Zadatak 281 (Matija, srednja škola)

Čemu je, nakon pojednostavljivanja, jednak izraz $\dfrac{tg\,(x-15\cdot\pi)+5\cdot tg\,x}{ctg\,x+2\cdot ctg\,(x-18\cdot\pi)}$?

$$A.\ -\frac{4}{3}\cdot ctg^2\,x \qquad B.\ -\frac{4}{3}\cdot tg^2\,x \qquad C.\ 2\cdot ctg^2\,x \qquad D.\ 2\cdot tg^2\,x$$

Rješenje 281

Ponovimo!

$$tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=1 \;\Rightarrow\; ctg\,\alpha=\frac{1}{tg\,\alpha} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Periodične funkcije

Funkcija f je periodična ako postoji realni broj P > 0 takav da za svaki $x\in D$ (x element iz domene funkcije) vrijedi

$$f\,(x+P)=f\,(x).$$

Broj P zove se perioda funkcije f. Najmanji takav pozitivni broj, ako postoji, zove se temeljna perioda funkcije f. Općenito, ako postoji P perioda funkcije f, onda je i svaki višekratnik k · P, $k\in N$ perioda te funkcije.

$$f\,(x+k\cdot P)=f\,(x)\ ,\ k\in N.$$

Periodičnost funkcija tangens i kotangens

Trigonometrijske funkcije tangens i kotangens periodične su funkcije sa temeljnom periodom 180° (ili π rad).

$$tg\,(\alpha+k\cdot\pi)=tg\,\alpha\ ,\ k\in Z \quad , \quad ctg\,(\alpha+k\cdot\pi)=ctg\,\alpha\ ,\ k\in Z.$$

$$\frac{tg\,(x-15\cdot\pi)+5\cdot tg\,x}{ctg\,x+2\cdot ctg\,(x-18\cdot\pi)}=\frac{tg\,x+5\cdot tg\,x}{ctg\,x+2\cdot ctg\,x}=\frac{6\cdot tg\,x}{3\cdot ctg\,x}=\frac{6\cdot tg\,x}{3\cdot ctg\,x}=\frac{2\cdot tg\,x}{ctg\,x}=$$

$$=\frac{2\cdot tg\,x}{\frac{1}{tg\,x}}=\frac{2\cdot\frac{tg\,x}{1}}{\frac{1}{tg\,x}}=2\cdot tg^2\,x.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 281

Čemu je, nakon pojednostavljivanja, jednak izraz $\dfrac{ctg\,(x-15\cdot\pi)+5\cdot ctg\,x}{tg\,x+2\cdot tg\,(x-18\cdot\pi)}$?

$$A.\ -\frac{4}{3}\cdot ctg^2\,x \qquad B.\ -\frac{4}{3}\cdot tg^2\,x \qquad C.\ 2\cdot ctg^2\,x \qquad D.\ 2\cdot tg^2\,x$$

Rezultat: C.

Zadatak 282 (Ivan, gimnazija)

$$\text{Ako je } x=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}, \text{ tada je } x \text{ jednako:}$$

$A.\ x=\sin\alpha \qquad B.\ x=\cos\alpha \qquad C.\ x=tg\,\alpha \qquad D.\ x=ctg\,\alpha$

Rješenje 282

Ponovimo!

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y \quad , \quad \cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y.$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{a}=b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$x=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha\right)}{2\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha\right)-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-\sqrt{2}\cdot\cos\alpha+\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha+\sqrt{2}\cdot\sin\alpha-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-\sqrt{2}\cdot\cos\alpha+\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha+\sqrt{2}\cdot\sin\alpha-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\,\alpha.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 282

$$\text{Ako je } x=\frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{2}\cdot\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha-2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}, \text{ tada je } x \text{ jednako:}$$

$A.\ x=\sin\alpha \qquad B.\ x=\cos\alpha \qquad C.\ x=tg\,\alpha \qquad D.\ x=ctg\,\alpha$

Rezultat: D.

Zadatak 283 (Kristijan, tehnička škola)

Ako je $f(\sin x)=1+tg^2 x$, koliko je $f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$?

Rješenje 283

Ponovimo!

$$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Preoblikujemo funkciju.

$$f(\sin x)=1+tg^2 x \Rightarrow f(\sin x)=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow f(\sin x)=\frac{1}{1}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\sin x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow f(\sin x)=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f(\sin x)=\frac{1}{1-\sin^2 x}.$$

Zadana funkcija glasi:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^2}.$$

Tada je

$$f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{\sin}\right)^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{\sin^2 x}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{1}-\frac{1}{\sin^2 x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{\frac{\sin^2 x-1}{\sin^2 x}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sin^2 x-1}{\sin^2 x}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{\sin^2 x}{-\left(1-\sin^2 x\right)} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{\sin^2 x}{-\cos^2 x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\sin x}\right)=-tg^2 x.$$

Vježba 283

Ako je $f(\cos x)=1+ctg^2 x$, koliko je $f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$?

Rezultat: $-ctg^2 x.$

Zadatak 284 (Dalibor, srednja škola)

Zadana je funkcija $f(x)=2+\sin(3\cdot x)$. Odredite sve realne brojeve x za koje je f(x) = 3.

Rješenje 284

Ponovimo!

$$\sin\frac{\pi}{2}=1 \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Trigonometrijska jednadžba $\sin x=a \;,\; |a|\le 1$

Skup rješenja jednadžbe $\sin x=a,\ |a|\le 1$, je $\{x_0+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\}\cup\{\pi-x_0+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\}$

gdje je $x_0\in R$ jedno rješenje te jednadžbe.

$$\sin x=\sin x_0 \;\Rightarrow\; x=x_0.$$

Budući da je f(x) = 3, dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2+\sin(3\cdot x) \\ f(x)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+\sin(3\cdot x)=3 \Rightarrow \sin(3\cdot x)=3-2 \Rightarrow \sin(3\cdot x)=1.$$

Uvodimo zamjenu (supstituciju).

$$t=3\cdot x.$$

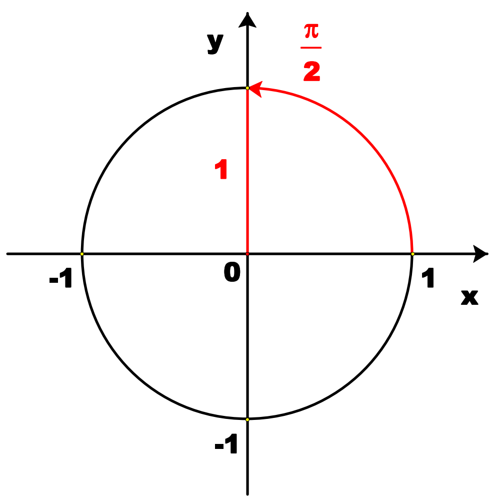
Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(3\cdot x)=1 \\ t=3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \sin t=1 \Rightarrow t=\sin^{-1}1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in Z.$$

Vraćamo se zamjeni (supstituciji).

$$\left.\begin{array}{l} t=3\cdot x \\ t=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi \Rightarrow 3\cdot x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\cdot\pi \;/\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{2\cdot\pi}{3},\ k\in Z.$$



Vježba 284

Zadana je funkcija $f(x)=2+\sin(2\cdot x)$. Odredite sve realne brojeve x za koje je f(x) = 3.

Rezultat: $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi,\ k\in Z.$

Zadatak 285 (Kristijan, gimnazija)

Ako je $\cos\alpha = \frac{x}{y+z}$, $\cos\beta = \frac{y}{z+x}$, $\cos\gamma = \frac{z}{x+y}$, tada je vrijednost izraza $tg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\beta}{2} + tg^2\frac{\gamma}{2}$ jednaka:

$$A.\ \frac{2}{3} \qquad B.\ \frac{3}{2} \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 1.$$

Rješenje 285

Ponovimo!

$$tg^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\ , \quad n = \frac{n}{1}\ , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}\ , \quad \left.\begin{matrix} a=b \\ c=d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c=b+d\ , \quad \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}} = \frac{a}{b}.$$

$$\left.\begin{matrix} tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \\ tg^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta} \\ tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha = \frac{x}{y+z} \\ \cos\beta = \frac{y}{z+x} \\ \cos\gamma = \frac{z}{x+y} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\frac{x}{y+z}}{1+\frac{x}{y+z}} \\ tg^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\frac{y}{z+x}}{1+\frac{y}{z+x}} \\ tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1-\frac{z}{x+y}}{1+\frac{z}{x+y}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{1}-\frac{x}{y+z}}{\frac{1}{1}+\frac{x}{y+z}} \\ tg^2\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{1}{1}-\frac{y}{z+x}}{\frac{1}{1}+\frac{y}{z+x}} \\ tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{1}{1}-\frac{z}{x+y}}{\frac{1}{1}+\frac{z}{x+y}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{y+z-x}{y+z}}{\frac{y+z+x}{y+z}} \\ tg^2\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{z+x-y}{z+x}}{\frac{z+x+y}{z+x}} \\ tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{x+y-z}{x+y}}{\frac{x+y+z}{x+y}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{y+z-x}{y+z}}{\frac{y+z+x}{y+z}} \\ tg^2\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{z+x-y}{z+x}}{\frac{z+x+y}{z+x}} \\ tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\frac{x+y-z}{x+y}}{\frac{x+y+z}{x+y}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{y+z-x}{y+z+x} \\ tg^2\frac{\beta}{2} = \frac{z+x-y}{z+x+y} \\ tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{x+y-z}{x+y+z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\beta}{2} + tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{y+z-x}{y+z+x} + \frac{z+x-y}{z+x+y} + \frac{x+y-z}{x+y+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\beta}{2} + tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{y+z-x}{x+y+z} + \frac{z+x-y}{x+y+z} + \frac{x+y-z}{x+y+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2\frac{\alpha}{2} + tg^2\frac{\beta}{2} + tg^2\frac{\gamma}{2} = \frac{y+z-x+z+x-y+x+y-z}{x+y+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}=\frac{y+z-x+z+x-y+x+y-z}{x+y+z}\ \Rightarrow\ tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}=\frac{z+x+y}{x+y+z}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}=\frac{x+y+z}{x+y+z}\ \Rightarrow\ tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}=\frac{x+y+z}{x+y+z}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}=1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 285

Ako je $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, $\cos\gamma=\frac{4}{5}$, tada je vrijednost izraza $tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\beta}{2}+tg^2\frac{\gamma}{2}$ jednaka:

$$A.\ \frac{2}{3}\qquad B.\ \frac{3}{2}\qquad C.\ 2\qquad D.\ 1.$$

Rezultat: D.

Zadatak 286 (LG, tehnička škola)

Dokaži identitet za sve realne brojeve x za koje navedeni izraz ima smisla.

$$(tg\,x+ctg\,x)^2-(tg\,x-ctg\,x)^2=4.$$

Rješenje 286

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$tg\,x\cdot ctg\,x=1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$(tg\,x+ctg\,x)^2-(tg\,x-ctg\,x)^2=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2x+2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x+ctg^2x-\left(tg^2x-2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x+ctg^2x\right)=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2x+2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x+ctg^2x-tg^2x+2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x-ctg^2x=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg^2x+2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x+ctg^2x-tg^2x+2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x-ctg^2x=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x+2\cdot tg\,x\cdot ctg\,x=4\ \Rightarrow\ 4\cdot tg\,x\cdot ctg\,x=4\ \Rightarrow\ 4\cdot1=4\ \Rightarrow\ 4=4.$$

2.inačica

$$(tg\,x+ctg\,x)^2-(tg\,x-ctg\,x)^2=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left((tg\,x+ctg\,x)-(tg\,x-ctg\,x)\right)\cdot\left((tg\,x+ctg\,x)+(tg\,x-ctg\,x)\right)=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (tg\,x+ctg\,x-tg\,x+ctg\,x)\cdot(tg\,x+ctg\,x+tg\,x-ctg\,x)=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (tg\,x+ctg\,x-tg\,x+ctg\,x)\cdot(tg\,x+ctg\,x+tg\,x-ctg\,x)=4\ \Rightarrow\ 2\cdot ctg\,x\cdot2\cdot tg\,x=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot ctg\,x\cdot tg\,x=4\ \Rightarrow\ 4\cdot1=4\ \Rightarrow\ 4=4.$$

Vježba 286

Dokaži identitet za sve realne brojeve x za koje navedeni izraz ima smisla.

$$(tg\,x - ctg\,x)^2 - (tg\,x + ctg\,x)^2 = -4.$$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 287 (LG, tehnička škola)

Dokaži identitet za sve realne brojeve x za koje navedeni izraz ima smisla.

$$\frac{1-\sin^3 x}{1-\sin x} - \frac{1+\sin^3 x}{1+\sin x} = 2\cdot\sin x.$$

Rješenje 287

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right) \quad , \quad a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - a\cdot b + b^2\right).$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d - b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

1.inačica

$$\frac{1-\sin^3 x}{1-\sin x} - \frac{1+\sin^3 x}{1+\sin x} = 2\cdot\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1-\sin x)\cdot\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)}{1-\sin x} - \frac{(1+\sin x)\cdot\left(1-\sin x+\sin^2 x\right)}{1+\sin x} = 2\cdot\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(1-\sin x)}\cdot\left(1+\sin x+\sin^2 x\right)}{\cancel{1-\sin x}} - \frac{\cancel{(1+\sin x)}\cdot\left(1-\sin x+\sin^2 x\right)}{\cancel{1+\sin x}} = 2\cdot\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\sin x+\sin^2 x - \left(1-\sin x+\sin^2 x\right) = 2\cdot\sin x \Rightarrow 1+\sin x+\sin^2 x - 1+\sin x-\sin^2 x = 2\cdot\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\sin x+\sin^2 x - 1+\sin x-\sin^2 x = 2\cdot\sin x \Rightarrow \sin x+\sin x = 2\cdot\sin x \Rightarrow 2\cdot\sin x = 2\cdot\sin x.$$

2.inačica

$$\frac{1-\sin^3 x}{1-\sin x} - \frac{1+\sin^3 x}{1+\sin x} = 2\cdot\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1-\sin^3 x\right)\cdot(1+\sin x) - \left(1+\sin^3 x\right)\cdot(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cdot(1+\sin x)} = 2\cdot\sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sin x-\sin^3 x-\sin^4 x-\left(1-\sin x+\sin^3 x-\sin^4 x\right)}{1-\sin^2 x}=2\cdot\sin x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sin x-\sin^3 x-\sin^4 x-1+\sin x-\sin^3 x+\sin^4 x}{1-\sin^2 x}=2\cdot\sin x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sin x-\sin^3 x-\sin^4 x-1+\sin x-\sin^3 x+\sin^4 x}{1-\sin^2 x}=2\cdot\sin x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x-\sin^3 x+\sin x-\sin^3 x}{1-\sin^2 x}=2\cdot\sin x \;\Rightarrow\; \frac{2\cdot\sin x-2\cdot\sin^3 x}{1-\sin^2 x}=2\cdot\sin x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\sin x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)}{1-\sin^2 x}=2\cdot\sin x \;\Rightarrow\; \frac{2\cdot\sin x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)}{1-\sin^2 x}=2\cdot\sin x \;\Rightarrow\; 2\cdot\sin x=2\cdot\sin x.$$

Vježba 287

Dokaži identitet za sve realne brojeve x za koje navedeni izraz ima smisla.

$$\frac{1+\sin^3 x}{1+\sin x}-\frac{1-\sin^3 x}{1-\sin x}=-2\cdot\sin x.$$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 288 (ABA, gimnazija)

Ako je $tg\, x+ctg\, x=5,$ koliko je $tg^4 x+ctg^4 x?$

Rješenje 288

Ponovimo!

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad tg\, x\cdot ctg\, x=1 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n\cdot b^n=\left(a\cdot b\right)^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Zadani izraz kvadrirat ćemo:

$$tg\, x+ctg\, x=5 \;\Rightarrow\; tg\, x+ctg\, x=5 \;/^2 \;\Rightarrow\; \left(tg\, x+ctg\, x\right)^2=5^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2 x+2\cdot tg\, x\cdot ctg\, x+ctg^2 x=25 \;\Rightarrow\; tg^2 x+2\cdot 1+ctg^2 x=25 \;\Rightarrow\; tg^2 x+2+ctg^2 x=25 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2 x+ctg^2 x=25-2 \;\Rightarrow\; tg^2 x+ctg^2 x=23.$$

Dobiveni izraz ponovno kvadriramo:

$$tg^2 x+ctg^2 x=23 \;\Rightarrow\; tg^2 x+ctg^2 x=23 \;/^2 \;\Rightarrow\; \left(tg^2 x+ctg^2 x\right)^2=23^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(tg^2 x\right)^2+2\cdot tg^2 x\cdot ctg^2 x+\left(ctg^2 x\right)^2=529 \;\Rightarrow\; tg^4 x+2\cdot\left(tg\, x\cdot ctg\, x\right)^2+ctg^4 x=529 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^4 x+2\cdot 1^2+ctg^4 x=529 \;\Rightarrow\; tg^4 x+2+ctg^4 x=529 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^4 x+ctg^4 x=529-2 \;\Rightarrow\; tg^4 x+ctg^4 x=527.$$

Vježba 288

Ako je $tg\, x+ctg\, x=4,$ koliko je $tg^4 x+ctg^4 x?$

Rezultat: 194.

Zadatak 289 (4A, 4B, TUPŠ)

Odredi temeljnu periodu funkcije $f(x)=\sin(4\cdot x)$.

Rješenje 289

Ponovimo!

Ako za funkciju $f: D_f \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P)=f(x),$$

za svaki $x \in D_f$, tada funkciju f nazivamo periodičnom funkcijom. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi f(x + P) = f(x) nazivaju se periode funkcije f. Ako postoji najmanji pozitivan broj P, tada se taj P naziva **temeljna perioda**. Trigonometrijske funkcije su periodične. Temeljna perioda za sinus je 2π.

$$\sin(x+2\cdot\pi)=\sin x.$$

$$\sin(x+k\cdot 2\cdot\pi)=\sin x \quad , \quad k \in Z.$$

Temeljna perioda funkcije $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)$ dana je izrazom

$$P=\frac{2\cdot\pi}{|b|}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Trigonometrijska jednadžba

$$\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad x=k\cdot\pi \quad , \quad k\in Z.$$

1.inačica

Neka je P najmanji pozitivan realan broj takav da za svaki realan broj x vrijedi

$$f(x+P)=f(x) \;\Rightarrow\; \sin 4\cdot(x+P)=\sin(4\cdot x) \;\Rightarrow\; \sin(4\cdot x+4\cdot P)=\sin(4\cdot x).$$

Budući da broj 4 · x može biti bilo koji realan broj, tj. ova jednakost mora biti ispunjena za svaki x, zaključujemo da je 4 · P perioda funkcije sinus.

$$4\cdot P=k\cdot 2\cdot\pi \;\Rightarrow\; 4\cdot P=k\cdot 2\cdot\pi \;/:4 \;\Rightarrow\; P=k\cdot\frac{2\cdot\pi}{4} \;\Rightarrow\; P=k\cdot\frac{2\cdot\pi}{4} \;\Rightarrow\; P=k\cdot\frac{\pi}{2} \quad , \quad k\in N.$$

Najmanji P odredit ćemo za prirodan broj k = 1 pa je

$$P_0=1\cdot\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; P_0=\frac{\pi}{2}.$$

Dokažimo da je $P_0=\frac{\pi}{2}$ temeljna perioda funkcije $f(x)=\sin(4\cdot x)$.

$$\sin(4\cdot x+4\cdot P)=\sin\left(4\cdot x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(4\cdot x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin(4\cdot x+2\cdot\pi)=\sin(4\cdot x).$$

Tvrdnja vrijedi.

2.inačica

Neka je P najmanji pozitivan realan broj takav da za svaki realan broj x vrijedi

$$f(x+P)=f(x)\ \Rightarrow\ \sin 4\cdot(x+P)=\sin(4\cdot x)\ \Rightarrow\ \sin(4\cdot x+4\cdot P)=\sin(4\cdot x).$$

Stavimo specijalno x = 0 pa imamo:

$$\sin 4\cdot(0+P)=\sin(4\cdot 0)\ \Rightarrow\ \sin(4\cdot P)=\sin 0\ \Rightarrow\ 4\cdot P=k\cdot\pi\ \Rightarrow\ 4\cdot P=k\cdot\pi\ /:4\ \Rightarrow\ P=k\cdot\frac{\pi}{4}\ ,\ k\in N.$$

Za k = 1 je

$$P_0=1\cdot\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ P_0=\frac{\pi}{4}.$$

Provjerimo je li $P_0=\frac{\pi}{4}$ temeljna perioda funkcije $f(x)=\sin(4\cdot x)$.

$$\sin(4\cdot x+4\cdot P)=\sin\left(4\cdot x+4\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(4\cdot x+4\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\sin(4\cdot x+\pi)\neq\sin(4\cdot x).$$

Vidimo da $P_0=\frac{\pi}{4}$ nije temeljna perioda.

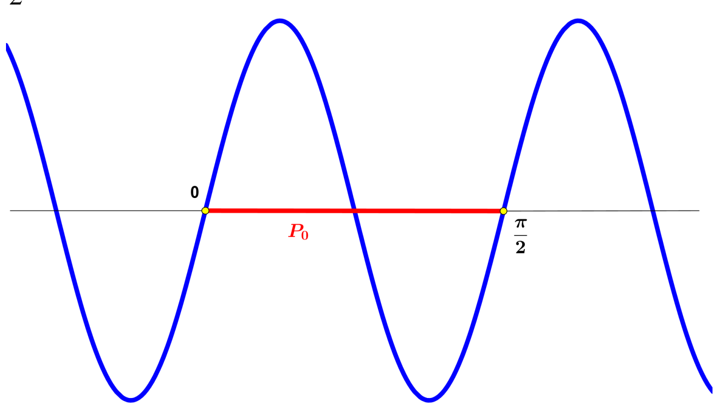
Za k = 2 je

$$P_0=2\cdot\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ P_0=2\cdot\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ P_0=\frac{\pi}{2}.$$

Provjerimo je li $P_0=\frac{\pi}{2}$ temeljna perioda funkcije $f(x)=\sin(4\cdot x)$.

$$\sin(4\cdot x+4\cdot P)=\sin\left(4\cdot x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(4\cdot x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin(4\cdot x+2\cdot\pi)=\sin(4\cdot x).$$

Vidimo da je $P_0=\frac{\pi}{2}$ temeljna perioda.



3.inačica

Budući da funkcija $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)$ ima temeljnu periodu $P=\frac{2\cdot\pi}{|b|}$, vrijedi

$$f(x)=\sin(4\cdot x)\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} b=4 \\ P_0=\frac{2\cdot\pi}{|b|}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ P_0=\frac{2\cdot\pi}{|4|}\ \Rightarrow\ P_0=\frac{2\cdot\pi}{4}\ \Rightarrow\ P_0=\frac{2\cdot\pi}{4}\ \Rightarrow\ P_0=\frac{\pi}{2}.$$

Vježba 289

Odredi temeljnu periodu funkcije $f(x)=\sin(3\cdot x)$.

Rezultat: $P_0=\frac{2\cdot\pi}{3}.$

Zadatak 290 (Goran, gimnazija)

Izračunaj: $\frac{\sin^2 x}{1+ctg\,x}+\frac{\cos^2 x}{1+tg\,x}+\sin x\cdot\cos x.$

Rješenje 290

Ponovimo!

$$ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}\quad,\quad tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}\quad,\quad a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right).$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\frac{\sin^2 x}{1+ctg\,x}+\frac{\cos^2 x}{1+tg\,x}+\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin^2 x}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos^2 x}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\frac{1}{1}+\frac{\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos^2 x}{\frac{1}{1}+\frac{\sin x}{\cos x}}+\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin^2 x}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos^2 x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\frac{\sin^2 x}{1}}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}+\frac{\frac{\cos^2 x}{1}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}+\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}+\sin x\cdot\cos x=\frac{(\sin x+\cos x)\cdot\left(\sin^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x\right)}{\sin x+\cos x}+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)\cdot\left(\sin^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x\right)}{\sin x+\cos x}+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\sin^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=\sin^2 x-\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

2.inačica

$$\frac{\sin^2 x}{1+ctg\ x}+\frac{\cos^2 x}{1+tg\ x}+\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin^2 x}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos^2 x}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\frac{1}{1}+\frac{\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos^2 x}{\frac{1}{1}+\frac{\sin x}{\cos x}}+\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin^2 x}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}+\frac{\cos^2 x}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\frac{\sin^2 x}{1}}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}+\frac{\frac{\cos^2 x}{1}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}+\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}+\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin x\cdot\cos x}{1}=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x+\sin x\cdot\cos x\cdot(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=$$

$$=\frac{\sin^3 x+\cos^3 x+\sin^2 x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^3 x+\sin^2 x\cdot\cos x+\cos^3 x+\sin x\cdot\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x\cdot(\sin x+\cos x)+\cos^2 x\cdot(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin x+\cos x}=$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin x+\cos x}=\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Vježba 290

Izračunaj: $\frac{\sin^2 x}{1+ctg\ x}+\frac{\cos^2 x}{1+tg\ x}+tg\ x\cdot\cos^2 x.$

Rezultat: 1.

Zadatak 291 (Marinko, srednja škola)

Ako je $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ i $\cos\alpha<0$, koliko je $tg\ \alpha$?

Rješenje 291

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad tg\ x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Prvo izračunamo cos α.

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{3}{5} \\ \cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1} - \frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{25-9}{25} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{4}{5} \\ \cos\alpha &= -\frac{4}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ \cos\alpha < 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Sada je

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sin\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\frac{3}{1}}{-\frac{4}{1}} \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{3}{4}.$$

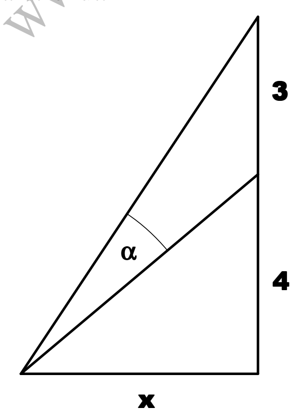
Vježba 291

Ako je $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ i $\sin\alpha > 0$, koliko je $tg\,\alpha$?

Rezultat: $tg\,\alpha = -\frac{3}{4}.$

Zadatak 292 (Helena, gimnazija)

Na skici je prikazan pravokutan trokut.



Koliki je tg α izražen s pomoću x?

$A.\ tg\,\alpha = \frac{3 \cdot x}{28 + x^2}$ $\quad B.\ tg\,\alpha = \frac{4 \cdot x}{21 + x^2}$ $\quad C.\ tg\,\alpha = \frac{7 \cdot x}{28 + x^2}$ $\quad D.\ tg\,\alpha = \frac{11 \cdot x}{21 + x^2}$

Rješenje 292

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine

katete uz taj kut.

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

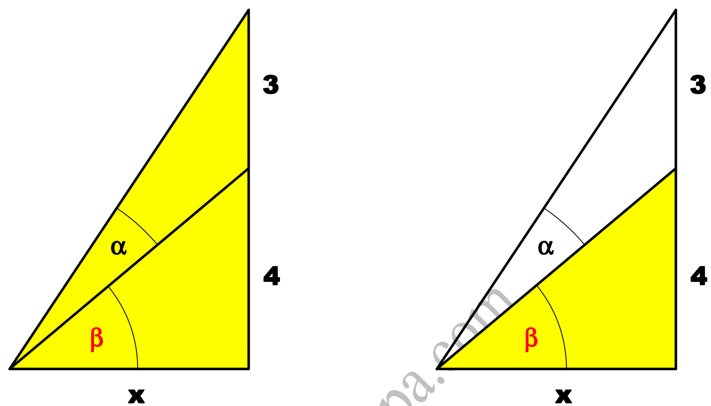
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$



Sa slika vidi se:

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{3+4}{x}\ \Rightarrow\ tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{7}{x}\quad,\quad tg\,\beta=\frac{4}{x}$$

Računamo tg α.

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{7}{x}\\ tg\,\beta=\frac{4}{x}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \frac{7}{x}=\frac{tg\,\alpha+\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x}\cdot tg\,\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{7}{x}=\frac{tg\,\alpha+\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x}\cdot tg\,\alpha}\ /\cdot\left(1-\frac{4}{x}\cdot tg\,\alpha\right)\ \Rightarrow\ \frac{7}{x}\cdot\left(1-\frac{4}{x}\cdot tg\,\alpha\right)=tg\,\alpha+\frac{4}{x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{7}{x}-\frac{28}{x^2}\cdot tg\,\alpha=tg\,\alpha+\frac{4}{x}\ \Rightarrow\ tg\,\alpha+\frac{4}{x}=\frac{7}{x}-\frac{28}{x^2}\cdot tg\,\alpha\ \Rightarrow\ tg\,\alpha+\frac{28}{x^2}\cdot tg\,\alpha=\frac{7}{x}-\frac{4}{x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{28}{x^2}\right)\cdot tg\,\alpha=\frac{3}{x}\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{1}+\frac{28}{x^2}\right)\cdot tg\,\alpha=\frac{3}{x}\ \Rightarrow\ \frac{x^2+28}{x^2}\cdot tg\,\alpha=\frac{3}{x}\ \Rightarrow$$

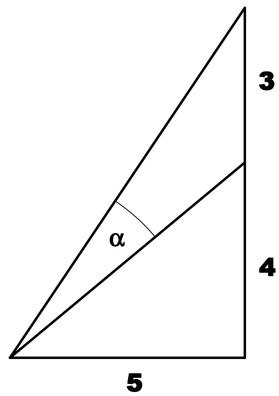
$$\Rightarrow\ \frac{x^2+28}{x^2}\cdot tg\,\alpha=\frac{3}{x}\ /\cdot\frac{x^2}{x^2+28}\ \Rightarrow\ tg\,\alpha=\frac{3}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+28}\ \Rightarrow\ tg\,\alpha=\frac{3}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+28}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg\,\alpha=\frac{3\cdot x}{x^2+28}\ \Rightarrow\ tg\,\alpha=\frac{3\cdot x}{28+x^2}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 292

Na skici je prikazan pravokutan trokut.



Koliki je tg α?

$$A.\ tg\,\alpha=\frac{15}{53}\qquad B.\ tg\,\alpha=\frac{10}{23}\qquad C.\ tg\,\alpha=\frac{35}{53}\qquad D.\ tg\,\alpha=\frac{55}{46}$$

Rezultat: A.

Zadatak 293 (Berislav, gimnazija)

Za koje vrijednosti parametra a jednadžba $\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(m\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)=a$ ima rješenje?

Rješenje 293

Ponovimo!

$$a\le b\le c\ ,\ n>0\ \Rightarrow\ a\cdot n\le b\cdot n\le c\cdot n\quad ,\quad a\le b\ \Rightarrow\ a+n\le b+n\ ,\ n\in R.$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]\quad ,\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\quad ,\quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba cos x = a

Jednadžba ima rješenje ako i samo ako je

$$-1\le a\le 1.$$

Tada postoji jedinstven kut α u intervalu

$$-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$$

čiji je kosinus jednak a pa postoji jednadžba

$$\cos x=\cos\alpha$$

koja ima dva skupa rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\alpha+k\cdot 2\cdot\pi\ ,\ k\in Z\\ x_2=-\alpha+k\cdot 2\cdot\pi\ ,\ k\in Z\end{array}\right\}\ \text{ili}\ x_{1,2}=\pm\alpha+k\cdot 2\cdot\pi\ ,\ k\in Z.$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.
Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.
Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Umnožak u zadanoj jednadžbi preoblikujemo u zbroj.

$$\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(m\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)=a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}-\left(m\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}+m\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}-m\cdot x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}+m\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}-m\cdot x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}+m\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(m\cdot x+m\cdot x\right)\right]=a\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\frac{2\cdot\pi}{6}+\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)\right]=a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\frac{2\cdot\pi}{6}+\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)\right]=a\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)\right]=a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)\right]=a\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ \cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)=2\cdot a\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}+\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)=2\cdot a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}+\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)=2\cdot a\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ 1+2\cdot\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)=4\cdot a\ \Rightarrow\ 2\cdot\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)=4\cdot a-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\cos\left(2\cdot m\cdot x\right)=4\cdot a-1\ /\cdot\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \cos\left(2\cdot m\cdot x\right)=\frac{4\cdot a-1}{2}.$$

Da bi jednadžba imala rješenje mora vrijediti nejednadžba

$$-1\le\frac{4\cdot a-1}{2}\le 1\ \Rightarrow\ -1\le\frac{4\cdot a-1}{2}\le 1\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ -2\le 4\cdot a-1\le 2\ \Rightarrow\ -2\le 4\cdot a-1\le 2\ /+1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2+1\le 4\cdot a-1+1\le 2+1\ \Rightarrow\ -2+1\le 4\cdot a-1+1\le 2+1\ \Rightarrow\ -1\le 4\cdot a\le 3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -1\le 4\cdot a\le 3\ /\cdot\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ -\frac{1}{4}\le a\le\frac{3}{4}.$$

Vježba 293

Za koje vrijednosti parametra a jednadžba $\cos\left(m\cdot x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(m\cdot x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2}$ ima rješenje?

Rezultat: $-\frac{1}{2}\le a\le\frac{3}{2}.$

Zadatak 294 (Danijel, strukovna škola)

Za šiljaste kutove α i β vrijedi $tg\,\alpha=\frac{1}{3}$ i $tg\,\beta=\frac{1}{2}$. Izračunaj α + β.

Rješenje 294

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a-\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c-b}{c}.$$

$$tg\left(x+y\right)=\frac{tg\,x+tg\,y}{1-tg\,x\cdot tg\,y} \quad , \quad tg\,45^{0}=1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}=\begin{bmatrix} tg\,\alpha=\frac{1}{3} \\ tg\,\beta=\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2+3}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

Iz

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=1$$

slijedi:

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=1 \;\Rightarrow\; \alpha+\beta=tg^{-1}1 \;\Rightarrow\; \alpha+\beta=45^{0}.$$

Vježba 294

Za šiljaste kutove α i β vrijedi $tg\,\alpha=\frac{1}{3}$ i $tg\,\beta=\frac{1}{2}$. Izračunaj 2 · α + 2 · β.

Rezultat: 90°.

Zadatak 295 (Marija, gimnazija)

Vrijednost brojevnog izraza $\frac{1}{\sin 15^{0}}+\frac{\sqrt{3}}{\cos 15^{0}}$ jednaka je:

$A.\; 2\cdot\sqrt{3}$ $\quad B.\; 4\cdot\sqrt{2}$ $\quad C.\; 5.55$ $\quad D.\; 4\cdot\sqrt{3}$

Rješenje 295

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \sin 30^{0}=\cos 60^{0}=\frac{1}{2} \quad , \quad tg\,60^{0}=\sqrt{3} \quad , \quad \cos 45^{0}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad , \quad tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}}=\frac{a\cdot c}{b}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$\frac{1}{\sin 15^0}+\frac{\sqrt{3}}{\cos 15^0}=\frac{\cos 15^0+\sqrt{3}\cdot\sin 15^0}{\sin 15^0\cdot\cos 15^0}=\frac{2\cdot\left(\cos 15^0+\sqrt{3}\cdot\sin 15^0\right)}{2\cdot\sin 15^0\cdot\cos 15^0}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\cos 15^0+\sqrt{3}\cdot\sin 15^0\right)}{\sin 30^0}=\frac{2\cdot\left(\cos 15^0+\sqrt{3}\cdot\sin 15^0\right)}{\frac{1}{2}}=4\cdot\left(\cos 15^0+\sqrt{3}\cdot\sin 15^0\right)=$$

$$=4\cdot\left(\cos 15^0+tg\,60^0\cdot\sin 15^0\right)=4\cdot\left(\cos 15^0+\frac{\sin 60^0}{\cos 60^0}\cdot\sin 15^0\right)=$$

$$=4\cdot\frac{\cos 60^0\cdot\cos 15^0-\sin 60^0\cdot\sin 15^0}{\cos 60^0}=4\cdot\frac{\cos\left(60^0-15^0\right)}{\frac{1}{2}}=8\cdot\cos\left(60^0-15^0\right)=$$

$$=8\cdot\cos 45^0=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=4\cdot\sqrt{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 295

Vrijednost brojevnog izraza $\frac{1}{\sin 15^0}+\frac{3}{\sqrt{3}\cdot\cos 15^0}$ jednaka je:

$A.\ 2\cdot\sqrt{3}$ $\quad B.\ 4\cdot\sqrt{2}$ $\quad C.\ 5.55$ $\quad D.\ 4\cdot\sqrt{3}$

Rezultat: B.

Zadatak 296 (Marijan, gimnazija)

Pokazati da se izraz $\frac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}$, gdje je $x\neq(2\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, može izraziti kao racionalna funkcija od tg x.

Rješenje 296

Ponovimo!

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\quad,\quad\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\quad,\quad tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad,\quad\cos^2 x+\sin^2 x=1\quad,\quad\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Preoblikujemo zadani izraz na ovaj način:

$$\frac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}=\frac{(\sin x+\cos x)\cdot 1}{\cos x\cdot\cos^2 x}=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=$$

$$=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}\right)\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\cos x}\right)\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)\cdot\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)\cdot\left(1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2\right)=(tg\,x+1)\cdot\left(1+tg^2\,x\right)=$$

$$=tg\,x+tg^3\,x+1+tg^2\,x=tg^3\,x+tg^2\,x+tg\,x+1.$$

Vježba 296

Pokazati da se izraz $\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos^2 x}$, gdje je $x\neq(2\cdot k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, može izraziti kao racionalna funkcija od tg x.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 297 (Domy, gimnazija)

Zadana je funkcija $f(x)=2\cdot\cos 2x+4\cdot\cos x+3$. Odredite njezinu maksimalnu vrijednost.

Rješenje 297

Ponovimo!

$$\cos 2x=2\cdot\cos^2 x-1 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad |\cos x|\le 1 \text{ za svaki } x\in R \quad , \quad a^2\ge 0 \text{ za svaki } a\in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=2\cdot\cos 2x+4\cdot\cos x+3 \;\Rightarrow\; f(x)=2\cdot\left(2\cdot\cos^2 x-1\right)+4\cdot\cos x+3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x)=4\cdot\cos^2 x-2+4\cdot\cos x+3 \;\Rightarrow\; f(x)=4\cdot\cos^2 x+4\cdot\cos x+1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x)=(2\cdot\cos x)^2+2\cdot 2\cdot\cos x+1 \;\Rightarrow\; f(x)=(2\cdot\cos x+1)^2.$$

Budući da funkcija kosinus ima najveću vrijednost 1, $\cos x=1$, maksimalna vrijednost zadane funkcije iznosit će:

$$(2\cdot 1+1)^2=(2+1)^2=3^2=9.$$

Vježba 297

Zadana je funkcija $f(x)=2\cdot\cos 2x+4\cdot\cos x+3$. Odredite njezinu minimalnu vrijednost.

Rezultat: 0.

Zadatak 298 (4A, TUPŠ)

Odredi glavnu mjeru kuta $\frac{459\cdot\pi}{4}$.

Rješenje 298

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Pozitivni kut koji je manji od punog kuta nazivamo glavnom mjerom kuta i njegov mjerni broj označavamo slovom α_1.

$$0\leq\alpha_1<360^0 \quad , \quad 0\leq\alpha_1<2\cdot\pi.$$

Formule za određivanje glavne mjere kuta glase:

$$\alpha_1=\alpha-k\cdot 360^0 \quad , \quad \alpha_1=\alpha-k\cdot 2\cdot\pi,$$

gdje je α_1 glavna mjera kuta, α zadani kut, k najveći cijeli broj manji od kvocijenta

$$\alpha:360^0=\frac{\alpha}{360^0} \quad , \quad \alpha:(2\cdot\pi)=\frac{\alpha}{2\cdot\pi}.$$

Dijelimo broj $\frac{459\cdot\pi}{4}$ sa 2 · π i gledamo kvocijent. Broj k bit će najveći cijeli broj manji od toga kvocijenta.

$$\frac{459\cdot\pi}{4}:(2\cdot\pi)=\frac{459\cdot\pi}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\pi}=\frac{459\cdot\cancel{\pi}}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\cancel{\pi}}=\frac{459}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{459}{8}=57.375 \Rightarrow k=57.$$

Sada je:

$$\alpha_1=\alpha-k\cdot 2\cdot\pi \Rightarrow \alpha_1=\frac{459\cdot\pi}{4}-57\cdot 2\cdot\pi \Rightarrow \alpha_1=\frac{459\cdot\pi}{4}-114\cdot\pi \Rightarrow \alpha_1=\frac{459\cdot\pi}{4}-\frac{114\cdot\pi}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1=\frac{459\cdot\pi-456\cdot\pi}{4} \Rightarrow \alpha_1=\frac{3\cdot\pi}{4}.$$

Vježba 298

Odredi glavnu mjeru kuta $\frac{271\cdot\pi}{6}$.

Rezultat: $\frac{7\cdot\pi}{6}$.

Zadatak 299 (Marija, gimnazija)

Razlomak $\dfrac{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$ jednak je:

$$A.\ tg^2\alpha \qquad B.\ -1 \qquad C.\ ctg^2\alpha \qquad D.\ 1$$

Rješenje 299

Ponovimo!

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad , \quad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}=\frac{2\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=tg^2\alpha.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$\frac{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)+\sin^2\alpha}{\left(1-\sin^2\alpha\right)+\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}=\frac{2\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=tg^2\alpha.$$

Vježba 299

Razlomak $\frac{1-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ jednak je:

$A.\ tg^2\alpha \qquad B.\ -1 \qquad C.\ ctg^2\alpha \qquad D.\ 1$

Rezultat: C.

Zadatak 300 (Ivek, tehnička škola)

Dokazati identitet: $\cos^2 x\cdot\left(tg\,x+2\right)\cdot\left(2\cdot tg\,x+1\right)-5\cdot\sin x\cdot\cos x=2.$

Rješenje 300

Ponovimo!

$$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a^1=a.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{a}=b\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Množenje zagrada

$$\left(a+b\right)\cdot\left(c+d\right)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Preoblikujemo lijevu stranu identiteta.

$$\cos^2 x\cdot\left(tg\,x+2\right)\cdot\left(2\cdot tg\,x+1\right)-5\cdot\sin x\cdot\cos x=\cos^2 x\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x}+2\right)\cdot\left(2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}+1\right)-5\cdot\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\cos^2 x\cdot\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{2}{1}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{1}\right)-5\cdot\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\cos^2 x\cdot\frac{\sin x+2\cdot\cos x}{\cos x}\cdot\frac{2\cdot\sin x+\cos x}{\cos x}-5\cdot\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\cos^2 x\cdot\frac{(\sin x+2\cdot\cos x)\cdot(2\cdot\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}-5\cdot\sin x\cdot\cos x=$$

$$=\cos^2 x\cdot\frac{(\sin x+2\cdot\cos x)\cdot(2\cdot\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}-5\cdot\sin x\cdot\cos x=$$

$$=(\sin x+2\cdot\cos x)\cdot(2\cdot\sin x+\cos x)-5\cdot\sin x\cdot\cos x=$$

$$=2\cdot\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+4\cdot\cos x\cdot\sin x+2\cdot\cos^2 x-5\cdot\sin x\cdot\cos x=$$

$$=2\cdot\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x+4\cdot\cos x\cdot\sin x+2\cdot\cos^2 x-5\cdot\sin x\cdot\cos x=2\cdot\sin^2 x+2\cdot\cos^2 x=$$

$$=2\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\cdot 1=2.$$

Vježba 300

Dokazati identitet: $\cos^2 x\cdot(tg\, x+2)\cdot(2\cdot tg\, x+1)-5\cdot\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x-\cos^2 x=1.$

Rezultat: Dokaz analogan