Zadatak 201 (Vedran, srednja škola)

Pojednostavni izraz: $\frac{\cos x + ctg\ x}{1+\sin x}$.

Rješenje 201

Ponovimo!

$$ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$\frac{\cos x + ctg\ x}{1+\sin x} = \frac{\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}}{1+\sin x} = \frac{\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1+\sin x}{1}} = \frac{\frac{\cos x\cdot\sin x + \cos x}{\sin x}}{\frac{1+\sin x}{1}} = \frac{\cos x\cdot\sin x + \cos x}{\sin x\cdot(1+\sin x)} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot(\sin x + 1)}{\sin x\cdot(1+\sin x)} = \frac{\cos x\cdot(\sin x+1)}{\sin x\cdot(1+\sin x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\ x.$$

Vježba 201

Pojednostavni izraz: $\frac{1+\sin x}{\cos x + ctg\ x}$.

Rezultat: tg x.

Zadatak 202 (Stella, gimnazija)

Ako je $tg\ x + ctg\ x = 3$, koliko je $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$?

Rješenje 202

Ponovimo!

$$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2.$$

Najprije transformiramo zadanu jednakost.

$$tg\ x + ctg\ x = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 3 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sin x\cdot\cos x} = 3.$$

Sada je:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{(\sin x\cdot\cos x)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Vježba 202

Ako je $tg\ x + ctg\ x = 5$, koliko je $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$?

Rezultat: $\frac{1}{25}$.

Zadatak 203 (Ana, gimnazija)

Dokaži identitet: $(1-ctg\, x)^2+(1+ctg\, x)^2=\frac{2}{\sin^2 x}$.

Rješenje 203

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad ctg\, x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Transformiramo lijevu stranu jednakosti.

$$(1-ctg\, x)^2+(1+ctg\, x)^2=1-2\cdot ctg\, x+ctg^2 x+1+2\cdot ctg\, x+ctg^2 x=$$

$$=1-2\cdot ctg\, x+ctg^2 x+1+2\cdot ctg\, x+ctg^2 x=2+2\cdot ctg^2 x=2\cdot\left(1+ctg^2 x\right)=$$

$$=2\cdot\left(1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=2\cdot\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=2\cdot\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sin^2 x}.$$

2.inačica

Transformiramo lijevu stranu jednakosti.

$$(1-ctg\, x)^2+(1+ctg\, x)^2=\left(\frac{1}{1}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2+\left(\frac{1}{1}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}\right)^2+\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}\right)^2=$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin^2 x}+\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x}=\frac{(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x-2\cdot\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x-2\cdot\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{2\cdot\sin^2 x+2\cdot\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x}=\frac{2\cdot 1}{\sin^2 x}=\frac{2}{\sin^2 x}.$$

Vježba 203

Dokaži identitet: $(ctg\, x-1)^2+(ctg\, x+1)^2=\frac{2}{\sin^2 x}$.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 204 (Antonia, srednja škola)

Ako je $2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x = 1$, onda je $3 \cdot tg\ x + 3 \cdot ctg\ x$ jednako:

$$A.\ 8 \qquad B.\ \frac{1}{8} \qquad C.\ -8 \qquad D.\ -\frac{1}{8}$$

Rješenje 204

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad ctg\ x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Najprije transformiramo zadanu jednakost $2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x = 1$.

$$2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x = 1 \Rightarrow 2 \cdot (\sin x + \cos x) = 1 \Rightarrow 2 \cdot (\sin x + \cos x) = 1 \ / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{2} \ /^2 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} - 1 \Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} - \frac{1}{1} \Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1-4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{4} \ / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{8}.$$

Sada je:

$$3 \cdot tg\ x + 3 \cdot ctg\ x = 3 \cdot (tg\ x + ctg\ x) = 3 \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 3 \cdot \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} = 3 \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} =$$

$$= \frac{3}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{3}{-\frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{1}}{-\frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{1}}{-\frac{3}{8}} = \frac{\frac{1}{1}}{-\frac{1}{8}} = -8.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 204

Ako je $2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x = 1$, onda je $6 \cdot tg\ x + 6 \cdot ctg\ x$ jednako:

$$A.\ 16 \qquad B.\ 8 \qquad C.\ -8 \qquad D.\ -16$$

Rezultat: D.

Zadatak 205 (Ivan, gimnazija)

Nađi broj rješenja jednadžbe $|\sin 3x| = |\cos 3x|$ u intervalu $[0,\ 2 \cdot \pi]$.

Rješenje 205

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$\left| x \right| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Apsolutna vrijednost količnika dvaju brojeva jednaka je količniku apsolutnih vrijednosti tih brojeva, za broj $b \neq 0$, vrijedi

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad , \quad |x| = a \ , \ a > 0 \ \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = a \\ x_2 = -a \end{matrix} \right\}.$$

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad tg\, x = a \ , \ a \in R \ \Rightarrow \ x = tg^{-1}\, a \ \Rightarrow \ x = \alpha + k \cdot \pi \ , \ k \in Z.$$

Transformiramo zadanu jednadžbu.

$$|\sin 3x| = |\cos 3x| \ \Rightarrow \ |\sin 3x| = |\cos 3x| \ / \cdot \frac{1}{|\cos 3x|} \ \Rightarrow \ \frac{|\sin 3x|}{|\cos 3x|} = 1 \ \Rightarrow \ \left| \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \right| = 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |tg\, 3x| = 1 \ \Rightarrow \left. \begin{matrix} tg\, 3x = 1 \\ tg\, 3x = -1 \end{matrix} \right\}.$$

Riješimo svaku jednadžbu posebno.

$tg\, 3x = 1$	$tg\, 3x = -1$
$3x = tg^{-1}\, 1$	$3x = tg^{-1}(-1)$
$3x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$	$3x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$
$3x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \ / \cdot \frac{1}{3}$	$3x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \ / \cdot \frac{1}{3}$
$x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}$	$x_2 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3}$
Uvjet: $x_1 \in [0, 2 \cdot \pi]$, $0 \leq x_1 \leq 2 \cdot \pi$	Uvjet: $x_2 \in [0, 2 \cdot \pi]$, $0 \leq x_2 \leq 2 \cdot \pi$
$0 \leq \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \leq 2 \cdot \pi$	$0 \leq -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \leq 2 \cdot \pi$
$0 \leq \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \leq 2 \cdot \pi \ / \cdot \frac{12}{\pi}$	$0 \leq -\frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{3} \leq 2 \cdot \pi \ / \cdot \frac{12}{\pi}$
$0 \leq 1 + 4 \cdot k \leq 24$	$0 \leq -1 + 4 \cdot k \leq 24$
$0 \leq 1 + 4 \cdot k \leq 24 \ / -1$	$0 \leq -1 + 4 \cdot k \leq 24 \ / +1$
$0 - 1 \leq 1 + 4 \cdot k - 1 \leq 24 - 1$	$0 + 1 \leq -1 + 4 \cdot k + 1 \leq 24 + 1$
$0 - 1 \leq 1 + 4 \cdot k - 1 \leq 24 - 1$	$0 + 1 \leq -1 + 4 \cdot k + 1 \leq 24 + 1$
$-1 \leq 4 \cdot k \leq 23$	$1 \leq 4 \cdot k \leq 25$
$-1 \leq 4 \cdot k \leq 23 \ / \cdot \frac{1}{4}$	$1 \leq 4 \cdot k \leq 25 \ / \cdot \frac{1}{4}$
$-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{23}{4}$	$\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{25}{4}$
$k \in Z$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	$k \in Z$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ukupno je 12 rješenja.

Vježba 205

Nađi broj rješenja jednadžbe $|\sin 3x| = |\cos 3x|$ u intervalu $[0, \pi]$.

Rezultat: 6.

Zadatak 206 (Petar, srednja škola)

Sva rješenja jednadžbe $\sin 3x \cdot \cos x = \cos 3x \cdot \sin x$ pripadaju skupu:

$A.\ k \cdot \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in Z \qquad B.\ k \cdot \frac{\pi}{4}\ ,\ k \in Z \qquad C.\ k \cdot \pi\ ,\ k \in Z \qquad D.\ (2 \cdot k + 1) \cdot \pi\ ,\ k \in Z$

Rješenje 206

Ponovimo!

$$tg\,\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad , \quad tg\,x = a\ ,\ a \in R \ \Rightarrow\ x = tg^{-1} a + k \cdot \pi\ ,\ k \in Z.$$

$$\sin x = 0 \ \Rightarrow\ x = \sin^{-1} 0 \ \Rightarrow\ x = k \cdot \pi\ ,\ k \in Z.$$

Sinus razlike

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

1.inačica

$$\sin 3x \cdot \cos x = \cos 3x \cdot \sin x \ \Rightarrow\ \sin 3x \cdot \cos x = \cos 3x \cdot \sin x \ /\cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos 3x} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{\sin x}{\cos x} \ \Rightarrow\ tg\,3x = tg\,x \ \Rightarrow\ 3 \cdot x = x + k \cdot \pi\ ,\ k \in Z \ \Rightarrow\ 3 \cdot x - x = k \cdot \pi\ ,\ k \in Z \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2 \cdot x = k \cdot \pi\ ,\ k \in Z \ \Rightarrow\ 2 \cdot x = k \cdot \pi \ /:2\ ,\ k \in Z \ \Rightarrow\ x = k \cdot \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in Z.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$\sin 3x \cdot \cos x = \cos 3x \cdot \sin x \ \Rightarrow\ \sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x = 0 \ \Rightarrow\ \sin(3 \cdot x - x) = 0 \ \Rightarrow\ \sin 2x = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2 \cdot x = \sin^{-1} 0 \ \Rightarrow\ 2 \cdot x = k \cdot \pi\ ,\ k \in Z \ \Rightarrow\ 2 \cdot x = k \cdot \pi \ /:2\ ,\ k \in Z \ \Rightarrow\ x = k \cdot \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in Z.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 206

Sva rješenja jednadžbe $\sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \sin x$ pripadaju skupu:

$A.\ k \cdot \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in Z \qquad B.\ k \cdot \frac{\pi}{4}\ ,\ k \in Z \qquad C.\ k \cdot \pi\ ,\ k \in Z \qquad D.\ (2 \cdot k + 1) \cdot \pi\ ,\ k \in Z$

Rezultat: C.

Zadatak 207 (Jasna, srednja škola)

Ako je $\sin x = a - \cos x$, onda je $\sin 2x$ jednako:

$A.\ 1 \qquad B.\ a + 1 \qquad C.\ a^2 + 1 \qquad D.\ a^2 - 1$

Rješenje 207

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad , \quad \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\sin x = a - \cos x \ \Rightarrow\ \sin x + \cos x = a \ \Rightarrow\ \sin x + \cos x = a \ /^2 \ \Rightarrow\ (\sin x + \cos x) = a^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = a^2 \ \Rightarrow \ \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = a^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = a^2 \ \Rightarrow \ 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = a^2 - 1 \ \Rightarrow \ \sin 2x = a^2 - 1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 207

Ako je $\sin x = 1 - \cos x$, onda je $\sin 2x$ jednako:

$A.\ 1 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 0$

Rezultat: D.

Zadatak 208 (Ana, srednja škola)

Ako je $tg\,\alpha + ctg\,\alpha = p$, koliko je $tg^2\,\alpha + ctg^2\,\alpha$?

$A.\ p^2 + 1 \qquad B.\ p^2 - 1 \qquad C.\ p^2 + 2 \qquad D.\ p^2 - 2$

Rješenje 208

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1.$$

$$tg\,\alpha + ctg\,\alpha = p \ \Rightarrow \ tg\,\alpha + ctg\,\alpha = p \ /^2 \ \Rightarrow \ (tg\,\alpha + ctg\,\alpha)^2 = p^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ tg^2\,\alpha + 2 \cdot tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha + ctg^2\,\alpha = p^2 \ \Rightarrow \ tg^2\,\alpha + 2 \cdot 1 + ctg^2\,\alpha = p^2 \ \Rightarrow \ tg^2\,\alpha + 2 + ctg^2\,\alpha = p^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ tg^2\,\alpha + ctg^2\,\alpha = p^2 - 2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 208

Ako je $tg\,\alpha + ctg\,\alpha = 5$, koliko je $tg^2\,\alpha + ctg^2\,\alpha$?

$A.\ 21 \qquad B.\ 23 \qquad C.\ 25 \qquad D.\ 20$

Rezultat: B.

Zadatak 209 (Davor, srednja škola)

Ako je $\alpha + \beta = 90^0$, onda je $\dfrac{\sin\alpha + \cos\beta}{\sin\beta + \cos\alpha} = tg\,\alpha$. Dokaži to!

Rješenje 209

Ponovimo!

$$\cos\left(90^0 - x\right) = \sin x \quad , \quad \sin\left(90^0 - x\right) = \cos x \quad , \quad tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\sin\beta + \cos\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta = 90^0 \\ \beta = 90^0 - \alpha \end{bmatrix} = \frac{\sin\alpha + \cos\left(90^0 - \alpha\right)}{\sin\left(90^0 - \alpha\right) + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos\alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \cos\alpha} = \frac{2 \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha.$$

Vježba 209

Ako je $\alpha + \beta = 90^0$, onda je $\dfrac{\sin\beta + \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\beta} = ctg\,\alpha$. Dokaži to!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 210 (Josipa, srednja škola)

Pojednostavnite: $\frac{1+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$.

Rješenje 210

Ponovimo!

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot(\sin\alpha+1)}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot(1+\sin\alpha)}{1+\sin\alpha}=\sin\alpha.$$

2.inačica

$$\frac{1+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot(\sin\alpha+1)}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot(1+\sin\alpha)}{1+\sin\alpha}=\sin\alpha.$$

Vježba 210

Pojednostavnite: $\frac{1+\cos\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Rezultat: cos α.

Zadatak 211 (Emrah, srednja škola)

Izračunaj: $\sin\left(-690^0\right)$.

Rješenje 211

Ponovimo!

$$\sin 30^0=\frac{1}{2}.$$

Neparna funkcija

Za funkciju $f : D \to R$ kažemo da je neparna ako za svaki $x \in D$ vrijedi

$$f(-x)=-f(x).$$

Neparnost sinusa

Za svaki realni broj x vrijedi

$$\sin(-x)=-\sin x,$$

tj. sinus je neparna funkcija.

Periodične funkcije

Funkcija f je periodična ako postoji realni broj P > 0 takav da za svaki $x \in D$ (x element iz domene funkcije) vrijedi

$$f(x+P)=f(x).$$

Broj P zove se period funkcije f. Najmanji takav pozitivni broj, ako postoji, zove se temeljni period funkcije f. Općenito, ako postoji P period funkcije f, onda je i svaki višekratnik k · P, $k \in N$ period te funkcije.

$$f(x+k\cdot P)=f(x) \quad , \quad k \in N.$$

Periodičnost funkcije sinus

Trigonometrijska funkcija sinus periodična je funkcija sa temeljnim periodom 360° (ili 2 · π rad).

$$\sin\left(\alpha + k \cdot 360^{0}\right) = \sin\alpha \ \ , \ \ k \in Z.$$

Formula redukcije

$$\sin\left(360^{0} - \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

Najprije 690 podijelimo sa 360 kako bismo odredili k

$$690 : 360 = 1 \rightarrow k$$

$$330 \rightarrow \alpha$$

Sada računamo.

$$\sin\left(-690^{0}\right) = -\sin 690^{0} = -\sin\left(330^{0} + 1 \cdot 360^{0}\right) = -\sin 330^{0} = -\sin\left(360^{0} - 30^{0}\right) =$$

$$= -\left(-\sin 30^{0}\right) = \sin 30^{0} = \frac{1}{2}.$$

Vježba 211

Izračunaj: $\sin\left(-1050^{0}\right)$.

Rezultat: $\frac{1}{2}.$

Zadatak 212 (Emrah, srednja škola)

Ako je $\sin x = \frac{3}{7}, \ 0^{0} < x < 90^{0}$, odredi $\cos 2x$.

Rješenje 212

Ponovimo!

Osnovni trigonometrijski identitet

$$\cos^{2}\alpha + \sin^{2}\alpha = 1.$$

Funkcija dvostrukog argumenta

$$\cos 2\alpha = \cos^{2}\alpha - \sin^{2}\alpha.$$

Predznaci funkcija sinus i kosinus u prvom kvadrantu

	Prvi kvadrant $0^{0} < \alpha < 90^{0}$
sin α	+
cos α	+

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2} = \frac{a^{2}}{b^{2}} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{a^{2}} = a \ \ , \ \ a \geq 0.$$

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2} = a.$$

1.inačica

Pomoću osnovnog trigonometrijskog identiteta izračunamo cos x.

$$\left.\begin{matrix} \cos^{2}x + \sin^{2}x = 1 \\ \sin x = \frac{3}{7} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cos^{2}x + \left(\frac{3}{7}\right)^{2} = 1 \Rightarrow \cos^{2}x + \frac{9}{49} = 1 \Rightarrow \cos^{2}x = 1 - \frac{9}{49} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1} - \frac{9}{49} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{49-9}{49} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{40}{49} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{40}{49} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{40}{49}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{prvi} \\ \text{kvadrant} \end{bmatrix} \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{40}{49}} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{49}} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{7^2}} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{40}}{7}.$$

Sada je:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = \left(\frac{\sqrt{40}}{7}\right)^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow \cos 2x = \frac{\left(\sqrt{40}\right)^2}{7^2} - \frac{3^2}{7^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{40}{49} - \frac{9}{49} \Rightarrow \cos 2x = \frac{31}{49}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{matrix} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\cdot\sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\cdot\frac{9}{49} \Rightarrow \cos 2x = 1 - \frac{18}{49} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{1} - \frac{18}{49} \Rightarrow \cos 2x = \frac{49-18}{49} \Rightarrow \cos 2x = \frac{31}{49}.$$

Vježba 212

Ako je $\sin x = \frac{4}{7}$, $0^0 < x < 90^0$, odredi $\cos 2x$.

Rezultat: $\frac{17}{49}$.

Zadatak 213 (Emrah, srednja škola)

Ako je $\cos x = \frac{1}{2}$, $270^0 < x < 360^0$, odredi $\sin 2x$.

Rješenje 213

Ponovimo!

Osnovni trigonometrijski identitet

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Funkcija dvostrukog argumenta

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Predznaci funkcija sinus i kosinus u četvrtom kvadrantu

	Četvrti kvadrant $270^0 < \alpha < 360^0$
sin α	-
cos α	+

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d - b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \; , \; a \ge 0.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Pomoću osnovnog trigonometrijskog identiteta izračunamo sin x.

$$\left.\begin{matrix} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4-1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \,/\sqrt{\ } \Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{četvrti} \\ \text{kvadrant} \end{bmatrix} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2}} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sada je:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin 2x = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vježba 213

Ako je $\cos x = \frac{3}{5},\ 270^0 < x < 360^0$, odredi $\sin 2x$.

Rezultat: $-\frac{24}{25}.$

Zadatak 214 (Ivana, gimnazija)

Ako je $tg\ x + ctg\ x = p,\ p \neq 0$ koliko je $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$?

Rješenje 214

Ponovimo!

$$tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1.$$

1.inačica

Transformiramo zadanu jednakost.

$$tg\ x + ctg\ x = p \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = p \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} = p \Rightarrow \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = p. \qquad (1)$$

Sada je:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \left(\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\right)^2 = \begin{bmatrix} \text{zbog} \\ (1) \end{bmatrix} = p^2.$$

2.inačica

Kvadriramo zadanu jednakost.

$$tg\ x + ctg\ x = p \Rightarrow tg\ x + ctg\ x = p \,/^2 \Rightarrow (tg\ x + ctg\ x)^2 = p^2 \Rightarrow tg^2 x + 2 \cdot tg\ x \cdot ctg\ x + ctg^2 x = p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^2 x + 2\cdot 1 + ctg^2 x = p^2 \Rightarrow tg^2 x + 2 + ctg^2 x = p^2 \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{1} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^4 x + 2\cdot\cos^2 x\cdot\sin^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = p^2 \Rightarrow \frac{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = p^2 \Rightarrow \frac{1^2}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x} = p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = p^2.$$

Vježba 214

Ako je $tg\, x + ctg\, x = 3,$ koliko je $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$?

Rezultat: 9.

Zadatak 215 (Katarina, srednja škola)

Dokaži identitet: $\cos^4 x + \sin^2 x\cdot\cos^2 x + \sin^2 x + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Rješenje 215

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad , \quad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Transformiramo lijevu stranu identiteta i dobijemo desnu stranu.

$$\cos^4 x + \sin^2 x\cdot\cos^2 x + \sin^2 x + tg^2 x = \cos^2 x\cdot\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) + \sin^2 x + tg^2 x =$$

$$= \cos^2 x\cdot 1 + \sin^2 x + tg^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x + tg^2 x = 1 + tg^2 x = \frac{1}{1} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vježba 215

Dokaži identitet: $\cos^4 x + \sin^2 x\cdot\cos^2 x + \sin^2 x + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 216 (Katarina, srednja škola)

Dokaži identitet: $\frac{\sin^2 x}{\cos x\cdot(1 + tg\, x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x\cdot(1 + ctg\, x)} = \sin x - \cos x.$

Rješenje 216

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Transformiramo lijevu stranu identiteta i dobijemo desnu stranu.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x\cdot(1+tg\,x)}-\frac{\cos^2 x}{\sin x\cdot(1+ctg\,x)}=\frac{\sin^2 x}{\cos x\cdot\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)}-\frac{\cos^2 x}{\sin x\cdot\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)}=$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\cos x+\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}-\frac{\cos^2 x}{\sin x+\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\sin^2 x}{\cos x+\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}-\frac{\cos^2 x}{\sin x+\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}=$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\cos x+\sin x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}-\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x+\cos x}=$$

$$=\frac{(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\frac{(\sin x-\cos x)\cdot(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\sin x-\cos x.$$

Vježba 216

Dokaži identitet: $\dfrac{\cos^2 x}{\sin x\cdot(1+ctg\,x)}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x\cdot(1+tg\,x)}=\cos x-\sin x.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 217 (Antun, srednja škola)

Uz koji uvjet za realni broj m ≠ 0 jednadžba m · sin x – 1 = 0 ima rješenja?

$A.\ m\in R\setminus\{0\}$ $\quad B.\ m\in R\setminus[-1,1]$ $\quad C.\ m\in R\setminus\langle -1,1\rangle$ $\quad D.\ m\in[-1,1]\setminus\{0\}$

Rješenje 217

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}\ \Rightarrow\ \frac{b}{a}\ge\frac{d}{c}\quad,\quad n=\frac{n}{1}.$$

Funkcija sinus definirana je na skupu R, a kodomena je $[-1,1]$.

$$\sin : R\to[-1,1]$$
$$x\mapsto\sin x.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.
Apsolutna vrijednost količnika dvaju brojeva jednaka je količniku apsolutnih vrijednosti tih brojeva, za broj b ≠ 0 vrijedi:

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

$$|x|\le a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ x\le -a \text{ i } x\ge a.$$

Za funkciju f(x) = sin x vrijedi

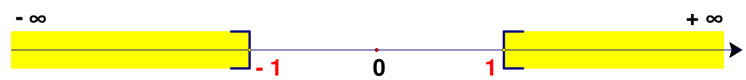
$$|\sin x|\le 1$$

pa možemo pisati:

$$m \cdot \sin x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; m \cdot \sin x = 1 \;\Rightarrow\; m \cdot \sin x = 1 \;/\cdot \frac{1}{m} \;\Rightarrow\; \sin x = \frac{1}{m}.$$

Dalje vrijedi:

$$\left|\sin x\right| \le 1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{m}\right| \le 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\left|m\right|} \le 1 \;\Rightarrow\; \left|m\right| \ge 1 \;\Rightarrow\; m \le -1 \text{ i } m \ge 1.$$



Uvjet za realni broj m glasi:

$$m \in R \setminus \left\langle -1, 1 \right\rangle.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 217

Uz koji uvjet za realni broj m ≠ 0 jednadžba m · sin x – 1 = 0 nema rješenja?

$A.\ m \in \left\langle -1, 1 \right\rangle \setminus \{0\}$ $\qquad B.\ m \in [-1, 1]$ $\qquad C.\ m \in \left\langle -1, 1 \right\rangle$ $\qquad D.\ m \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

Rezultat: A.

Zadatak 218 (Irena, gimnazija)

Koje je rješenje jednadžbe

$\sin(x-\pi)\cdot\sin(x+2\cdot\pi) = 3\cdot\cos(x+3\cdot\pi)\cdot\cos(x-4\cdot\pi)$ iz intervala $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$?

Rješenje 218

Ponovimo!

Sinus razlike

$$\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y.$$

Kosinus zbroja

$$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y.$$

Periodične funkcije

Funkcija f je periodična ako postoji realni broj P > 0 takav da za svaki $x \in D$ (x element iz domene funkcije) vrijedi

$$f(x+P) = f(x).$$

Broj P zove se period funkcije f. Najmanji takav pozitivni broj, ako postoji, zove se temeljni period funkcije f. Općenito, ako postoji P period funkcije f, onda je i svaki višekratnik k · P, $k \in N$ period te funkcije.

$$f(x+k\cdot P) = f(x) \;,\; k \in N.$$

Periodičnost funkcije sinus

Trigonometrijska funkcija sinus periodična je funkcija sa temeljnim periodom 360° (ili 2 · π rad).

$$\sin(\alpha + k\cdot 2\cdot\pi) = \sin\alpha \;,\; k \in Z.$$

Trigonometrijska funkcija kosinus periodična je funkcija sa temeljnim periodom 360° (ili 2 · π rad).

$$\cos(\alpha + k\cdot 2\cdot\pi) = \cos\alpha \;,\; k \in Z.$$

Tangens je periodična funkcija s temeljnim periodom π ili 180°.

$$tg(\alpha + k\cdot\pi) = tg\,\alpha,\; k \in Z \quad , \quad tg\left(\alpha + k\cdot 180^0\right) = tg\,\alpha,\; k \in Z.$$

Ponovimo predznake trigonometrijskih funkcija u sva četiri kvadranta!

	I. kvadrant	II. kvadrant	III. kvadrant	IV. kvadrant
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
ctg	+	—	+	—

Trigonometrijska jednadžba tg x = a

Skup rješenja jednadžbe $tg\ x = a,\ a \in R,$ je $\left\{ x_0 + k \cdot \pi : k \in Z \right\},$ gdje je $x_0 \in R$ jedno rješenje te jednadžbe.

$$tg\ x = a \ \Rightarrow\ tg\ x = tg\ x_0 \ \Rightarrow\ x = x_0 + k \cdot \pi \ ,\ k \in Z.$$

$$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad a \le b \ ,\ c > 0 \ \Rightarrow\ a \cdot c \le b \cdot c \quad , \quad a \le b \ \Rightarrow\ a + c \le b + c.$$

$$\cos \pi = -1 \quad , \quad \sin \pi = 0 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Transformiramo zadanu jednadžbu tako da svaki faktor u njoj pojednostavnimo.

- $\sin\left(x - \pi\right) = \sin x \cdot \cos \pi - \cos x \cdot \sin \pi = \sin x \cdot \left(-1\right) - \cos x \cdot 0 = -\sin x - 0 = -\sin x$
- $\sin\left(x + 2 \cdot \pi\right) = \sin x$
- $\cos\left(x + 3 \cdot \pi\right) = \cos\left(\left(x + \pi\right) + 2 \cdot \pi\right) = \cos\left(x + \pi\right) = \cos x \cdot \cos \pi - \sin x \cdot \sin \pi =$
  $= \cos x \cdot \left(-1\right) - \sin x \cdot 0 = -\cos x - 0 = -\cos x$
- $\cos\left(x - 4 \cdot \pi\right) = \cos\left(x - 2 \cdot 2 \cdot \pi\right) = \cos x.$

Dalje slijedi:

$$\sin\left(x - \pi\right) \cdot \sin\left(x + 2 \cdot \pi\right) = 3 \cdot \cos\left(x + 3 \cdot \pi\right) \cdot \cos\left(x - 4 \cdot \pi\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -\sin x \cdot \le \sin x = 3 \cdot \left(-\cos x\right) \cdot \cos x \ \Rightarrow\ -\sin^2 x = -3 \cdot \cos^2 x \ \Rightarrow\ -\sin^2 x = -3 \cdot \cos^2 x \ / \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3 \ \Rightarrow\ tg^2\ x = 3 \ \Rightarrow\ tg^2\ x = 3 \ / \sqrt{\ } \ \Rightarrow\ tg\ x = \pm\sqrt{3} \ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} tg\ x = \sqrt{3} \\ tg\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right\}.$$

Budući da tražimo rješenje jednadžbe iz intervala $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, tj. u drugom kvadrantu, u kojemu je funkcija tangens negativna, smisla ima riješiti samo jednadžbu

$$tg\ x = -\sqrt{3} \ \Rightarrow\ tg\ x = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \ \Rightarrow\ x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \ ,\ k \in Z.$$

Rješenje mora biti u zadanom intervalu pa vrijedi nejednadžba:

$$\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \le \pi \ \Rightarrow\ \frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \le \pi \ / \cdot \frac{6}{\pi} \ \Rightarrow\ 3 \le -2 + 6 \cdot k \le 6 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3 \le -2 + 6 \cdot k \le 6 \ / + 2 \ \Rightarrow\ 3 + 2 \le -2 + 6 \cdot k + 2 \le 6 + 2 \ \Rightarrow\ 5 \le -2 + 6 \cdot k + 2 \le 8 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5 \le 6 \cdot k \le 8 \ \Rightarrow\ 5 \le 6 \cdot k \le 8 \ / \cdot \frac{1}{6} \ \Rightarrow\ \frac{5}{6} \le k \le \frac{8}{6} \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} k \text{ mora biti} \\ \text{cijeli broj} \end{array}\right] \ \Rightarrow\ k = 1.$$

Traženo rješenje iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi \\ k=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+1\cdot\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\pi \Rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{1} \Rightarrow x=\frac{-\pi+3\cdot\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{2\cdot\pi}{3}.$$

Vježba 218

Koje je rješenje jednadžbe

$\sin(x-\pi)\cdot\sin(x+4\cdot\pi)=3\cdot\cos(x+3\cdot\pi)\cdot\cos(x-6\cdot\pi)$ iz intervala $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$?

Rezultat: $x=\frac{2\cdot\pi}{3}.$

Zadatak 219 (Qwer, gimnazija)

Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $tg\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3}$ na intervalu $[0,\ \pi]$?

$A.\ \frac{7\cdot\pi}{6}$ $\quad B.\ \frac{5\cdot\pi}{3}$ $\quad C.\ \frac{19\cdot\pi}{6}$ $\quad D.\ \frac{13\cdot\pi}{3}$

Rješenje 219

Ponovimo!

Trigonometrijska jednadžba

$$tg\,x=tg\,\alpha \Rightarrow x=\alpha+k\cdot\pi\ ,\ k\in Z.$$

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a\le b\le c\ ,\ d\in R \Rightarrow a+d\le b+d\le c+d.$$

$$a\le b\le c\ ,\ d>0 \Rightarrow a\cdot d\le b\cdot d\le c\cdot d.$$

Tražimo rješenja trigonometrijske jednadžbe koja se nalaze na intervalu $[0,\ \pi]$.

$$tg\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\cdot x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\ ,\ k\in Z \Rightarrow 2\cdot x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi \Rightarrow 2\cdot x=\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=\frac{2\cdot\pi}{3}+k\cdot\pi\ /:2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in Z.$$

Budući da su rješenja iz intervala $[0,\ \pi]$, vrijedi nejednadžba:

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2} \\ x\in[0,\ \pi] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2} \\ 0\le x\le\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 0\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}\le\pi \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{nejednadžbi dodamo} \\ \text{broj } -\frac{\pi}{3} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}\le\pi\ /+\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 0+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\le\pi+\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\le\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\le\frac{2\cdot\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\pi}{3}\le k\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{2\cdot\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{nejednadžbu pomnožimo} \\ \text{brojem } \frac{2}{\pi} \end{array}\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{3}\le k\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{2\cdot\pi}{3}\ /\cdot\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\frac{2}{3}\le k\le\frac{4}{3}.$$

Koeficijent k mora biti cijeli broj pa vrijedi:

$$-\frac{2}{3}\le k\le\frac{4}{3} \Rightarrow k\in\{0,\ 1\}.$$

Postoje dva rješenja.

- $$\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2} \\ k=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+0\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3}.$$
- $$\left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{\pi}{2} \\ k=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+1\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{2\cdot\pi+3\cdot\pi}{6} \Rightarrow x_2=\frac{5\cdot\pi}{6}.$$

Zbroj rješenja iznosi:

$$x_1+x_2=\frac{\pi}{3}+\frac{5\cdot\pi}{6} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{2\cdot\pi+5\cdot\pi}{6} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{7\cdot\pi}{6}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 219

Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $tg\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)=tg\,\frac{\pi}{3}$ na intervalu $\left[\,0,\ 2\cdot\pi\,\right]$?

$A.\ \frac{13\cdot\pi}{3}$ $\qquad B.\ \frac{11\cdot\pi}{3}$ $\qquad C.\ \frac{19\cdot\pi}{6}$ $\qquad D.\ \frac{7\cdot\pi}{3}$

Rezultat: A.

Zadatak 220 (Tom, srednja škola)

Ako je x + y = π, odredi vrijednost izraza sin x – sin y.

Rješenje 220

Ponovimo!

$$\sin\pi=0 \quad , \quad \cos\pi=-1 \quad , \quad \cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Sinus razlike

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

Formula pretvorbe

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Računamo vrijednost zadanog izraza pomoću formule za sinus razlike.

$$\sin x-\sin y=\begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ x+y=\pi \\ y=\pi-x\end{bmatrix}=\sin x-\sin(\pi-x)=\sin x-(\sin\pi\cdot\cos x-\cos\pi\cdot\sin x)=$$

$$=\sin x-\sin\pi\cdot\cos x+\cos\pi\cdot\sin x=\sin x-0\cdot\cos x+(-1)\cdot\sin x=\sin x-0-\sin x=\sin x-\sin x=0.$$

2.inačica

Računamo vrijednost zadanog izraza pomoću formule pretvorbe.

$$\sin x-\sin y=2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}=\begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ x+y=\pi \\ y=\pi-x\end{bmatrix}=2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{x-(\pi-x)}{2}=$$

$$=2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{x-\pi+x}{2}=2\cdot\cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{2\cdot x-\pi}{2}=2\cdot0\cdot\sin\frac{2\cdot x-\pi}{2}=0.$$

Vježba 220

Ako je $x + y = 3 \cdot \pi$, odredi vrijednost izraza $\sin x - \sin y$.

Rezultat: 0.