Zadatak 021 (Darjan, medicinska škola)

Izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija broja 2x ako je

$$\sin x=-\frac{60}{61},\ \ x\in\left\langle\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right\rangle.$$

Rješenje 021

Ponovimo trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta!

Za argument 2x vrijede sljedeće formule:

$$\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x\quad,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$tg\ 2x=\frac{2\cdot tg\ x}{1-tg^2\ x}\quad,\quad ctg\ x=\frac{ctg^2\ x-1}{2\cdot ctg\ x}.$$

Iz relacije

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

odredimo cos x pri čemu predznak funkcije ovisi o tome u kojem se kvadrantu nalazi točka E(t). Budući da je četvrti kvadrant, bit će za cos x predznak plus.

Sada računamo:

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

$$\cos^2 x+\left(-\frac{60}{61}\right)^2=1\ \Rightarrow\ \cos^2 x+\frac{3600}{3721}=1\ \Rightarrow\ \cos^2 x=1-\frac{3600}{3721}\ \Rightarrow\ \cos^2 x=\frac{3721-3600}{3721}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos^2 x=\frac{121}{3721}\ \Rightarrow\ \cos^2 x=\frac{121}{3721}\ /\sqrt{\ }\ \ \Rightarrow\ \cos x=\pm\sqrt{\frac{121}{3721}}=\pm\frac{11}{61}.$$

Zbog četvrtog kvadranta rješenje je:

$$\cos x=\frac{11}{61}.$$

Sada redom računamo:

$$\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x=2\cdot\left(-\frac{60}{61}\right)\cdot\frac{11}{61}=-\frac{1320}{3721},$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\left(\frac{11}{61}\right)^2-\left(-\frac{60}{61}\right)^2=\frac{121}{3721}-\frac{3600}{3721}=-\frac{3479}{3721},$$

$$tg\ 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{-\frac{1320}{3721}}{-\frac{3479}{3721}}=\frac{1320}{3479},\qquad ctg\ 2x=\frac{1}{tg\ 2x}=\frac{3479}{1320}.$$

Vježba 021

Izračunaj vrijednosti trigonometrijskih funkcija broja 2x ako je $\sin x=\frac{4}{5},\ x\in\left\langle 0,\ \frac{\pi}{2}\right\rangle.$

Rezultat: $\sin 2x=\frac{24}{25},\ \cos 2x=-\frac{7}{25},\ tg\ 2x=-\frac{24}{7},\ ctg\ 2x=-\frac{7}{24}.$

Zadatak 022 (Ivana, gimnazija)

Riješi jednadžbu: 2sin x – 1 = 0.

Rješenje 022

Jednadžba sin x = a, $a\in R$, ima rješenje ako je $|a|\le 1$. Ukoliko odredimo jedno rješenje **α**, zbog valjanosti formule redukcije

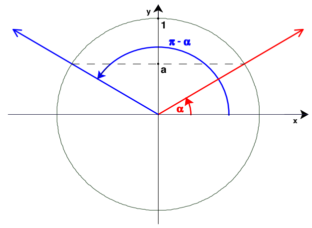
$$\sin(\pi-x)=\sin x,$$

slijedi da je i **π – α** rješenje jednadžbe sin x = a. Budući da je sinus periodičan,

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x,$$

slijedi da su rješenja:

$$x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi \quad , \quad x_2 = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi, \; k \in Z.$$



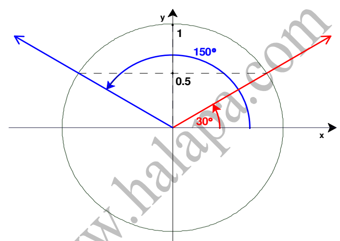
Riješimo zadatak!

$$2\sin x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 2\sin x = 1 \; /:2 \;\Rightarrow\; \sin x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = 30^0.$$

Rješenja su:

$$x_1 = 30^0 + k \cdot 360^0 \quad \text{ili} \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,$$

$$\begin{cases} x_2 = 180^0 - 30^0 + k \cdot 360^0 \\ x_2 = 150^0 + k \cdot 360^0 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x_2 = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \; k \in Z. \end{cases}$$



Vježba 022

Riješi jednadžbu: $\sin x - 0.5 = 0$.

Rezultat: $x_1 = 30^0 + k \cdot 360^0, \; x_2 = 150^0 + k \cdot 360^0, \; k \in Z.$

Zadatak 023 (Petra, gimnazija)

Pojednostavni izraz: $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$.

Rješenje 023

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \left[\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \; \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\right] =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = tg\, x.$$

Vježba 023

Pojednostavni izraz: $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

Rezultat: ctg x.

Zadatak 024 (Petra, gimnazija)

Koliko rješenja ima jednadžba log (cos x) = log (sin x) unutar intervala $\left[0, \; 2\pi\right\rangle$?

Rješenje 024

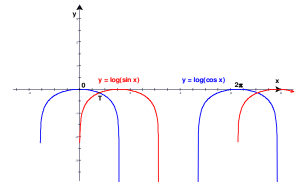
Budući da za funkciju f(x) = log x vrijedi x > 0, mora biti:

$$\cos x > 0 \text{ i } \sin x > 0.$$

Tada je:

$$\log(\cos x) = \log(\sin x) \Rightarrow \cos x = \sin x \ / : \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow tg\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in Z.$$

Na zadanom intervalu $\left[0,\ 2\pi\right\rangle$ je cos x > 0, sin x > 0 i cos x = sin x samo za $x = \frac{\pi}{4}$. Dakle, rješenje je jedno.



Vježba 024

Koliko rješenja ima jednadžba log (cos x) = log (sin x) unutar intervala $\left[0,\ 3\pi\right\rangle$?

Rezultat: Dva rješenja: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{9\pi}{4}$.

Zadatak 025 (Petra, gimnazija)

Ako je cos 2x + 2cos x = 0, koliko je $\cos^2 x + \cos x$?

Rješenje 025

Podsjetimo se formula:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Sada slijedi:

$$\cos 2x + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x = 1 \ / : 2 \Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0.5.$$

Vježba 025

Ako je cos 2x + 2cos x = 1, koliko je $\cos^2 x + \cos x$?

Rezultat: 1.

Zadatak 026 (Martin, gimnazija)

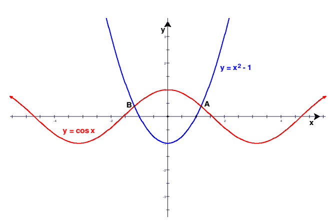
Koliko rješenja ima jednadžba: $\cos x - x^2 + 1 = 0$?

Rješenje 026

Zadanu jednadžbu možemo napisati kao

$$\cos x = x^2 - 1.$$

Skicirajmo grafove funkcija slijeve i zdesne strane!



Iz slike se vidi da se sijeku u dvije točke pa jednadžba ima dva rješenja.

Vježba 026

Koliko rješenja ima jednadžba: $\cos x - x^2 = 0$?

Rezultat: 2.

Zadatak 027 (Marko, gimnazija)

Koji je osnovni period funkcije $f(x) = \sin^4 x$?

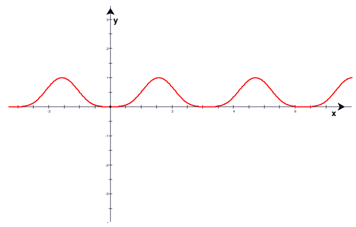
Rješenje 027

1. inačica

Ako je P period funkcije f(x), onda vrijedi **f(x + P) = f(x)** za svaki $x \in R$. Prema tome, ako je P period funkcije $f(x) = \sin^4 x$, onda vrijedi $\sin^4 (x + P) = \sin^4 x$ za svaki $x \in R$. Posebno za x = 0 dobivamo sin P = 0. Zaključujemo da period funkcije f(x) reba tražiti među brojevima $P = k \cdot \pi$, $k \in N$. Za k = 1 dobivamo $P = \pi$:

$$\sin^4 (x + \pi) = \sin^4 x \quad \Rightarrow \quad T = \pi,$$

što je osnovni period funkcije $f(x) = \sin^4 x$.



2. inačica

Zadatak smo mogli riješiti i ovako:

$$f(x) = \sin^4 x = \frac{1}{8} \cdot (\cos 4x - 4 \cdot \cos 2x + 3).$$

Ponovimo! Osnovni perid funkcije f(x) = cos x jednak je 2π:

$$\cos (x + k \cdot 2\pi) = \cos x, \ k \in Z.$$

Odredimo osnovni period svake od funkcija cos 4x i cos 2x:

- $\cos 4x = \cos 4 \cdot (x + P) = \cos(4x + 4P) \ \Rightarrow \ 4P = 2\pi \ \Rightarrow \ P = \frac{\pi}{2}.$
- $\cos 2x = \cos 2 \cdot (x + P) = \cos(2x + 2P) \ \Rightarrow \ 2P = 2\pi \ \Rightarrow \ P = \pi.$

Zaključujemo da je osnovni period funkcije $f(x) = \sin^4 x$ jednak π.

Vježba 027

Koji je osnovni period funkcije $f(x) = \cos^4 x$?

Rezultat: $P = \pi$.

Zadatak 028 (Marko, gimnazija)

Zadana je funkcija $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. Ako je $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, nađite f(α).

Rješenje 028

$$f(\alpha) = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \sin^4 \alpha + 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= \left(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha\right)^2 - 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot (\sin 2\alpha)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Vježba 028

Zadana je funkcija $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. Ako je sin 2α = 1, nađite f(α).

Rezultat: $\frac{1}{2}$.

Zadatak 029 (Zvončica, gimnazija)

Riješi trigonometrijsku jednadžbu: $2 \cdot \cos^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin x - 2 = 0.$

Rješenje 029

$$2 \cdot \cos^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \left[\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right] \Rightarrow 2 \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) + \sqrt{3} \cdot \sin x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cdot \sin^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin x - 2 = 0 \Rightarrow -2 \cdot \sin^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin^2 x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 0 \Rightarrow \sin x \cdot \left(2 \cdot \sin x - \sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow [a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \quad , \quad 2 \cdot \sin x - \sqrt{3} = 0.$$

I. $\quad \sin x = 0 \Rightarrow x_1 = k \cdot \pi \; , \; k \in Z$

II. $\quad 2 \cdot \sin x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \cdot \sin x = \sqrt{3} \; / : 2 \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Jednadžba sin x = a, $a \in R$, ima rješenje ako je $|a| \le 1$. Ukoliko odredimo jedno rješenje **α**, zbog valjanosti formule redukcije

$$\sin(\pi - x) = \sin x,$$

slijedi da je i **π – α** rješenje jednadžbe sin x = a. Budući da je sinus periodičan,

$$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x,$$

slijedi da su rješenja:

$$x_1 = \alpha + k \cdot 2\pi \quad , \quad x_2 = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi, \; k \in Z.$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \; , \; k \in Z \quad \text{i} \quad x_3 = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \; , \; k \in Z.$$

Vježba 029

Riješi trigonometrijsku jednadžbu: $\sin^2 x - \sin x = 0.$

Rezultat: $\quad x_1 = k \cdot \pi \; , \; k \in Z \quad \text{i} \quad x_2 = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \; , \; k \in Z.$

Zadatak 030 (Nena, gimnazija)

Ako je $\dfrac{1}{tg\,x} + \dfrac{1}{ctg\,x} = 3$ i $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, koliko iznosi $\cos 2x$?

Rješenje 030

$$\frac{1}{tg\,x} + \frac{1}{ctg\,x} = 3 \Rightarrow ctg\,x + tg\,x = 3 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \Rightarrow \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{proširujemo razlomak s } 2] \Rightarrow \frac{2}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = 3 \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 3 \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x \Rightarrow \cos 2x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 0 < 2x < \frac{\pi}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \cos 2x = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Vježba 030

Ako je $\dfrac{1}{tg\,x} + \dfrac{1}{ctg\,x} = 2$ i $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, koliko iznosi $\cos 2x$?

Rezultat: $\quad$ 0.

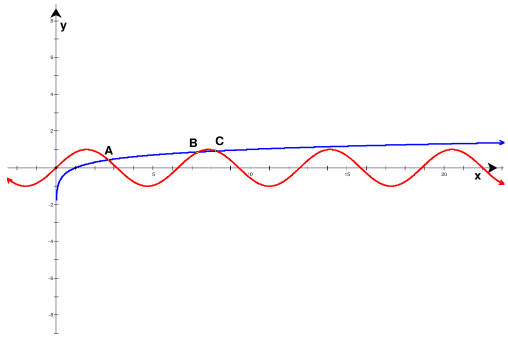
Zadatak 031 (Mirjana, gimnazija)

Broj realnih rješenja jednadžbe sin x = log x iznosi

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5 E. beskonačno

Rješenje 031

Nacrtamo grafove funkcija.



Odgovor je pod C.

Vježba 031

Broj realnih rješenja jednadžbe cos x = log x iznosi

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5 E. beskonačno

Rezultat: Odgovor je pod C.

Zadatak 032 (Barbika, gimnazija)

Ako je $tg^2 x + tg\, x = ctg^2 x + ctg\, x$ i $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, koliko je $\cos^2 x + \cos x$?

Rješenje 032

$$tg^2 x + tg\, x = ctg^2 x + ctg\, x \Rightarrow tg^2 x + tg\, x = \frac{1}{tg^2 x} + \frac{1}{tg\, x} \; / \cdot tg^2 x \Rightarrow tg^4 x + tg^3 x = 1 + tg\, x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^4 x + tg^3 x - tg\, x - 1 = 0 \Rightarrow tg^3 x \cdot (tg\, x + 1) - (tg\, x + 1) = 0 \Rightarrow (tg\, x + 1) \cdot \left(tg^3 x - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg\, x + 1 = 0 \\ tg^3 x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\, x = -1 \\ tg^3 x = 1 \; / \sqrt[3]{\ } \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\, x = -1, \text{ nema smisla jer je } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \\ \qquad \text{u prvom kvadrantu tangens je pozitivan} \\ tg\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Sada je:

$$\cos^2 x + \cos x = \cos^2 \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)}{4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Vježba 032

Ako je $tg^2 x + tg\, x = ctg^2 x + ctg\, x$ i $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, koliko je $\cos^2 x - \cos x$?

Rezultat: $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$.

Zadatak 033 (Anamarija, hotelijerska škola)

Koliko rješenja ima jednadžba $4 \cdot \cos^4 x + 5 \cdot \sin^2 x - 4 = 0$ na segmentu $[0, 2\pi]$?

Rješenje 033

$$4 \cdot \cos^4 x + 5 \cdot \sin^2 x - 4 = 0 \Rightarrow \left[\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right] \Rightarrow 4 \cdot \cos^4 x + 5 \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\cos^4 x+5-5\cdot\cos^2 x-4=0 \Rightarrow 4\cdot\cos^4 x-5\cdot\cos^2 x+1=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{bikvadratna jednadžba} \\ \text{supstitucija} \\ t=\cos^2 x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot t^2-5\cdot t+1=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot 4}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{5\pm 3}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ t_1=\frac{5+3}{8}=\frac{8}{8}=1 \quad , \quad t_2=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}. \right.$$

Rješenja su:

$$\cos^2 x=1 \;/\sqrt{} \Rightarrow \cos x=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=1 \Rightarrow x_1=0,\; x_2=2\pi \\ \cos x=-1 \Rightarrow x_3=\pi, \end{cases}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{4} \;/\sqrt{} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x_4=\frac{\pi}{3},\; x_5=\frac{5\pi}{3} \\ \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x_6=\frac{2\pi}{3},\; x_7=\frac{4\pi}{3}. \end{cases}$$

Ima sedam rješenja.

Vježba 033

Koliko rješenja ima jednadžba $4\cdot\cos^4 x+5\cdot\sin^2 x-4=0$ na segmentu $[0,\pi]$?

Rezultat: Ima četiri rješenja.

Zadatak 034 (Anamarija, hotelijerska škola)

Pojednostavnite: $\dfrac{\cos^4 x-2\cdot\sin x\cdot\cos x-\sin^4 x}{1-tg\,2x}$.

Rješenje 034

$$\frac{\cos^4 x-2\cdot\sin x\cdot\cos x-\sin^4 x}{1-tg\,2x}=\frac{\cos^4 x-\sin^4 x-2\cdot\sin x\cdot\cos x}{1-\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\frac{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cdot\overbrace{\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}^{1}-\sin 2x}{\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x}}=$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x}{\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x}}=\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x}}=\frac{\frac{\cos 2x-\sin 2x}{1}}{\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x}}=\cos 2x.$$

Vježba 034

Pojednostavnite: $\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\cos 2x}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 035 (Anamarija, hotelijerska škola)

Ako su $tg\,\alpha$ i $tg\,\beta$ korijeni jednadžbe $ax^2+bx+c=0$ $(a, b, c\in R)$ i $a\neq 0$, koliko je $tg(\alpha+\beta)$?

Rješenje 035

Uporabit ćemo Vièteove formule. Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$ax^2+bx+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Budući da su $tg\,\alpha$ i $tg\,\beta$ korijeni jednadžbe $ax^2+bx+c=0$, slijedi:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}=\begin{bmatrix} tg\,\alpha+tg\,\beta=-\frac{b}{a} \\ tg\,\alpha\cdot tg\,\beta=\frac{c}{a}\end{bmatrix}=\frac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{a-c}{a}}=-\frac{b}{a-c}=\frac{b}{c-a}.$$

Vježba 035

Ako su $tg\,\alpha$ i $tg\,\beta$ korijeni jednadžbe $ax^2-bx+c=0\ (a, b, c\in R)$ i $a\neq 0$, koliko je $tg(\alpha+\beta)$?

Rezultat: $\frac{b}{a-c}.$

Zadatak 036 (Anamarija, hotelijerska škola)

Ako je $\sin^4 x-2\cdot\sin^2 x=-1$ i $\cos^4 x-2\cdot\cos^2=a$, koliko je a?

Rješenje 036

$$\sin^4 x-2\cdot\sin^2 x=-1\ \Rightarrow\ \sin^4 x-2\cdot\sin^2 x+1=0\ \Rightarrow\ \left(\sin^2 x-1\right)^2=0\ \Rightarrow\ \sin^2 x-1=0\ \Rightarrow\ \sin^2 x=1.$$

Tada je a jednako:

$$\cos^4 x-2\cdot\cos^2 x=a\ \Rightarrow\ \left(\cos^2 x\right)^2-2\cdot\cos^2 x=a\ \Rightarrow\ \left[\cos^2 x+\sin^2 x=1\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(1-\sin^2 x\right)^2-2\cdot\left(1-\sin^2 x\right)=a\ \Rightarrow\ (1-1)^2-2\cdot(1-1)=a\ \Rightarrow\ a=0.$$

Vježba 036

Ako je $\sin^4 x-2\cdot\sin^2 x=-1$ i $\cos^4 x-2\cdot\cos^2=a-1$, koliko je a?

Rezultat: 1.

Zadatak 037 (Anamarija, hotelijerska škola)

Nađite broj realnih korijena jednadžbe $\sin x=\frac{|x|}{x}$ u intervalu $\langle -6\pi, 6\pi\rangle$.

Rješenje 037

Za x < 0 vrijedi $|x|=-x$ pa je $\sin x=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1.$

Rješenja jednadžbe sin x = – 1 su: $x=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z.$

Na intervalu $\langle -6\pi, 6\pi\rangle$ rješenja su: $-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{9\pi}{2}.$

Za x > 0 vrijedi $|x|=x$ pa je $\sin x=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1.$

Rješenja jednadžbe sin x = 1 su: $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z.$

Na intervalu $\langle -6\pi, 6\pi\rangle$ rješenja su: $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}.$

Broj realnih korijena je šest.

Vježba 037

Nađite broj realnih korijena jednadžbe $\sin x=\frac{|x|}{x}$ u intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Rezultat: Broj realnih korijena je dva.

Zadatak 038 (Tomislav, tehnička škola)

Ako je sin α + cos β = m i cos α – cos β = n koliko je sin 2α?

Rješenje 038

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha+\cos\beta=m\\ \cos\alpha-\cos\beta=n\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\text{zbrojimo jednadžbe}\right] \Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha=m+n \Rightarrow \left[\text{kvadriramo}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=(m+n)^2 \Rightarrow \sin^2\alpha+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=(m+n)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\\ 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha\end{array}\right] \Rightarrow 1+\sin 2\alpha=(m+n)^2 \Rightarrow \sin 2\alpha=(m+n)^2-1.$$

Vježba 038

Ako je sin α + cos β = m i cos α – cos β = m koliko je sin 2α?

Rezultat: $4m^2-1.$

Zadatak 039 (Ivan, tehnička škola)

Odredi skup rješenja jednadžbe $\sqrt{2}\cdot\sin x-\cos^2 x=\sin^2 x.$

Rješenje 039

$$\sqrt{2}\cdot\sin x-\cos^2 x=\sin^2 x \Rightarrow \sqrt{2}\cdot\sin x=\sin^2 x+\cos^2 x \Rightarrow \left[\cos^2 x+\sin^2 x=1\right] \Rightarrow \sqrt{2}\cdot\sin x=1 \,/:\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}} \,/\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi \quad , \quad x_2=\pi-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi=\frac{3\pi}{4}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z.$$

Vježba 039

Odredi skup rješenja jednadžbe $\sin x-\cos^2 x=\sin^2 x.$

Rezultat: $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\ k\in Z.$

Zadatak 040 (Tomislav, tehnička škola)

Izračunaj log(cos 70º) – log(sin 20º).

Rješenje 040

Ponovimo: $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}.$

$$\log\left(\cos 70^0\right)-\log\left(\sin 20^0\right)=\log\frac{\cos 70^0}{\sin 20^0}=\left[\sin\alpha=\cos\left(90^0-\alpha\right)\right]=\log\frac{\cos 70^0}{\cos 70^0}=\log 1=0.$$

Vježba 040

Izračunaj log(cos 50º) – log(sin 40º).

Rezultat: 0.