 006

Niz (a_n) aritmetički je niz. Ako je $a_{11} = 30$, $a_{13} = 36$, odredi a_9.

Rezultat: $a_{13} = 24.$

Zadatak 007 (Ivančica, Ivana, Danijela, Ivana, Martina, hotelijerska škola)

Odredi aritmetički niz (slijed) ako je: $a_5 + a_{11} = -0.2$, $a_4 + a_{10} = 2.6$.

Rješenje 007

Odrediti aritmetički niz znači naći prvi član a_1 i razliku d.

Formula za n-ti član aritmetičkog niza (slijeda) glasi:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Svaki član u zadatku napišemo pomoću prvog člana a_1 i razlike d:

$$\left.\begin{array}{l} a_5 + a_{11} = -0.2 \\ a_4 + a_{10} = 2.6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 + 4d + a_1 + 10d = -0.2 \\ a_1 + 3d + a_1 + 9d = 2.6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a_1 + 14d = -0.2 \\ 2a_1 + 12d = 2.6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a_1 + 14d = -0.2 \ / \cdot (-1) \\ 2a_1 + 12d = 2.6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2a_1 - 14d = 0.2 \\ 2a_1 + 12d = 2.6 \end{array}\right\} \Rightarrow -2d = 2.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2d = 2.8\ /:(-2)\ \Rightarrow\ d = -1.4.$$

Našli smo razliku $d = -1.4$. Prvi član a_1 izračunamo tako da vrijednost razlike uvrstimo u jednu jednadžbu. Uzet ćemo, na primjer, jednadžbu

$$2a_1 + 12d = 2.6 \ \Rightarrow\ 2a_1 + 12d = 2.6\ /:2 \ \Rightarrow\ a_1 + 6d = 1.3 \ \Rightarrow\ a_1 + 6 \cdot (-1.4) = 1.3 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1 - 8.4 = 1.3 \ \Rightarrow\ a_1 = 1.3 + 8.4 \ \Rightarrow\ a_1 = 9.7.$$

Vježba 007

Odredi aritmetički niz (slijed) ako je: $a_5 + a_{11} = 30$, $a_4 + a_{10} = 26$.

Rezultat: $a_1 = 1$, $d = 2$.

Zadatak 008 (Matea, gimnazija)

U nizu 51, 48, 45, ... odredi prvi član s negativnim predznakom.

Rješenje 008

Prvi član niza je $a_1 = 51$. Razlika je $d = 45 - 48 = 48 - 51 = ... = -3$.

Formula za n-ti član aritmetičkog niza (slijeda) glasi:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Tražimo prvi član koji je negativan:

$$a_n < 0 \ \Rightarrow\ a_1 + (n-1) \cdot d < 0 \ \Rightarrow\ 51 + (n-1) \cdot (-3) < 0 \ \Rightarrow\ 51 - 3n + 3 < 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -3n < -51 - 3 \ \Rightarrow\ -3n < -54\ /:(-3) \ \Rightarrow\ n > 18.$$

Prvi član koji je negativan je devetnaesti po redu, a_{19}:

$$a_{19} = a_1 + 18d = 51 + 18 \cdot (-3) = 51 - 54 = -3$$

Vježba 008

U nizu 23, 20, 17, ... odredi prvi član s negativnim predznakom.

Rezultat: $a_9 = -1$.

Zadatak 009 (Duda-Dubravka H., Ivana B., hotelijerska škola)

Primijetile smo da kod nekih aritmetičkih nizova traženi član dobijemo tako da njegov redni broj pomnožimo s razlikom. Kada je to moguće? Na primjer, zadan je niz 3, 6, 9, 12, ... Ako tražimo a_{21}, možemo odmah računati $a_{21} = 21 \cdot 3 = 63$.

Rješenje 009

Dobro ste to uočile! Evo objašnjena:
Ako su prvi član i razlika jednaki onda vrijedi to svojstvo: $a_1 = d$.
Formula za n-ti član aritmetičkog niza (slijeda) glasi:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \ \Rightarrow\ a_n = d + (n-1) \cdot d \ \Rightarrow\ a_n = d + nd - d \ \Rightarrow\ a_n = n \cdot d.$$

Vježba 009

U nizu 4, 8, 12, ... odredi a_{31}.

Rezultat: $a_{31} = 31 \cdot 4 = 124$.

Zadatak 010 (Maja, gimnazija)

U aritmetičkom je nizu zbroj trećeg i sedmog člana jednak 10. Odredi zbroj prvih devet članova toga niza.

Rješenje 010

1.inačica

Zbroj trećeg i sedmog člana napišimo pomoću a_1 i d.

$$a_3 + a_7 = 10.$$

Uporabit ćemo formulu za n-ti član

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d = 10 \ \Rightarrow\ 2a_1 + 8d = 10\ \mathbf{/:2},$$

$$a_1 + 4d = 5. \qquad (1)$$

Sada koristimo formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d \right].$$

Suma prvih devet članova bit će:

$$s_9 = \frac{9}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + 8d \right] = \frac{9}{2} \cdot 2 \cdot \left[a_1 + 4d \right] = 9 \cdot \left[a_1 + 4d \right] = \left[\text{zbog } (1) \right] = 9 \cdot 5 = 45.$$

2.inačica

Zbroj trećeg i sedmog člana je:

$$a_3 + a_7 = 10.$$

Koristimo formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

Suma prvih devet članova bit će:

$$s_9 = \frac{9}{2} \cdot \left[a_1 + a_9 \right] = \frac{9}{2} \cdot \left[a_3 - 2d + a_7 + 2d \right] = \frac{9}{2} \cdot \left[a_3 + a_7 \right] = \frac{9}{2} \cdot 10 = 9 \cdot 5 = 45.$$

Vježba 010

U aritmetičkom je nizu zbroj drugog i osmog člana jednak 12. Odredi zbroj prvih devet članova toga niza.

Rezultat: 54.

Zadatak 011 (Maja, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $2 + 5 + 8 + \ldots + x = 155$.

Rješenje 011

Na lijevoj strani jednadžbe je aritmetički niz. Prvi član je $a_1 = 2$, a razlika $d = 3$. Suma prvih n članova aritmetičkog niza računa se

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right].$$

Pitamo se koliko ima članova u tom nizu. Broj članova naći ćemo iz formule za n-ti član.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

$$a_n - a_1 = (n - 1) \cdot d \quad / : d$$

$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1 \;\Rightarrow\; n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{a_n - a_1 + d}{d}.$$

Zato je

$$n = \frac{x - 2 + 3}{3} = \frac{x + 1}{3}.$$

Dakle, suma je

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n \right] = \frac{\frac{x+1}{3}}{2} \cdot \left[2 + x \right] = \frac{x+1}{6} \cdot \left[2 + x \right] = \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{6}.$$

Konačno, pišemo

$$\frac{(x+1) \cdot (x+2)}{6} = 155 \;\Rightarrow\; \frac{(x+1) \cdot (x+2)}{6} = 155 \quad / \cdot 6 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x+1) \cdot (x+2) = 930 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x + x + 2 - 930 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+3x-928=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+3712}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{3721}}{2}=\frac{-3\pm 61}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-3+61}{2}=\frac{58}{2}=29 \text{ i } x_2=\frac{-3-61}{2}=\frac{-64}{2}=-32 \,(\text{nema smisla}).$$

Rješenje jednadžbe je x = 29.

Vježba 011

Riješi jednadžbu: 1 + 3 + 5 + ... + x = 289.

Rezultat: x = 33.

Zadatak 012 (Marinko, tehnička škola)

Tri broja čiji je zbroj 124 imaju svojstvo da su tri uzastopna člana geometrijskog niza (slijeda) i istodobno prvi, jedanaesti i trinaesti član aritmetičkog niza. Nađite njihov produkt.

Rješenje 012

Formula za n-ti član aritmetičkog niza glasi:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

pa se prvi, jedanaesti i trinaesti član mogu ovako zapisati:

$$a_1,\ a_1+10d,\ a_1+12d.$$

Budući da je njihov zbroj 124, pišemo:

$$a_1 + a_1 + 10d + a_1 + 12d = 124 \Rightarrow 3a_1 + 22d = 124.$$

Ta tri člana ujedno su i tri uzastopna člana geometrijskog niza pa možemo pisati:

$$a_1+10d=\sqrt{a_1\cdot(a_1+12d)} \Rightarrow (a_1+10d)^2=a_1\cdot(a_1+12d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1^2+20\cdot a_1\cdot d+100d^2=a_1^2+12\cdot a_1\cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot a_1\cdot d+100d^2=0 \ /:4 \Rightarrow 2\cdot a_1\cdot d+25d^2=0 \Rightarrow d\cdot(2a_1+25d)=0.$$

Dobili smo dvije jednadžbe iz kojih lako izračunamo d i a_1.

$$3a_1 + 22d = 124,$$

$$d\cdot(2a_1+25d)=0.$$

U drugoj jednadžbi je umnožak dva broja jednak nuli. To je moguće ako je barem jedan faktor jednak nuli.

$$d\cdot(2a_1+25d)=0 \Rightarrow d=0 \text{ ili } 2a_1+25d=0.$$

Ako je d = 0, uvrstimo ga u prvu jednadžbu i dobijemo:

$$3a_1+22d=124 \Rightarrow 3a_1+22\cdot 0=124 \Rightarrow 3a_1=124 \ /:3 \Rightarrow a_1=\frac{124}{3}.$$

Članovi su:

$$a_1=\frac{124}{3},\ a_{11}=\frac{124}{3},\ a_{13}=\frac{124}{3}.$$

Umnožak tri člana bit će:

$$\frac{124}{3}\cdot\frac{124}{3}\cdot\frac{124}{3}=\left(\frac{124}{3}\right)^3.$$

Sada rješavamo sustav:

$$\left.\begin{array}{l}3a_1+22d=124\\2a_1+25d=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3a_1+22d=124 \ /\cdot(-2)\\2a_1+25d=0 \ /\cdot 3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-6a_1-44d=-248\\6a_1+75d=0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 31d = -248 \; / : 31 \Rightarrow d = -8 \Rightarrow 6a_1 + 75 \cdot (-8) = 0 \Rightarrow 6a_1 - 600 = 0 \Rightarrow a_1 = 100.$$

Sada su članovi:

$$a_1 = 100, \; a_{11} = 20, \; a_{13} = 4.$$

Traženi produkt bit će:

$$100 \cdot 20 \cdot 4 = 8\,000.$$

Vježba 012

Tri broja čiji je zbroj 28 imaju svojstvo da su tri uzastopna člana geometrijskog niza (slijeda) i istodobno drugi, četvrti i osmi član aritmetičkog niza. Nađite njihov produkt.

Rezultat: 512.

Zadatak 013 (Daria, gimnazija)

Koliki je zbroj svih brojeva između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka 1?

Rješenje 013

Prema uvjetima zadatka radi se o sljedećem nizu ili slijedu brojeva: 51, 61, 71, ... , 331, 341.
To je aritmetički niz:

$$a_1 = 51, \; d = 10, \; a_n = 341.$$

Odredimo broj članova n pomoću formule za n-ti član:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \;\; => \;\; 341 = 51 + (n - 1) \cdot 10 \;\; => \;\; 10 \cdot (n - 1) = 290 \;\; \mathbf{/ : 10} \;\; =>$$

$$n - 1 = 29 \;\; => \;\; n = 30.$$

Tada je zbroj jednak:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow s_{30} = \frac{30}{2} \cdot (51 + 341) = 15 \cdot 392 = 5880.$$

Vježba 013

Koliki je zbroj svih brojeva između 30 i 230 kojima je zadnja znamenka 3?

Rezultat: 2560.

Zadatak 014 (Marko, gimnazija)

Koliki je zbroj troznamenkastih brojeva koji su djeljivi s 15?

Rješenje 014

Traže se brojevi djeljivi s 15, veći od 99, a manji od 1000.
Najmanji troznamenkasti broj djeljiv s 15 je 105 = 7 · 15.
Najveći troznamenkasti broj djeljiv s 15 je 990 = 66 · 15.
Sada se zadatak svodi na nalaženje zbroja aritmetičkog niza zadanog elementima:

$$a_1 = 105, \; a_n = 990, \; d = 15.$$

Pomoću formule za opći član aritmetičkog niza nađemo broj članova:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{990 - 105}{15} + 1 = 60.$$

Zbroj je:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot \left[a_1 + a_n\right] \Rightarrow s_{60} = \frac{60}{2} \cdot [105 + 990] \Rightarrow 30 \cdot 1095 = 32850.$$

Vježba 014

Koliki je zbroj troznamenkastih brojeva koji su djeljivi s 13?

Rezultat: 37 674.

Zadatak 015 (Marko, gimnazija)

Koliko je troznamenkastih brojeva djeljivo s 3, a nije djeljivo sa 7?

Rješenje 015

Najprije odredimo koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih s 3. Dakle, traže se brojevi djeljivi s 3, veći od 99, a manji od 1000.

Najmanji troznamenkasti broj djeljiv s 3 je 102 = 34 · 3.
Najveći troznamenkasti broj djeljiv s 3 je 999 = 333 · 3.
Ovdje se radi o sljedećem nizu brojeva:

$$102, 105, 108, 111, \ldots, 996, 999.$$

Budući da je razlika između člana i člana pred njim stalna, niz je aritmetički:

$$a_1 = 102, \; a_n = 999, \; d = 3.$$

Broj članova niza odredimo iz formule za opći član aritmetičkog niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \;\Rightarrow\; n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{999-102}{3} + 1 = 300.$$

Napišimo nekoliko početnih i nekoliko završnih članova tog niza (slijeda):

$$102, 105, 108, 111, 114, 117, 120, 123, 126, 129, \ldots, 984, 987, 990, 993, 996, 999.$$

U napisanom nizu odredimo broj članova koji su djeljivi sa 7.
Najmanji broj djeljiv sa 7 je 105 = 15 · 7.
Najveći broj djeljiv sa 7 je 987 = 141 · 7.
Budući da je svaki sedmi član u nizu djeljiv sa 7 razlika je 21 (na primjer, 126 – 105 = 21). Tražimo broj članova sljedećeg niza:

$$105, 126, 147, 168, \ldots, 969, 987.$$

Razlika između člana i člana pred njim je stalna. Niz je aritmetički čiji je prvi član $a_1 = 105$, zadnji $a_n = 987$, razlika $d = 21$.

Broj članova niza ponovno odredimo iz formule za opći član aritmetičkog niza:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \;\Rightarrow\; n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{987-105}{21} + 1 = 43.$$

Konačno, broj troznamenkastih brojeva koji su djeljivi s 3, a nisu sa 7 je: 300 – 43 = 257.

Vježba 015

Koliko je dvoznamenkastih brojeva djeljivo s 3, a nije djeljivo sa 7?

Rezultat: 26.

Zadatak 016 (Vedrana, gimnazija)

Zbroj beskonačnog konvergentnog geometrijskog reda iznosi 15, a zbroj kvadrata njegovih članova 45. Koliko iznosi prvi član reda?

Rješenje 016

Neka je zadan geometrijski red:

$$a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \ldots .$$

Njegov zbroj iznosi:

$$\frac{a}{1-q} = 15.$$

Ako promatramo red koji se dobije od polaznog uzimajući kvadrate njegovih članova, dobivamo:

$$a^2 + a^2\cdot q^2 + a^2\cdot q^4 + a^2\cdot q^6 + \ldots .$$

Ovaj red je konvergentan jer ima količnik q^2, a kako vrijedi $|q| < 1$, to pogotovo vrijedi $|q^2| < 1$. Zbroj članova ovog reda je:

$$\frac{a^2}{1-q^2} = 45.$$

Sada je:

$$\left.\frac{a}{1-q} = 15, \quad \frac{a^2}{1-q^2} = 45\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 15\cdot(1-q) \\ a^2 = 45\cdot\left(1-q^2\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{a^2} = \frac{15\cdot(1-q)}{45\cdot\left(1-q^2\right)} \Rightarrow \frac{a}{a^2} = \frac{15\cdot(1-q)}{45\cdot(1-q)\cdot(1+q)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{3\cdot(1+q)} \Rightarrow a=3\cdot(1+q).$$

Iz sustava jednadžbi slijedi:

$$\left.\begin{matrix}\frac{a}{1-q}=15, & a=3\cdot(1+q)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a=15\cdot(1-q)\\ a=3\cdot(1+q)\end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot(1+q)=15\cdot(1-q)\ /:3 \Rightarrow 1+q=5-5q$$

$$\Rightarrow 6q=4\ /:6 \Rightarrow q=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Prvi član reda je:

$$a=3\cdot(1+q)=3\cdot\left(1+\frac{2}{3}\right)=3+2=5.$$

Vježba 016

Zbroj beskonačnog konvergentnog geometrijskog reda iznosi 2, a zbroj kvadrata njegovih članova $\frac{4}{3}$. Koliko iznosi prvi član reda?

Rezultat: 1.

Zadatak 017 (Ivana, hotelijerska škola)

Umnožak trećeg i devetog člana geometrijskog niza s pozitivnim članovima jednak je 4. Koliko iznosi umnožak prvih jedanaest članova tog niza?

Rješenje 017

Opći član geometrijskog niza (slijeda) glasi:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Umnožak trećeg i devetog člana geometrijskog niza s pozitivnim članovima jednak je 4:

$$a_1\cdot q^2\cdot a_1\cdot q^8=4 \Rightarrow a_1^2\cdot q^{10}=4\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a_1\cdot q^5=2.$$

Umnožak prvih jedanaest članova iznosi:

$$a_1\cdot a_1\cdot q\cdot a_1\cdot q^2\cdot a_1\cdot q^3\cdot a_1\cdot q^4\cdot\ldots\cdot a_1\cdot q^{10}=a_1^{11}\cdot q^{1+2+3+4+\ldots+10}=\left[1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]=$$

$$=a_1^{11}\cdot q^{55}=\left(a_1\cdot q^5\right)^{11}=2^{11}=2048.$$

Vježba 017

Umnožak trećeg i devetog člana geometrijskog niza s pozitivnim članovima jednak je 9. Koliko iznosi umnožak prvih jedanaest članova tog niza?

Rezultat: 177 147.

Zadatak 018 (Ivana, hotelijerska škola)

Niz (a_n) definiran je na sljedeći način $a_1 = -6$, $a_{n+1} = a_n + n$, n je prirodan broj. Koliko je a_{2004}?

Rješenje 018

Niz je zadan pomoću rekurzivne formule. Članovi niza zadaju se pomoću već prije definiranih članova. U rekurzivnoj formuli mora biti poznat prvi član, a ponekad je potrebno zadati više od jednog početnog člana niza. Iz zadane rekurzivne formule slijedi:

$$a_{n+1}=a_n+n \Rightarrow a_{n+1}-a_n=n.$$

Promatrajmo sljedeće jednakosti:

$$a_2-a_1=1,$$
$$a_3-a_2=2,$$
$$a_4-a_3=3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{2002} - a_{2001} = 2001,$$
$$a_{2003} - a_{2002} = 2002,$$
$$a_{2004} - a_{2003} = 2003.$$

Zbrojimo jednakosti (na lijevoj strani ponište se suprotni članovi):

$$a_{2004} - a_1 = 1 + 2 + 3 + \ \dots\ + 2001 + 2002 + 2003 \Rightarrow \left[1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{2004} = a_1 + \frac{2003 \cdot 2004}{2} \Rightarrow a_{2004} = -6 + 2003 \cdot 1002 = 2007000.$$

Vježba 018

Napiši prvih pet članova niza (a_n) ako je $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n$.

Rezultat: 1, 1, 0, – 3, – 10, ...

Zadatak 019 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je $\frac{2005 - n}{99}$ prirodan broj?

Rješenje 019

Razlomak će biti prirodan broj ako je brojnik 2005 – n djeljiv brojem 99.

Najmanja vrijednost brojnika može biti 99:

$$2005 - n = 99 \Rightarrow n = 2005 - 99 = 1906.$$

Najveća vrijednost brojnika može biti 1980 [20 · 99 = 1980, 21 · 99 = 2079]:

$$2005 - n = 1980 \Rightarrow n = 2005 - 1980 = 25.$$

Zaključujemo da najmanji prirodni broj može biti 25, a najveći 1906. Riječ je o aritmetičkom nizu: $a_1 = 25$, $a_n = 1906$, $d = 99$. Iz formule za opći član nađemo broj članova n:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow 1906 = 25 + (n-1) \cdot 99 \Rightarrow 1906 - 25 = 99n - 99 \Rightarrow 99n = 1980 \ /:99 \Rightarrow n = 20.$$

Zbroj je:

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow s_{20} = \frac{20}{2} \cdot (a_1 + a_{20}) \Rightarrow s_{20} = 10 \cdot (25 + 1906) = 19310.$$

Vježba 019

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je $\frac{10 - n}{2}$ prirodan broj?

Rezultat: 20.

Zadatak 020 (4A, hotelijerska škola)

Ako je $a_n = 2n + 3$ opći član niza dokaži da vrijedi $a_{n+2} = a_n + 4$.

Rješenje 020

Iz formule za opći član niza $a_n = 2n + 3$ proizlazi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+2} = 2 \cdot (n+2) + 3 = 2n + 4 + 3 = 2n + 7 \\ a_n + 4 = 2n + 3 + 4 = 2n + 7 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n+2} = a_n + 4.$$

Vježba 020

Ako je $a_n = 2n + 1$ opći član niza dokaži da vrijedi $a_{n+2} = a_n + 4$.

Rezultat: Točno je.