Zadatak 341 (Bolek, gimnazija)

Dokaži identitet $(1-ctg\ x)^2+(1+ctg\ x)^2=\frac{2}{\sin^2 x},\ x\neq k\cdot\pi,\ k\in Z.$

Rješenje 341

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad ctg\ x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$(1-ctg\ x)^2+(1+ctg\ x)^2=1-2\cdot ctg\ x+ctg^2 x+1+2\cdot ctg\ x+ctg^2 x=$$

$$=1-2\cdot ctg\ x+ctg^2 x+1+2\cdot ctg\ x+ctg^2 x=1+ctg^2 x+1+ctg^2 x=2+2\cdot ctg^2 x=$$

$$=2\cdot\left(1+ctg^2 x\right)=2\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=2\cdot\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=2\cdot\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Vježba 341

Dokaži identitet $(ctg\ x-1)^2+(ctg\ x+1)^2=\frac{2}{\sin^2 x},\ x\neq k\cdot\pi,\ k\in Z.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 342 (Branko, srednja škola)

Nađi maksimum funkcije $f(x)=2+2\cdot\cos x-\sin^2 x.$

Rješenje 342

Ponovimo!

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\quad,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Maksimum:

- funkcije kosinus je 1, a postiže se za $x=k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in Z$
- funkcije sinus je 1, a postiže se za $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in Z.$

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=2+2\cdot\cos x-\sin^2 x\ \Rightarrow\ f(x)=2+2\cdot\cos x-\left(1-\cos^2 x\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=2+2\cdot\cos x-1+\cos^2 x\ \Rightarrow\ f(x)=\cos^2 x+2\cdot\cos x+1\ \Rightarrow\ f(x)=(\cos x+1)^2.$$

Budući da je maksimum funkcije cos x jednak 1, maksimum zadane funkcije iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=(\cos x+1)^2\\(\cos x)_{\max}=1\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f_{\max}(x)=(1+1)^2\ \Rightarrow\ f_{\max}(x)=2^2\ \Rightarrow\ f_{\max}(x)=4.$$

Vježba 342

Nađi maksimum funkcije $f(x)=2+2\cdot\sin x-\cos^2 x$.

Rezultat: 4.

Zadatak 343 (Branimir, gimnazija)

Dokažite identitet $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}=1$.

Rješenje 343

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad 2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x.$$

Transformacija zbroja u umnožak

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \quad , \quad \sin x-\sin y=2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{(\sin\alpha-\sin\beta)\cdot(\sin\alpha+\sin\beta)}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\left(2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}=1.$$

Vježba 343

Dokažite identitet $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}=1$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 344 (Luca, maturantica)

Ako je $\dfrac{1}{tg\,x}+\dfrac{1}{ctg\,x}=3$ i $0<x<\dfrac{\pi}{4}$, onda $\cos(2\cdot x)$ iznosi:

$A.\ 1 \qquad B.\ \frac{2}{3} \qquad C.\ \frac{1}{2} \qquad D.\ \frac{\sqrt{5}}{3}$

Rješenje 344

Ponovimo!

$$tg\ x \cdot ctg\ x = 1 \Rightarrow tg\ x = \frac{1}{ctg\ x} \Rightarrow ctg\ x = \frac{1}{tg\ x} \quad , \quad tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

	I. kvadrant $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$	**II. kvadrant** $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$	**III. kvadrant** $\left\langle \pi, \frac{3 \cdot \pi}{2} \right\rangle$	**IV. kvadrant** $\left\langle \frac{3 \cdot \pi}{2}, 2 \cdot \pi \right\rangle$
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
ctg	+	—	+	—

$$\frac{1}{tg\ x} + \frac{1}{ctg\ x} = 3 \Rightarrow ctg\ x + tg\ x = 3 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{razlomak} \\ \text{proširimo s } 2 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{2}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = 3 \Rightarrow \frac{2}{\sin(2 \cdot x)} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin(2 \cdot x)} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sin(2 \cdot x)}{2} = \frac{1}{3} \ / \cdot 2 \Rightarrow \sin(2 \cdot x) = \frac{2}{3}.$$

Sada računamo cos (2 · x).

$$\cos^2(2 \cdot x) + \sin^2(2 \cdot x) = 1 \Rightarrow \cos^2(2 \cdot x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2(2 \cdot x) + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2(2 \cdot x) = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2(2 \cdot x) = \frac{1}{1} - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2(2 \cdot x) = \frac{9-4}{9} \Rightarrow \cos^2(2 \cdot x) = \frac{5}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2(2 \cdot x) = \frac{5}{9} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \cos(2 \cdot x) = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ 0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2 \cdot x < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2 \cdot x) > 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2 \cdot x) = \sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \cos(2 \cdot x) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} \Rightarrow \cos(2 \cdot x) = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 344

$$\text{Ako je } \frac{1}{tg\,x}+\frac{1}{ctg\,x}=3 \text{ i } 0<x<\frac{\pi}{4}, \text{ onda } \sin(2\cdot x) \text{ iznosi?}$$

$$A.\ 1 \qquad B.\ \frac{2}{3} \qquad C.\ \frac{1}{2} \qquad D.\ \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Rezultat: B.

Zadatak 345 (Luca, maturantica)

Koliko realnih rješenja ima jednadžba $\sin x=\log x$?

$$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ beskonačno \qquad D.\ 9$$

Rješenje 345

Ponovimo!

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x=\log x.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

To je točka u kojoj graf funkcije siječe os x. Ordinate te točke jednaka je nuli, y = 0.

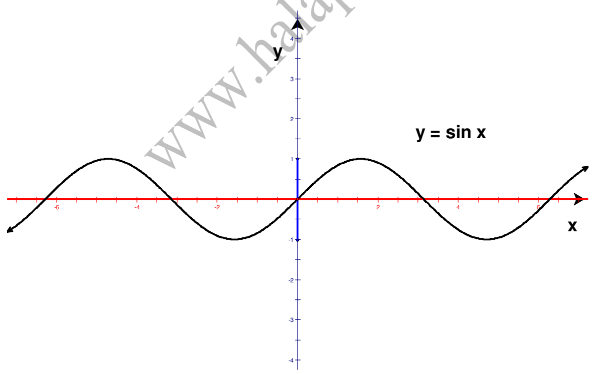
Graf funkcije f(x) = sin x

Domena funkcije f

$D_f=\langle -\infty, +\infty\rangle$

Slika funkcije f

$R_f=[-1, 1]$



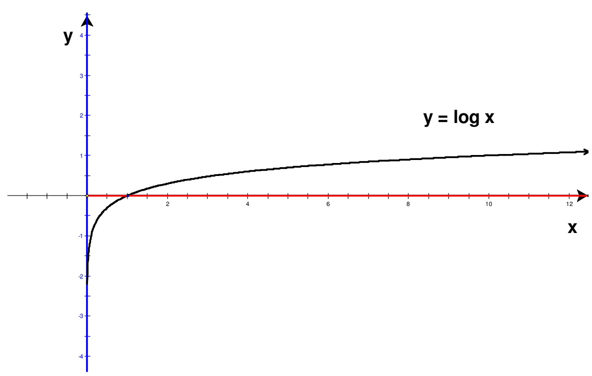
Graf funkcije f(x) = log x

Domena funkcije f

$D_f=\langle 0, +\infty\rangle$

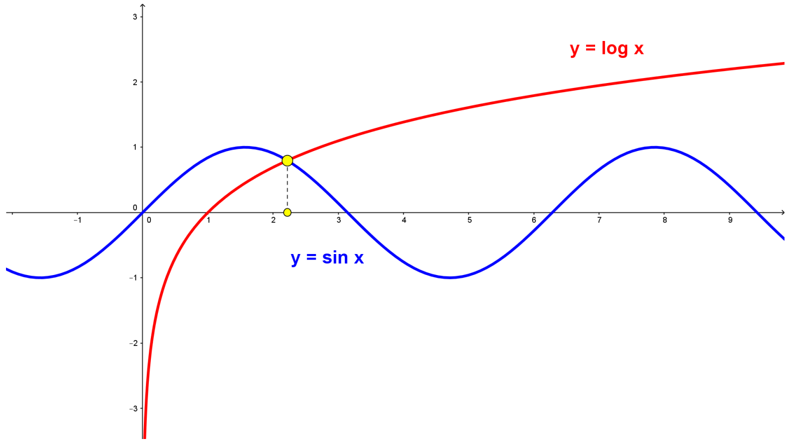
Slika funkcije f

$R_f=\langle -\infty, +\infty\rangle$



1.inačica

Skiciramo grafove funkcija f(x) = sin x i g(x) = log x i prebrojimo njihova sjecišta.



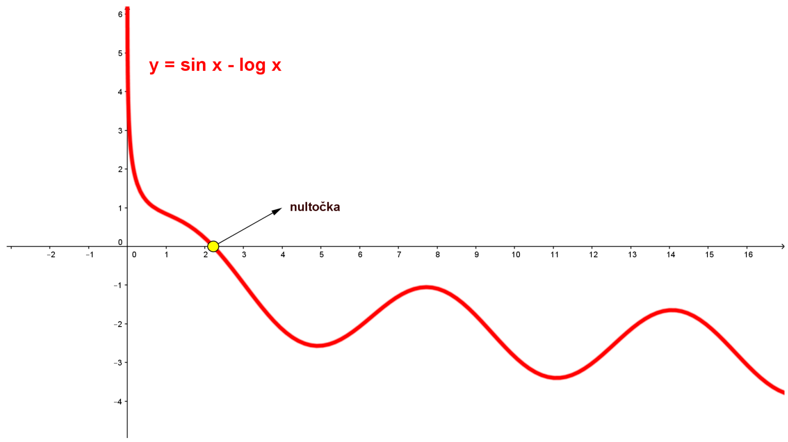
Jednadžba sin x = log x ima jedno realno rješenje.
Odgovor je pod A.

2.inačica

Preoblikujemo polaznu jednadžbu.

$$\sin x = \log x \;\; \Rightarrow \;\; \sin x - \log x = 0.$$

Skiciramo graf funkcije f(x) = sin x – log x i odredimo broj nultočaka.



Postoji jedna nultočka.
Odgovor je pod A.

Vježba 345

Koliko realnih rješenja ima jednadžba $\cos x = \log x$?

$$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ beskonačno \qquad D.\ 9$$

Rezultat: A.

Zadatak 346 (Danijel, gimnazija)

Ako su x, y i z pozitivni brojevi te tg x = 1.5, tg y = 5 i x + y + z = π, koliko je tg z?

Rješenje 346

Ponovimo!

$$tg\left(\pi-\alpha\right)=-tg\,\alpha \quad , \quad tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$x+y+z=\pi\ \Rightarrow\ z=\pi-(x+y)\ \Rightarrow\ tg\,z=tg\,(\pi-(x+y))\ \Rightarrow\ tg\,z=-tg\,(x+y)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg\,z=-\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} tg\,x=1.5 \\ tg\,y=5 \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ tg\,z=-\frac{1.5+5}{1-1.5\cdot 5}\ \Rightarrow\ tg\,z=-\frac{6.5}{1-7.5}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg\,z=-\frac{6.5}{-6.5}\ \Rightarrow\ tg\,z=\frac{6.5}{6.5}\ \Rightarrow\ tg\,z=\frac{6.5}{6.5}\ \Rightarrow\ tg\,z=1.$$

Vježba 346

Ako su x, y i z pozitivni brojevi te tg y = 1.5, tg z = 5 i x + y + z = π, koliko je tg x?

Rezultat: 1.

Zadatak 347 (Dora, gimnazija)

Ako je $m=tg\,x+\sin x$ i $n=tg\,x-\sin x$, koliko je $A=\frac{m-n}{m+n}$?

Rješenje 347

Ponovimo!

$$tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad ,\quad n=\frac{n}{1}\quad ,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$A=\frac{m-n}{m+n}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} m=tg\,x+\sin x \\ n=tg\,x-\sin x \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ A=\frac{tg\,x+\sin x-(tg\,x-\sin x)}{tg\,x+\sin x+tg\,x-\sin x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A=\frac{tg\,x+\sin x-tg\,x+\sin x}{tg\,x+\sin x+tg\,x-\sin x}\ \Rightarrow\ A=\frac{tg\,x+\sin x-tg\,x+\sin x}{tg\,x+\sin x+tg\,x-\sin x}\ \Rightarrow\ A=\frac{\sin x+\sin x}{tg\,x+tg\,x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A=\frac{2\cdot\sin x}{2\cdot tg\,x}\ \Rightarrow\ A=\frac{2\cdot\sin x}{2\cdot tg\,x}\ \Rightarrow\ A=\frac{\sin x}{tg\,x}\ \Rightarrow\ A=\frac{\frac{\sin x}{1}}{\frac{\sin x}{\cos x}}\ \Rightarrow\ A=\frac{\frac{\sin x}{1}}{\frac{\sin x}{\cos x}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{\cos x}}\ \Rightarrow\ A=\cos x.$$

Vježba 347

Ako je $m=tg\,x+\sin x$ i $n=tg\,x-\sin x$, koliko je $A=\frac{m+n}{m-n}$?

Rezultat: $\frac{1}{\cos x}$.

Zadatak 348 (Max, gimnazija)

Udaljenost svake dvije susjedne nultočke funkcije $f(x)=a\cdot\sin bx\cdot\cos bx$ jednaka je $\frac{3\cdot\pi}{4}$.

Tada je:

$$A.\ b=\frac{1}{3}\qquad B.\ b=\frac{3}{4}\qquad C.\ b=\frac{2}{3}\qquad D.\ b=\frac{3}{2}$$

Rješenje 348

Ponovimo!

$$b\cdot\frac{a}{b}=a\quad,\quad 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Trigonometrijska jednadžba $\sin x=a\ ,\ |a|\leq 1$

Skup rješenja jednadžbe $\sin x=a,\ |a|\leq 1,$ je $\{x_0+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\}\cup\{\pi-x_0+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\}$

gdje je $x_0\in R$ jedno rješenje te jednadžbe.

$$\sin x=\sin x_0\ \Rightarrow\ x=x_0.$$

Ako za funkciju $f: D_f\to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P)=f(x),$$

za svaki $x\in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodičnom funkcijom. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi f(x + P) = f(x) nazivaju se periode funkcije f. Ako postoji najmanji pozitivan broj P, tada se taj P naziva **temeljna perioda**. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljna perioda za sinus je 2π.

$$\sin(x+2\cdot\pi)=\sin x.$$

$$\sin(x+k\cdot 2\cdot\pi)=\sin x\ ,\ k\in Z.$$

Temeljna perioda funkcije $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)$ dana je izrazom

$$P=\frac{2\cdot\pi}{|b|}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=a\cdot\sin bx\cdot\cos bx \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{a}{2}\cdot 2\cdot\sin bx\cdot\cos bx \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{a}{2}\cdot\sin(2\cdot b\cdot x).$$

Tražimo nultočke.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{a}{2}\cdot\sin(2\cdot b\cdot x) \\ f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2}\cdot\sin(2\cdot b\cdot x)=0 \;\Rightarrow\; \sin(2\cdot b\cdot x)=0 \;\Rightarrow\; 2\cdot b\cdot x=k\cdot\pi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot b\cdot x=k\cdot\pi \;/\cdot\frac{1}{2\cdot b} \;\Rightarrow\; x=\frac{k\cdot\pi}{2\cdot b}\;,\;\; k\in Z.$$

Odredimo dvije susjedne nultočke, na primjer, za k = 0 i k = 1.

- $$\left.\begin{array}{l} k=0 \\ x=\frac{k\cdot\pi}{2\cdot b} \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{0\cdot\pi}{2\cdot b} \;\Rightarrow\; x=\frac{0}{2\cdot b} \;\Rightarrow\; x_1=0$$
- $$\left.\begin{array}{l} k=1 \\ x=\frac{k\cdot\pi}{2\cdot b} \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1\cdot\pi}{2\cdot b} \;\Rightarrow\; x_2=\frac{\pi}{2\cdot b}.$$

Budući da je udaljenost svake dvije susjedne nultočke jednaka $\frac{3\cdot\pi}{4}$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_2-x_1=\frac{\pi}{2\cdot b}-0 \\ x_2-x_1=\frac{3\cdot\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2-x_1=\frac{\pi}{2\cdot b} \\ x_2-x_1=\frac{3\cdot\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi}{2\cdot b}=\frac{3\cdot\pi}{4} \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{2\cdot b}=\frac{3\cdot\pi}{4} \;/\cdot 4\cdot b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot\pi=3\cdot b\cdot\pi \;\Rightarrow\; 3\cdot b\cdot\pi=2\cdot\pi \;\Rightarrow\; 3\cdot b\cdot\pi=2\cdot\pi \;/\cdot\frac{1}{3\cdot\pi} \;\Rightarrow\; b=\frac{2}{3}.$$

Odgovor je pod C.

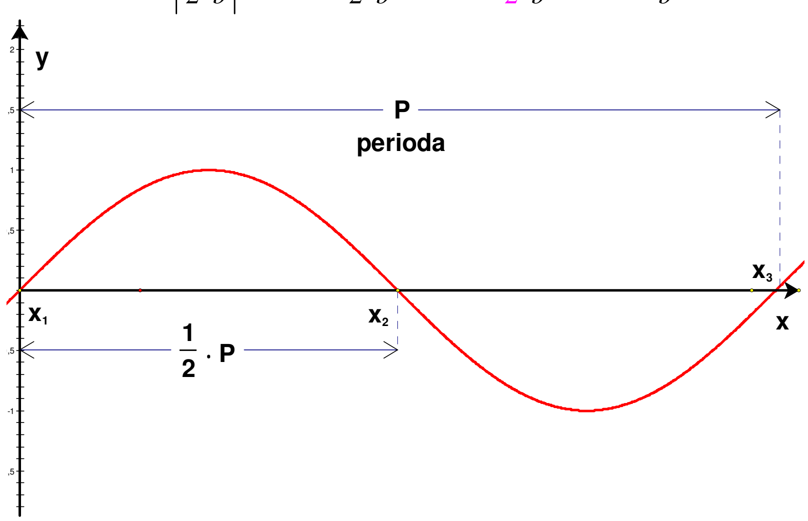
2.inačica

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=a\cdot\sin bx\cdot\cos bx \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{a}{2}\cdot 2\cdot\sin bx\cdot\cos bx \;\Rightarrow\; f(x)=\frac{a}{2}\cdot\sin(2\cdot b\cdot x).$$

Njezina je perioda

$$P=\frac{2\cdot\pi}{|2\cdot b|} \;\Rightarrow\; P=\frac{2\cdot\pi}{2\cdot b} \;\Rightarrow\; P=\frac{2\cdot\pi}{2\cdot b} \;\Rightarrow\; P=\frac{\pi}{b}.$$



Budući da je između dvije susjedne nultočke udaljenost jednaka $\frac{1}{2}\cdot P,$ slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 = \frac{1}{2}\cdot P \\ x_2 - x_1 = \frac{3\cdot\pi}{4} \text{ uvjet} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P = \frac{\pi}{b}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{b} \\ x_2 - x_1 = \frac{3\cdot\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2\cdot b} \\ x_2 - x_1 = \frac{3\cdot\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2\cdot b} = \frac{3\cdot\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2\cdot b} = \frac{3\cdot\pi}{4} \; /\cdot 4\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\pi = 3\cdot b\cdot\pi \Rightarrow 3\cdot b\cdot\pi = 2\cdot\pi \Rightarrow 3\cdot b\cdot\pi = 2\cdot\pi \; /\cdot\frac{1}{3\cdot\pi} \Rightarrow b = \frac{2}{3}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 348

Udaljenost svake dvije susjedne nultočke funkcije $f(x) = a\cdot\sin bx\cdot\cos bx$ jednaka je $\frac{3\cdot\pi}{2}.$

Tada je:

$$A.\ b = \frac{1}{3} \qquad B.\ b = \frac{3}{4} \qquad C.\ b = \frac{2}{3} \qquad D.\ b = \frac{3}{2}$$

Rezultat: A.

Zadatak 349 (Sanja, srednja škola)

Ako je $f(x) = \sin x,$ dokazati da je $f(2x) = 2\cdot f(x)\cdot\sqrt{1 - f^2(x)}.$

Rješenje 349

Ponovimo!

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

$$f(2x) = \sin 2x \Rightarrow f(2x) = 2\cdot\sin x\cdot\cos x \Rightarrow f(2x) = 2\cdot\sin x\cdot\sqrt{1-\sin^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(x) = \sin x] \Rightarrow f(2x) = 2\cdot f(x)\cdot\sqrt{1-f^2(x)}.$$

Dokaz gotov.

Vježba 349

Ako je $f(x) = \cos x,$ dokazati da je $f(2x) = 2\cdot f(x)\cdot\sqrt{1 - f^2(x)}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 350 (Marko, gimnazija)

Ako je $tg\,\alpha + ctg\,\alpha = \sqrt{3},$ koliko je $tg^4\alpha + ctg^4\alpha$?

Rješenje 350

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad tg\,x\cdot ctg\,x = 1 \quad , \quad a^1 = a.$$

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad tg^n x\cdot ctg^n x = 1.$$

$$tg\,\alpha + ctg\,\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu}\end{array}\right] \Rightarrow tg\,\alpha + ctg\,\alpha = \sqrt{3} \; /^2 \Rightarrow (tg\,\alpha + ctg\,\alpha)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2\alpha+2\cdot tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha+ctg^2\alpha=3\ \Rightarrow\ tg^2\alpha+2\cdot 1+ctg^2\alpha=3\ \Rightarrow\ tg^2\alpha+2+ctg^2\alpha=3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2\alpha+ctg^2\alpha=3-2\ \Rightarrow\ tg^2\alpha+ctg^2\alpha=1\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{kvadriramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2\alpha+ctg^2\alpha=1\ /^2\ \Rightarrow\ \left(tg^2\alpha+ctg^2\alpha\right)^2=1^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(tg^2\alpha\right)^2+2\cdot tg^2\alpha\cdot ctg^2\alpha+\left(ctg^2\alpha\right)^2=1\ \Rightarrow\ tg^4\alpha+2\cdot 1+ctg^4\alpha=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^4\alpha+2+ctg^4\alpha=1\ \Rightarrow\ tg^4\alpha+ctg^4\alpha=1-2\ \Rightarrow\ tg^4\alpha+ctg^4\alpha=-1.$$

Vježba 350

Ako je $tg\,\alpha+ctg\,\alpha=2,$ koliko je $tg^4\alpha+ctg^4\alpha$?

Rezultat: 2.

Zadatak 351 (Domagoj, gimnazija)

Dokaži identitet: $\sin^3 x\cdot(1+ctg\,x)+\cos^3 x\cdot(1+tg\,x)=\sin x+\cos x.$

Rješenje 351

Ponovimo!

$$ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}\quad,\quad tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad,\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1\quad,\quad a^1=a.$$

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\quad,\quad n=\frac{n}{1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

$$\sin^3 x\cdot(1+ctg\,x)+\cos^3 x\cdot(1+tg\,x)=\sin^3 x+\sin^3 x\cdot ctg\,x+\cos^3 x+\cos^3 x\cdot tg\,x=$$

$$=\sin^3 x+\sin^3 x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}+\cos^3 x+\cos^3 x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sin^3 x+\sin^3 x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}+\cos^3 x+\cos^3 x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=$$

$$=\sin^3 x+\sin^2 x\cdot\cos x+\cos^3 x+\cos^2 x\cdot\sin x=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=$$

$$=\left(\sin^3 x+\sin^2 x\cdot\cos x\right)+\left(\cos^3 x+\cos^2 x\cdot\sin x\right)=\sin^2 x\cdot(\sin x+\cos x)+\cos^2 x\cdot(\cos x+\sin x)=$$

$$=\sin^2 x\cdot(\sin x+\cos x)+\cos^2 x\cdot(\sin x+\cos x)=(\sin x+\cos x)\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=$$

$$=(\sin x+\cos x)\cdot 1=\sin x+\cos x.$$

2.inačica

$$\sin^3 x\cdot(1+ctg\,x)+\cos^3 x\cdot(1+tg\,x)=\sin^3 x\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)+\cos^3 x\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$= \sin^3 x \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} + \cos^3 x \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} = \sin^3 x \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} + \cos^3 x \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} =$$

$$= \sin^2 x \cdot (\sin x + \cos x) + \cos^2 x \cdot (\cos x + \sin x) = \sin^2 x \cdot (\sin x + \cos x) + \cos^2 x \cdot (\sin x + \cos x) =$$

$$= (\sin x + \cos x) \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = (\sin x + \cos x) \cdot 1 = \sin x + \cos x.$$

Vježba 351

Dokaži identitet: $\sin^3 x \cdot (1 + ctg\, x) - \sin x + \cos^3 x \cdot (1 + tg\, x) - \cos x = 0.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 352 (DM, gimnazija)

Vrijednost izraza $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2$ je jednaka:

$A.\ -1 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ -2 \qquad D.\ 2$

Rješenje 352

Ponovimo!

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad , \quad \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right].$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = \frac{1 + \cos(2 \cdot 3)}{2} + \frac{1 + \cos(2 \cdot 1)}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(4 + 2) + \cos(4 - 2)\right] =$$

$$= \frac{1 + \cos 6}{2} + \frac{1 + \cos 2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left[\cos 6 + \cos 2\right] = \frac{1 + \cos 6}{2} + \frac{1 + \cos 2}{2} - \frac{\cos 6}{2} - \frac{\cos 2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 6 + 1 + \cos 2 - \cos 6 - \cos 2) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 6 + 1 + \cos 2 - \cos 6 - \cos 2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 352

Vrijednost izraza $\cos 4 \cdot \cos 2 - \cos^2 3 - \cos^2 1$ je jednaka:

$A.\ -1 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ -2 \qquad D.\ 2$

Rezultat: A.

Zadatak 353 (Ante, gimnazija)

Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $tg\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{3}\right) = tg\, \frac{\pi}{3}$ na intervalu $[\,0,\ \pi\,]$?

$A.\ \frac{7 \cdot \pi}{6} \qquad B.\ \frac{5 \cdot \pi}{3} \qquad C.\ \frac{19 \cdot \pi}{6} \qquad D.\ \frac{13 \cdot \pi}{3}$

Rješenje 353

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\le b \;,\; c\in R \;\Rightarrow\; a+c\le b+c.$$

$$a\le b \;,\; c>0 \;\Rightarrow\; a\cdot c\le b\cdot c \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\ne 0 \;,\; n\ne 1.$$

Cijelim brojevima zovemo skup brojeva $\{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, tj. skup koji uključuje prirodne brojeve, nulu i negativne cijele brojeve. Skup cijelih brojeva u matematici označavamo velikim slovom Z.

$$Z=\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Trigonometrijska jednadžba tg x = tg a, $a\in R$
Skup rješenja jednadžbe

$$tg\; x=tg\; a \;,\; a\in R$$

je

$$\{a+k\cdot\pi \;,\; k\in Z\}.$$

$$tg\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\cdot x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi \Rightarrow 2\cdot x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi \Rightarrow 2\cdot x=\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi \;/\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2} \;,\; k\in Z.$$

Moramo odrediti vrijednosti cijeloga broja k za koje su pripadna rješenja x elementi segmenta $[0, \pi]$, tj. za koje vrijednosti cijeloga broja k pripadno rješenje x zadovoljava nejednadžbu:

$$x\in[0, \pi] \Rightarrow \frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}\in[0, \pi] \Rightarrow 0\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}\le\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}\le\pi \;/-\frac{\pi}{3} \Rightarrow 0-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\le\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{1}-\frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{3}\le k\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{3\cdot\pi-\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{3}\le k\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{2\cdot\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{3}\le k\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{2\cdot\pi}{3} \;/\cdot\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\frac{2}{3}\le k\le\frac{4}{3} \Rightarrow k\in\left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right].$$

Prema pretpostavci k je cijeli broj pa zaključujemo da u dobivenom segmentu postoje točno dva cijela broja: k = 0 i k = 1.
Rješenja jednadžbe su:

$$x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} k=0 \\ k=1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{\pi}{3}+0\cdot\frac{\pi}{2} \\ x_2=\frac{\pi}{3}+1\cdot\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{\pi}{3}+0 \\ x_2=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{\pi}{3} \\ x_2=\frac{2\cdot\pi+3\cdot\pi}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{\pi}{3} \\ x_2=\frac{5\cdot\pi}{6} \end{matrix}\right\}.$$

Zbroj rješenja iznosi:

$$x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{5 \cdot \pi}{6} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2 \cdot \pi + 5 \cdot \pi}{6} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{6}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 353

Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $tg\left(2 \cdot x - \frac{\pi}{3}\right) = tg\frac{\pi}{3}$ na intervalu $[\pi, 2 \cdot \pi]$?

$$A. \frac{15 \cdot \pi}{6} \qquad B. \frac{17 \cdot \pi}{3} \qquad C. \frac{19 \cdot \pi}{6} \qquad D. \frac{13 \cdot \pi}{3}$$

Rezultat: C.

Zadatak 354 (Vesna, gimnazija)

Riješi nejednadžbu $-2 \cdot \sin t \ge \sqrt{3}.$

Rješenje 354

Ponovimo!

$$a \ge b \ , \ c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Trigonometrijska jednadžba $\sin x = a \ , \ |a| \le 1$

Skup rješenja jednadžbe $\sin x = a, \ |a| \le 1,$ je $\{x_0 + k \cdot 2 \cdot \pi : k \in Z\} \cup \{\pi - x_0 + k \cdot 2 \cdot \pi : k \in Z\}$

gdje je $x_0 \in R$ jedno rješenje te jednadžbe.

$$\sin x = \sin x_0 \Rightarrow x = x_0.$$

Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljna perioda za sinus je 2π.

$$\sin(x + 2 \cdot \pi) = \sin x.$$

$$\sin(x + k \cdot 2 \cdot \pi) = \sin x \ , \ k \in Z.$$

Cijelim brojevima zovemo skup brojeva $\{... -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, tj. skup koji uključuje prirodne brojeve, nulu i negativne cijele brojeve. Skup cijelih brojeva u matematici označavamo velikim slovom Z.

$$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A i sve elemente koji se nalaze u skupu B. Označavamo ga $A \cup B$.

Interval je skup realnih brojeva koji se nalaze između dva zadana broja, pri čemu je prvi broj manji od drugoga. Ta dva broja nazivaju se granice intervala.

Interval

$$\langle 3, 9 \rangle$$

opisuje skup realnih brojeva između 3 i 9, bez tih brojeva.

Interval (segment)

$$[3, 9]$$

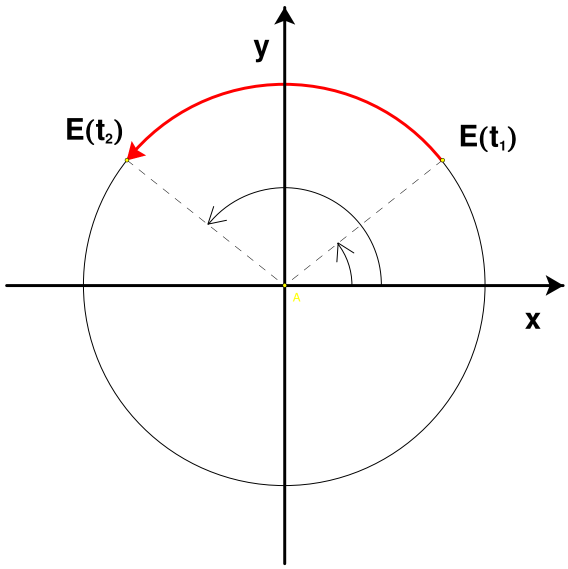
opisuje skup realnih brojeva između 3 i 9, uključujući i 3 i 9.

Kružnica kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava,a polumjer r = 1 naziva se brojevna kružnica, jedinična kružnica ili trigonometrijska kružnica. Odredimo obilazak kružnice suprotno smjeru vrtnje kazaljke na satu za pozitivnu orijentaciju. Dvije točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ na jediničnoj kružnici određuju dva osnovna intervala

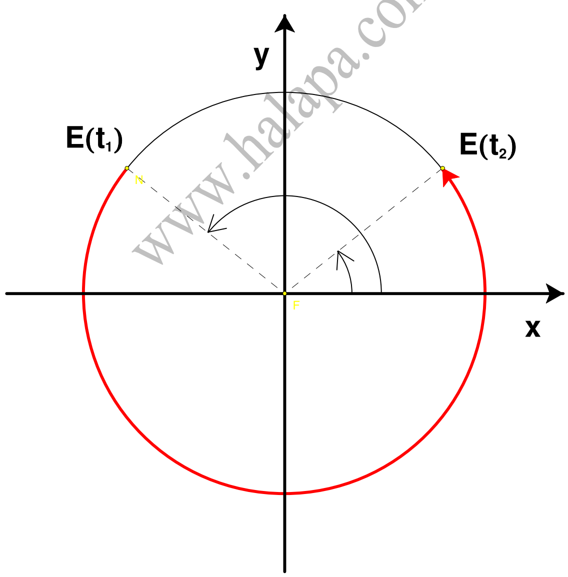
$$\langle t_1, t_2 \rangle \text{ i } \langle t_2, t_1 \rangle.$$

Dogovorno se uzima da je početna (lijeva) granica intervala manja od završne (desne) granice, tj. da vrijedi

$$t_1 < t_2.$$



Ako je početna granica t_1 intervala veća od završne granice t_2 početnoj granici t_1 dodamo $-2 \cdot \pi$ pa interval glasi:



$$\left\langle t_1 - 2 \cdot \pi,\ t_2 \right\rangle.$$

Nacrtamo trigonometrijsku kružnicu i pravac $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On određuje dvije točke na kružnici koje dobijemo kao rješenja trigonometrijske jednadžbe

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prvo rješenje:

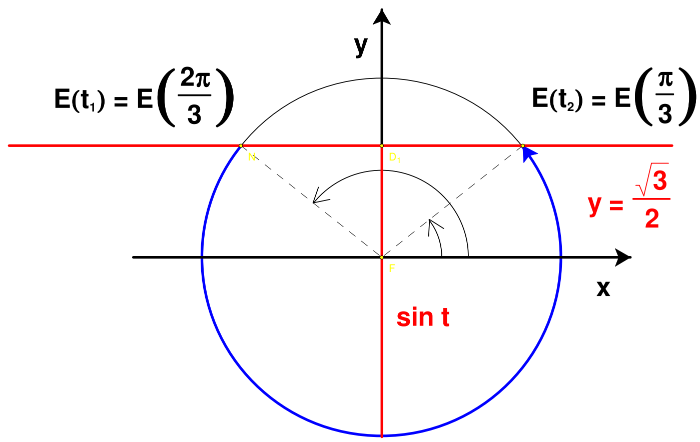
$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; t = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi}{3}.$$

Drugo rješenje:

$$t=\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{\pi}{1}-\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{3\cdot\pi-\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{2\cdot\pi}{3}.$$

Na brojevnoj kružnici istaknemo onaj dio luka za koji je

$$\sin t \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Na slici je taj luk podebljan plavom bojom. Sa slike uočimo da je početna granica $t_1=\frac{2\cdot\pi}{3}$ intervala veća od završne granice $t_2=\frac{\pi}{3}$. Zato početnoj granici t_1 dodamo $-2\cdot\pi$.

$$t_1=\frac{2\cdot\pi}{3}-2\cdot\pi \Rightarrow t_1=\frac{2\cdot\pi}{3}-\frac{2\cdot\pi}{1} \Rightarrow t_1=\frac{2\cdot\pi-6\cdot\pi}{3} \Rightarrow t_1=-\frac{4\cdot\pi}{3}.$$

Rješenje nejednadžbe je

$$t\in\left[-\frac{4\cdot\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right].$$

Zbog periodičnosti funkcije sinus opće rješenje glasi:

$$t\in\bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{4\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi, \frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\right].$$

Vježba 354

Riješi nejednadžbu $2\cdot\sin t-\sqrt{3}\le 0.$

Rezultat: $t\in\bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{4\cdot\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi, \frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi\right].$

Zadatak 355 (Ivan, gimnazija)

Bez uporabe računala dokažimo: cos 80° + cos 40° = cos 20°.

Rješenje 355

Ponovimo!

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\quad,\quad \cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\quad,\quad \sin 30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Komplementni su oni kutovi kojima je zbroj kutova 90°.

$$\alpha+\beta=90^\circ.$$

Formule redukcije

Funkcija kuta jednaka je kofunkciji komplementnog kuta.

$$\sin\alpha=\cos\left(90^\circ-\alpha\right)\quad ,\quad \cos\alpha=\sin\left(90^\circ-\alpha\right).$$

1.inačica

Preoblikujemo lijevu stranu jednakosti da bismo dobili izraz na desnoj strani.

$$\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=2\cdot\cos\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cdot\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2}=2\cdot\cos\frac{120^\circ}{2}\cdot\cos\frac{40^\circ}{2}=$$

$$=2\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 20^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ=\cos 20^\circ.$$

2.inačica

$$\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=\cos 20^\circ\ \Rightarrow\ \cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\cos 80^\circ+\cos 40^\circ\right)-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow\ 2\cdot\cos\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\cdot\cos\frac{80^\circ-40^\circ}{2}-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\cos\frac{120^\circ}{2}\cdot\cos\frac{40^\circ}{2}-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow\ 2\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow\ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow\ \cos 20^\circ-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow\ 0=0.$$

3.inačica

$$\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=\cos 20^\circ\ \Rightarrow\ \cos 80^\circ+\cos 40^\circ-\cos 20^\circ=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos 80^\circ+\left(\cos 40^\circ-\cos 20^\circ\right)=0\ \Rightarrow\ \cos 80^\circ-2\cdot\sin\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\cdot\sin\frac{40^\circ-20^\circ}{2}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos 80^\circ-2\cdot\sin\frac{60^\circ}{2}\cdot\sin\frac{20^\circ}{2}=0\ \Rightarrow\ \cos 80^\circ-2\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 10^\circ=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos 80^\circ-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 10^\circ=0\ \Rightarrow\ \cos 80^\circ-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 10^\circ=0\ \Rightarrow\ \cos 80^\circ-\sin 10^\circ=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos 80^\circ-\cos 80^\circ=0\ \Rightarrow\ \cos 80^\circ-\cos 80^\circ=0\ \Rightarrow\ 0=0.$$

Vježba 355

Bez uporabe računala dokažimo: cos 80° + cos 40° – sin 70° = 0.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 356 (Marko, gimnazija)

Dokaži da za sve realne brojeve x vrijedi $\sin x\cdot\cos x\le\frac{1}{2}.$

Rješenje 356

Ponovimo!

$$a\le b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c\le b\cdot c\quad,\quad\cos^2 x+\sin^2 x=1\quad,\quad a\le b\ \Rightarrow\ b\ge a.$$

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R.$$

$$\sin x\cdot\cos x\le\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \sin x\cdot\cos x\le\frac{1}{2}\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ 2\cdot\sin x\cdot\cos x\le 1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\cos^2 x+\sin^2 x=1\right]\Rightarrow\ 2\cdot\sin x\cdot\cos x\le\cos^2 x+\sin^2 x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos^2 x+\sin^2 x\ge 2\cdot\sin x\cdot\cos x\ \Rightarrow\ \cos^2 x-2\cdot\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x\ge 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (\cos x-\sin x)^2\ge 0.$$

Vježba 356

Dokaži da za sve realne brojeve x vrijedi $\sin x\cdot\cos x-\frac{1}{2}\le 0.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 357 (4A, 4B, TUPŠ)

Riješite jednadžbu $\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$

Rješenje 357

Ponovimo!

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\quad,\quad\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

Trigonometrijska jednadžba $\sin x=a\ ,\ |a|\le 1$

Skup rješenja jednadžbe $\sin x=a,\ |a|\le 1,$ je $\left\{x_0+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\right\}\cup\left\{\pi-x_0+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\right\}$

gdje je $x_0\in R$ jedno rješenje te jednadžbe.

$$\sin x=\sin x_0\ \Rightarrow\ x=x_0.$$

$$\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \sin^2 x-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \sin^2 x-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \sin^2 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin^2 x=\frac{3+1}{4}\ \Rightarrow\ \sin^2 x=\frac{4}{4}\ \Rightarrow\ \sin^2 x=\frac{4}{4}\ \Rightarrow\ \sin^2 x=1\ \Rightarrow\ \sin^2 x=1\ /\sqrt{}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{1} \;\Rightarrow\; \sin x = \pm 1 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \sin^{-1} 1 \\ x_2 = \sin^{-1}(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi,\; k \in Z \\ x_2 = \dfrac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi,\; k \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\; k \in Z.$$

Vježba 357

Riješite jednadžbu $(2 \cdot \sin x - 1) \cdot (2 \cdot \sin x + 1) = 3.$

Rezultat: $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\; k \in Z.$

Zadatak 358 (4A, 4B, TUPŠ)

Zadan je izraz $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$. Pojednostavnite ga i napišite uz pomoć a ako je a = tg x.

Rješenje 358

Ponovimo!

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \ne 0 \;,\; n \ne 1.$$

1.inačica

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + 1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 =$$

$$= 2 \cdot tg^2 x = \left[\, a = tg\, x \,\right] = 2 \cdot a^2.$$

2.inačica

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 2 \cdot tg^2 x = \left[\, a = tg\, x \,\right] = 2 \cdot a^2.$$

3.inačica

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + 1 + tg^2 x =$$

$$= tg^2 x - 1 + 1 + tg^2 x = tg^2 x - 1 + 1 + tg^2 x = tg^2 x + tg^2 x = 2 \cdot tg^2 x = \left[\, a = tg\, x \,\right] = 2 \cdot a^2.$$

Vježba 358

Zadan je izraz $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x + 1}$. Pojednostavnite ga i napišite uz pomoć a ako je a = tg x.

Rezultat: $\frac{1}{2 \cdot a^2}$.

Zadatak 359 (Anita, gimnazija)

Istraživanje je pokazalo da se broj jedinka neke životinjske vrste periodički mijenja. Broj jedinka f(t) procjenjuje se prema formuli $f(t) = A \cdot \sin\left(B \cdot t - \frac{7 \cdot \pi}{4}\right) + D$ gdje je t broj godina proteklih od početka mjerenja. Najmanje jedinka te životinjske vrste bilo je 5 godina nakon početka mjerenja kada je prebrojano 300 jedinka. Nakon toga broj jedinka je rastao u iduće 4 godine te je najviše jedinka te životinjske vrste bilo 9 godina nakon početka mjerenja kada je prebrojano 920 jedinka. Koliki će prema toj procjeni biti broj jedinka te životinjske vrste 18 godina nakon početka mjerenja?

$A.\ 680 \qquad B.\ 750 \qquad C.\ 830 \qquad D.\ 910$

Rješenje 359

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Ako za funkciju $f : D_f \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P) = f(x),$$

za svaki $x \in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodičnom funkcijom. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi f(x + P) = f(x) nazivaju se periode funkcije f. Ako postoji najmanji pozitivan broj P, tada se taj P naziva temeljna perioda. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljna perioda za sinus je 2π.

$$\sin(x + 2 \cdot \pi) = \sin x.$$

$$\sin(x + k \cdot 2 \cdot \pi) = \sin x \ , \ k \in Z.$$

Temeljna perioda funkcije $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ dana je izrazom

$$P = \frac{2 \cdot \pi}{|b|}.$$

Funkcija sinus:

- ima najveću vrijednost (maksimum) jednaku **1**
- ima najmanju vrijednost (minimum) jednaku **– 1**.

Minimalna vrijednost funkcije sinus jednaka je – 1 pa zadana funkcija f ima najmanju vrijednost

$$f_m = A \cdot (-1) + D \Rightarrow f_m = -A + D.$$

Maksimalna vrijednost funkcije sinus jednaka je 1 pa zadana funkcija f ima najveću vrijednost

$$f_M = A \cdot 1 + D \Rightarrow f_M = A + D.$$

Prema uvjetima u zadatku možemo napisati sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice A i D.

$$\left.\begin{array}{l} f_m = -A + D \\ f_M = A + D \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ f_m = 300 \;\;,\;\; f_M = 920 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 300 = -A + D \\ 920 = A + D \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -A + D = 300 \\ A + D = 920 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot D = 1220 \Rightarrow 2 \cdot D = 1220 \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 610.$$

Računamo A.

$$\left.\begin{array}{l} A + D = 920 \\ D = 610 \end{array}\right\} \Rightarrow A + 610 = 920 \Rightarrow A = 920 - 610 \Rightarrow A = 310.$$

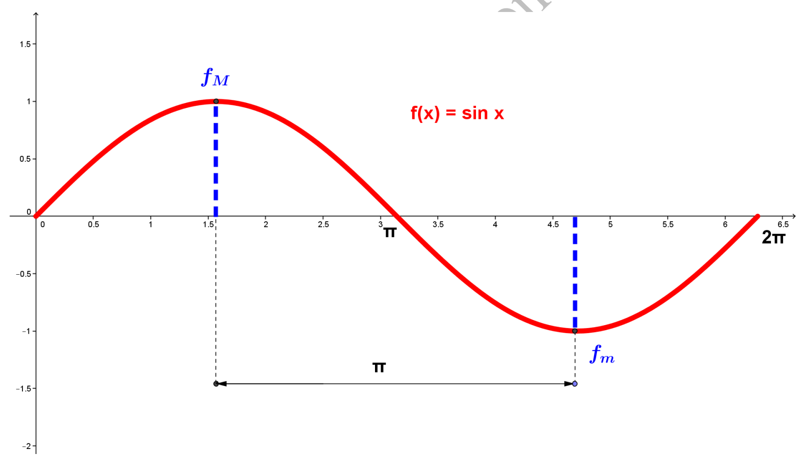
Nepotpun izraz zadane funkcije f glasi:

$$f(t) = 310 \cdot \sin\left(B \cdot t - \frac{7 \cdot \pi}{4}\right) + 610.$$

Potrebno je još izračunati koeficijent B.
Zadana funkcija f ima temeljnu periodu danu izrazom

$$P = \frac{2 \cdot \pi}{|B|} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot \pi}{B}.$$

Uočimo da je temeljna perioda funkcije sinus jednaka 2 ·π, a perioda između maksimuma i susjednog minimuma iznosi π. Dakle, razmak između najveće i susjedne najmanje vrijednosti jednak je polovici temeljne periode.



Prema uvjetu zadatka razdoblje između pojave najvećeg i pojave najmanjeg broja jedinka životinjske vrste iznosi 4 godine pa je taj broj jednak polovici temeljne periode funkcije f ili razdoblje od 8 godina je jednako temeljnoj periodi funkcije f.
Računamo B.

1.inačica

$$\frac{1}{2} \cdot P = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{B} = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{B} = 4 \Rightarrow \frac{\pi}{B} = 4 \Rightarrow \frac{\pi}{B} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{B}{\pi} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B}{\pi} = \frac{1}{4} \;/\cdot \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{4}.$$

2.inačica

$$P = 8 \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{B} = 8 \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{B} = \frac{8}{1} \Rightarrow \frac{B}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{B}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{8} \;/\cdot 2 \cdot \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{4}.$$

Funkcija pomoću koje se procjenjuje broj jedinka životinjske vrste opisana je pravilom

$$f(t)=310\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot t-\frac{7\cdot\pi}{4}\right)+610.$$

Broj jedinka 18 godina nakon početka mjerenja iznosit će:

$$\left.\begin{array}{l} t=18 \\ f(t)=310\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot t-\frac{7\cdot\pi}{4}\right)+610 \end{array}\right\} \Rightarrow f(18)=310\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 18-\frac{7\cdot\pi}{4}\right)+610 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(18)=310\cdot\sin\left(\frac{18\cdot\pi}{4}-\frac{7\cdot\pi}{4}\right)+610 \Rightarrow f(18)=310\cdot\sin\left(\frac{11\cdot\pi}{4}\right)+610 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{džepno računalo} \\ \text{STANJE : RAD}\end{array}\right] \Rightarrow f(18)=829.203 \Rightarrow f(18)=830.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 359

Istraživanje je pokazalo da se broj jedinka neke životinjske vrste periodički mijenja. Broj jedinka f(t) procjenjuje se prema formuli $f(t)=A\cdot\sin\left(B\cdot t-\frac{7\cdot\pi}{4}\right)+D$ gdje je t broj godina proteklih od početka mjerenja. Najmanje jedinka te životinjske vrste bilo je 5 godina nakon početka mjerenja kada je prebrojano 300 jedinka. Nakon toga broj jedinka je rastao u iduće 4 godine te je najviše jedinka te životinjske vrste bilo 9 godina nakon početka mjerenja kada je prebrojano 920 jedinka. Koliki će prema toj procjeni biti broj jedinka te životinjske vrste 36 godina nakon početka mjerenja?

A. 290 *B.* 391 *C.* 430 *D.* 457

Rezultat: B.

Zadatak 360 (Igor, tehnička škola)

Čemu je, nakon pojednostavljivanja, jednak izraz $\frac{tg(x-15\cdot\pi)+5\cdot tg\,x}{ctg\,x+2\cdot ctg(x-18\cdot\pi)}$?

$A.\ -\frac{4}{3}\cdot ctg^2 x$ $B.\ -\frac{4}{3}\cdot tg^2 x$ $C.\ 2\cdot ctg^2 x$ $D.\ 2\cdot tg^2 x$

Rješenje 360

Ponovimo!

$$tg\,x\cdot ctg\,x=1 \Rightarrow tg\,x=\frac{1}{ctg\,x} \quad , \quad \frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Ako za funkciju $f: D_f \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P)=f(x),$$

za svaki $x\in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodičnom funkcijom. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi f(x + P) = f(x) nazivaju se periode funkcije f. Ako postoji najmanji pozitivan broj P, tada se taj P naziva temeljna perioda. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljna perioda za tangens i kotangens je π.

$$tg(x+k\cdot\pi)=tg\,x \quad , \quad ctg(x+k\cdot\pi)=ctg\,x\ ,\ k\in Z.$$

Skup cijelih brojeva Z predstavlja skup

$$Z = \{\ ...,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\ \}.$$

$$\frac{tg\left(x-15\cdot\pi\right)+5\cdot tg\ x}{ctg\ x+2\cdot ctg\left(x-18\cdot\pi\right)}=\left[\begin{array}{l}\text{periodičnost}\\ \text{tangensa i kotangensa}\end{array}\right]=\frac{tg\ x+5\cdot tg\ x}{ctg\ x+2\cdot ctg\ x}=\frac{6\cdot tg\ x}{3\cdot ctg\ x}=$$

$$=\frac{6\cdot tg\ x}{3\cdot ctg\ x}=2\cdot\frac{tg\ x}{ctg\ x}=2\cdot tg\ x\cdot\frac{1}{ctg\ x}=2\cdot tg\ x\cdot tg\ x=2\cdot tg^2\ x.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 360

Čemu je, nakon pojednostavljivanja, jednak izraz $\frac{2\cdot tg\left(x-13\cdot\pi\right)+4\cdot tg\ x}{ctg\ x+2\cdot ctg\left(x-16\cdot\pi\right)}$?

$A.\ -\frac{4}{3}\cdot ctg^2\ x$ $\qquad B.\ -\frac{4}{3}\cdot tg^2\ x$ $\qquad C.\ 2\cdot ctg^2\ x$ $\qquad D.\ 2\cdot tg^2\ x$

Rezultat: D.