

Zadatak 501 (Katarina, maturantica)

Riješi jednađbu $\frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{1000} = 0.01$.

Rješenje 501

Ponovimo!

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$100 = 10^2 \quad , \quad 1000 = 10^3 \quad , \quad 0.1 = 10^{-1} \quad , \quad 0.01 = 10^{-2} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, 10000, ...) tako da mu decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.

1. inačica

$$\begin{aligned} \frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{1000} = 0.01 &\Rightarrow \frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{1000} = 0.01 \cdot 1000 \Rightarrow 10^{2 \cdot x} \cdot 100^x = 10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10^{2 \cdot x} \cdot (10^2)^x = 10 \Rightarrow 10^{2 \cdot x} \cdot 10^{2 \cdot x} = 10 \Rightarrow 10^{2 \cdot x + 2 \cdot x} = 10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10^{4 \cdot x} = 10^1 \Rightarrow 4 \cdot x = 1 \Rightarrow 4 \cdot x = 1 \quad / : 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{1000} = 0.01 &\Rightarrow \frac{10^{2 \cdot x} \cdot (10^2)^x}{10^3} = 10^{-2} \Rightarrow \frac{10^{2 \cdot x} \cdot 10^{2 \cdot x}}{10^3} = 10^{-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10^{2 \cdot x} \cdot 10^{2 \cdot x} \cdot 10^{-3} = 10^{-2} \Rightarrow 10^{2 \cdot x + 2 \cdot x - 3} = 10^{-2} \Rightarrow 10^{4 \cdot x - 3} = 10^{-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4 \cdot x - 3 = -2 \Rightarrow 4 \cdot x = -2 + 3 \Rightarrow 4 \cdot x = 1 \Rightarrow 4 \cdot x = 1 \quad / : 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} \frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{1000} = 0.01 &\Rightarrow \frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{1000} = 0.01 \cdot 10 \Rightarrow \frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{100} = 0.1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{100^1} = 0.1 \Rightarrow 10^{2 \cdot x} \cdot 100^{x-1} = 10^{-1} \Rightarrow 10^{2 \cdot x} \cdot (10^2)^{x-1} = 10^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10^{2 \cdot x} \cdot 10^{2 \cdot x - 2} = 10^{-1} \Rightarrow 10^{2 \cdot x + 2 \cdot x - 2} = 10^{-1} \Rightarrow 10^{4 \cdot x - 2} = 10^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4 \cdot x - 2 = -1 \Rightarrow 4 \cdot x = -1 + 2 \Rightarrow 4 \cdot x = 1 \Rightarrow 4 \cdot x = 1 \quad / : 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Vježba 501

Riješi jednađbu $\frac{10^{2 \cdot x} \cdot 100^x}{100} = 0.1$.

Rezultat: $x = \frac{1}{4}$.

Zadatak 502 (Milena, maturantica)

Ako je $\log_3 x \cdot \log_x z \cdot \log_z y = \log_x x^2$, onda je y jednak:

- A. 81 B. 27 C. 18 D. 9 E. 4.5

Rješenje 502

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_b b = 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

$$\log_3 x \cdot \log_x z \cdot \log_z y = \log_x x^2 \Rightarrow \log_3 x \cdot \frac{\log_3 z}{\log_3 x} \cdot \frac{\log_3 y}{\log_3 z} = 2 \cdot \log_x x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x \cdot \frac{\log_3 z}{\log_3 x} \cdot \frac{\log_3 y}{\log_3 z} = 2 \cdot 1 \Rightarrow \log_3 y = 2 \Rightarrow y = 3^2 \Rightarrow y = 9.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 502

Ako je $\log_3 x \cdot \log_x z \cdot \log_z y = \log_x x^3$, onda je y jednak:

- A. 81 B. 27 C. 18 D. 9 E. 4.5

Rezultat: B.

Zadatak 503 (Vinko, gimnazija)

Koliko rješenja ima jednačina $\log(\cos x) = \log(\sin x)$ unutar intervala $[0, 2 \cdot \pi)$?

- A. 0 B. 3 C. 1 D. 4 E. 2

Rješenje 503

Ponovimo!

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

Logaritamska funkcija definirana je za pozitivne realne brojeve.

$$f(x) = \log x \Rightarrow x > 0.$$

Trigonometrijska jednačba $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, $a \in \mathbb{R}$

Skup rješenja jednačbe

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a, a \in \mathbb{R}$$

je

$$\{a + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Rasprava!

Funkcija kosinus pozitivna je u prvom i četvrtom kvadrantu.

$$\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ ili } x \in \left\langle \frac{3 \cdot \pi}{2}, 2 \cdot \pi \right\rangle.$$

Funkcija sinus pozitivna je u prvom i drugom kvadrantu.

$$\sin x > 0 \Rightarrow x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ ili } x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle.$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \\ x \in [0, 2 \cdot \pi) \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Riješimo jednačbu!

$$\begin{aligned} \log(\cos x) = \log(\sin x) &\Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \sin x = \cos x \cdot \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \operatorname{tg}^{-1} 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Jednačba ima jedno rješenje.

Odgovor je pod C.

Vježba 503

Koliko rješenja ima jednačba $\log(\cos x) = \log(\sin x)$ unutar intervala $[0, \pi)$?

- A. 0 B. 3 C. 1 D. 4 E. 2

Rezultat: C.

Zadatak 504 (Dona, maturantica)

Čemu je jednak do kraja pojednostavljen izraz $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - 1$ za sve x za koje je definiran?

Rješenje 504

Ponovimo!

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}, \quad a^1 = a, \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - 1 &= \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - \frac{1}{1} = \frac{\cos^2 x - (1 - \sin x)}{1 - \sin x} = \frac{\cos^2 x - 1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x - 1 + \sin x}{1 - \sin x} = \\ &= \frac{1 - \sin^2 x - 1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{-\sin^2 x + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{\sin x - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{\sin x \cdot (1 - \sin x)}{1 - \sin x} = \\ &= \frac{\sin x \cdot (1 - \sin x)}{1 - \sin x} = \sin x. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - 1 &= \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} - 1 = \frac{(1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x)}{1 - \sin x} - 1 = \frac{(1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x)}{1 - \sin x} - 1 = \\ &= 1 + \sin x - 1 = 1 + \sin x - 1 = \sin x. \end{aligned}$$

Vježba 504

Čemu je jednak do kraja pojednostavljen izraz $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - 1$ za sve x za koje je definiran?

Rezultat: $\cos x$.

Zadatak 505 (Valentina, ekonomska škola)

Koja od navedenih nejednadžba ima isti skup rješenja kao i nejednadžba $\left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \frac{49}{16}$?

- A. $5 \cdot x < -2$ B. $5 \cdot x < 2$ C. $5 \cdot x > -2$ D. $5 \cdot x > 2$

Rješenje 505

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad 0 < a < 1 \Rightarrow f(x) < g(x).$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \frac{49}{16} &\Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \left(\frac{7}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \left(\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \left(\frac{4}{7}\right)^{-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[0 < \frac{4}{7} < 1\right] \Rightarrow 5 \cdot x < -2. \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 505

Koja od navedenih nejednadžba ima isti skup rješenja kao i nejednadžba $\left(\frac{3}{5}\right)^{5 \cdot x} > \frac{25}{9}$?

- A. $5 \cdot x < -2$ B. $5 \cdot x < 2$ C. $5 \cdot x > -2$ D. $5 \cdot x > 2$

Rezultat: A.

Zadatak 506 (Branimir, ekonomska škola)

Ako je $\log x + \log y = 3$, $2 \cdot \log x - \log y = 0$, onda je zbroj $x + y$ jednak:

- A. 10 B. 100 C. 110 D. 1000

Rješenje 506

Ponovimo!

$$\left. \begin{array}{l} a^1 = a \\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ a = b \\ c = d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

\rightarrow

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log 1 = 0 \quad , \quad \log 10 = 1 \quad , \quad \log 100 = 2 \quad , \quad \log 1000 = 3 \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ 2 \cdot \log x - \log y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow 3 \cdot \log x = 3 \Rightarrow 3 \cdot \log x = 3 \quad /: 3 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10.$$

Računamo y .

$$\left. \begin{array}{l} x = 10 \\ \log x + \log y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \log 10 + \log y = 3 \Rightarrow 1 + \log y = 3 \Rightarrow \log y = 3 - 1 \Rightarrow \log y = 2 \Rightarrow y = 100.$$

Tada je:

$$x + y = 10 + 100 = 110.$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ 2 \cdot \log x - \log y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ 2 \cdot \log x = \log y \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \log x + 2 \cdot \log x = 3 \Rightarrow 3 \cdot \log x = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot \log x = 3 \quad /: 3 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10.$$

Računamo y .

$$\left. \begin{array}{l} x = 10 \\ \log x + \log y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \log 10 + \log y = 3 \Rightarrow 1 + \log y = 3 \Rightarrow \log y = 3 - 1 \Rightarrow \log y = 2 \Rightarrow y = 100.$$

Tada je:

$$x + y = 10 + 100 = 110.$$

Odgovor je pod C.

3. inačica

$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ 2 \cdot \log x - \log y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log(x \cdot y) = 3 \\ \log x^2 - \log y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \cdot y = 1000 \\ \log \frac{x^2}{y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \cdot y = 1000 \\ \frac{x^2}{y} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \cdot y = 1000 \\ \frac{x^2}{y} = 1 / \cdot y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \cdot y = 1000 \\ x^2 = y \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow x \cdot x^2 = 1000 \Rightarrow x^1 \cdot x^2 = 1000 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x^3 = 1000 / \sqrt[3]{} \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} \Rightarrow x = 10.$$

Računamo y.

$$\left. \begin{array}{l} x = 10 \\ x^2 = y \end{array} \right\} \Rightarrow 10^2 = y \Rightarrow 100 = y \Rightarrow y = 100.$$

Tada je:

$$x + y = 10 + 100 = 110.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 506

Ako je $\log x + \log y = 3$, $2 \cdot \log x - \log y = 0$, onda je razlika $y - x$ jednaka:

A. 90 B. 900 C. 20 D. 0

Rezultat: A.

Zadatak 507 (Dominik, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$.

Rješenje 507

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 = 30 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^x \cdot (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) = 30 \Rightarrow 2^x \cdot (1 + 2 + 4 + 8) = 30 \Rightarrow 2^x \cdot 15 = 30 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^x \cdot 15 = 30 / : 15 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1.$$

2. inačica

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30 \Rightarrow 2^{x+3-3} + 2^{x+3-2} + 2^{x+3-1} + 2^{x+3} = 30 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{x+3} \cdot 2^{-3} + 2^{x+3} \cdot 2^{-2} + 2^{x+3} \cdot 2^{-1} + 2^{x+3} = 30 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{x+3} \cdot (2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} + 1) = 30 \Rightarrow 2^{x+3} \cdot \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + 1 \right) = 30 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2^{x+3} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) &= 30 \Rightarrow 2^{x+3} \cdot \frac{1+2+4+8}{8} = 30 \Rightarrow 2^{x+3} \cdot \frac{15}{8} = 30 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{x+3} \cdot \frac{15}{8} &= 30 \quad / \cdot \frac{8}{15} \Rightarrow 2^{x+3} = 30 \cdot \frac{8}{15} \Rightarrow 2^{x+3} = 30 \cdot \frac{8}{15} \Rightarrow 2^{x+3} = 2 \cdot 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{x+3} &= 16 \Rightarrow 2^{x+3} = 2^4 \Rightarrow x+3=4 \Rightarrow x=4-3 \Rightarrow x=1. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} &= 30 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 = 30 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ 2^x = t \end{array} \right] &\Rightarrow t + 2 \cdot t + 4 \cdot t + 8 \cdot t = 30 \Rightarrow 15 \cdot t = 30 \Rightarrow 15 \cdot t = 30 \quad / : 15 \Rightarrow t = 2. \end{aligned}$$

Vraćamo se zamjeni.

$$\left. \begin{array}{l} t = 2 \\ 2^x = t \end{array} \right\} \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1.$$

Vježba 507

Riješi jednačinu: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 60$.

Rezultat: $x = 2$.

Zadatak 508 (Zlatko, gimnazija)

Riješi jednačinu: $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Rješenje 508

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 &\Rightarrow \log_{2^4} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \log_2 x + \frac{1}{2} \cdot \log_2 x + \log_2 x &= 7 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \log_2 x + \frac{1}{2} \cdot \log_2 x + \log_2 x = 7 \quad / \cdot 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 x + 2 \cdot \log_2 x + 4 \cdot \log_2 x &= 28 \Rightarrow 7 \cdot \log_2 x = 28 \Rightarrow 7 \cdot \log_2 x = 28 \quad / : 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 x = 4 &\Rightarrow x = 2^4 \Rightarrow x = 16. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 \Rightarrow \log_{2^4} x + \frac{2}{2} \cdot \log_{2^2} x + \frac{4}{4} \cdot \log_2 x = 7 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_{16} x + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_4 x + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \log_2 x = 7 &\Rightarrow \log_{16} x + 2 \cdot \log_4 2^x + 4 \cdot \log_2 2^x = 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{16} x + 2 \cdot \log_{16} x + 4 \cdot \log_{16} x = 7 &\Rightarrow 7 \cdot \log_{16} x = 7 \Rightarrow 7 \cdot \log_{16} x = 7 \quad /: 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{16} x = 1 &\Rightarrow x = 16^1 \Rightarrow x = 16. \end{aligned}$$

Vježba 508

Riješi jednadžbu: $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 7$.

Rezultat: $x = 81$.

Zadatak 509 (Nina, gimnazija)

Riješite nejednadžbu: $6^x - 16 \cdot 3^x < 0$.

Rješenje 509

Ponovimo!

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \quad a \cdot b < 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a < 0 \\ b > 0 \end{array} \right\} \text{ ili } \left. \begin{array}{l} a > 0 \\ b < 0 \end{array} \right\}, \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}, \quad a > 1 \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\begin{aligned} 6^x - 16 \cdot 3^x < 0 &\Rightarrow (2 \cdot 3)^x - 16 \cdot 3^x < 0 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x - 16 \cdot 3^x < 0 \Rightarrow 3^x \cdot (2^x - 16) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{broj } 3^x \text{ je pozitivan} \\ 3^x > 0 \end{array} \right] &\Rightarrow 2^x - 16 < 0 \Rightarrow 2^x < 16 \Rightarrow 2^x < 2^4 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow x \in \langle -\infty, 4 \rangle. \end{aligned}$$

Vježba 509

Riješite nejednadžbu: $6^x < 16 \cdot 3^x$.

Rezultat: $x \in \langle -\infty, 4 \rangle$.

Zadatak 510 (Gordana, ekonomska škola)

$$\text{Riješite sustav jednadžbi: } \begin{cases} \log_5 (8 \cdot x) = 1 + \log_5 4 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

Rješenje 510

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a^1 = a$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnometehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b b = 1, \quad b > 0, \quad b \neq 1, \quad \log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y.$$

$$\log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x), \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_5(8 \cdot x) = 1 + \log_5 4 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log_5(8 \cdot x) = \log_5 5 + \log_5 4 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log_5(8 \cdot x) = \log_5(5 \cdot 4) \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log_5(8 \cdot x) = \log_5 20 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8 \cdot x = 20 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 8 \cdot x = 20 \text{ / : } 8 \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{20}{8} \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{20}{8} \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ x^y = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^y = \frac{2}{5} \Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^y = \left(\frac{2}{5} \right)^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^y = \left(\frac{5}{2} \right)^{-1} \Rightarrow y = -1.$$

Rješenje sustava je uređeni par:

$$(x, y) = \left(\frac{5}{2}, -1 \right).$$

Vježba 510

Riješite sustav jednačbi:
$$\begin{cases} \log_5(8 \cdot x) - 1 = \log_5 4 \\ 5 \cdot x^y = 2 \end{cases}.$$

Rezultat:
$$\left(\frac{5}{2}, -1 \right).$$

Zadatak 511 (Željko, ekonomska škola)

Za koji realan broj x je $200 \cdot 10^{1-x} = 2$?

Rješenje 511

Ponovimo!

$$100 = 10^2, \quad 0.01 = 10^{-2}, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^0 = 1.$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x), \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} 200 \cdot 10^{1-x} = 2 &\Rightarrow 2 \cdot 100 \cdot 10^{1-x} = 2 \Rightarrow 2 \cdot 10^2 \cdot 10^{1-x} = 2 \Rightarrow 2 \cdot 10^{2+1-x} = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot 10^{3-x} = 2 \Rightarrow 2 \cdot 10^{3-x} = 2 \text{ / : } 2 \Rightarrow 10^{3-x} = 1 \Rightarrow 10^{3-x} = 10^0 \Rightarrow 3-x = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x = -3 \Rightarrow -x = -3 \text{ / } \cdot (-1) \Rightarrow x = 3. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned}200 \cdot 10^{1-x} = 2 &\Rightarrow 200 \cdot 10^{1-x} = 2 \quad /: 200 \Rightarrow 10^{1-x} = \frac{2}{200} \Rightarrow 10^{1-x} = \frac{2}{200} \Rightarrow \\ \Rightarrow 10^{1-x} = \frac{1}{100} &\Rightarrow 10^{1-x} = \frac{1}{10^2} \Rightarrow 10^{1-x} = 10^{-2} \Rightarrow 1-x = -2 \Rightarrow -x = -2-1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x = -3 \Rightarrow -x = -3 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow x = 3.\end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned}200 \cdot 10^{1-x} = 2 &\Rightarrow 200 \cdot 10^{1-x} = 2 \quad /: 200 \Rightarrow 10^{1-x} = 0.01 \Rightarrow 10^{1-x} = 10^{-2} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1-x = -2 &\Rightarrow -x = -2-1 \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow -x = -3 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow x = 3.\end{aligned}$$

Vježba 511

Za koji realan broj x je $300 \cdot 10^{1-x} = 3$?

Rezultat: $x = 3$.

Zadatak 512 (Lucija, ekonomska škola)

Odredite koordinate točaka u kojima graf funkcije $f(x) = \log_2(x+2)+1$ siječe koordinatne osi.

$$A. \left(-\frac{3}{2}, 0\right), (0, 1) \quad B. \left(-\frac{3}{2}, 0\right), (0, 2) \quad C. \left(\frac{5}{2}, 0\right), (0, 1) \quad D. \left(\frac{5}{2}, 0\right), (0, 2)$$

Rješenje 512

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a . Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b b = 1, \quad \log_b 1 = 0.$$

Ako graf funkcije f siječe y os tada je $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = \log_2(x+2)+1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \log_2(0+2)+1 \Rightarrow f(0) = \log_2 2+1 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0) = \log_2 2+1 \Rightarrow f(0) = 1+1 \Rightarrow f(0) = 2.$$

Točka ima koordinate $(0, 2)$.

Ako graf funkcije f siječe x os tada je $f(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = \log_2(x+2)+1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = \log_2(x+2)+1 \Rightarrow \log_2(x+2)+1 = 0 \Rightarrow \log_2(x+2) = -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x+2 = 2^{-1} \Rightarrow x+2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}-2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}-\frac{2}{1} \Rightarrow x = \frac{1-4}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Točka ima koordinate $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Odgovor je pod B.

Vježba 512

Odredite koordinate točaka u kojima graf funkcije $f(x) = \log_2(x+1) + 1$ siječe koordinatne osi.

A. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), (0, 1)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), (0, 2)$ C. $\left(\frac{3}{2}, 0\right), (0, 1)$ D. $\left(\frac{3}{2}, 0\right), (0, 2)$

Rezultat: A.

Zadatak 513 (Ema, ekonomska škola)

Koja od navedenih nejednadžba ima isti skup rješenja kao i nejednadžba $\left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \frac{49}{16}$?

A. $5 \cdot x < -2$ B. $5 \cdot x < 2$ C. $5 \cdot x > -2$ D. $5 \cdot x > 2$

Rješenje 513

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad 0 < a < 1 \Rightarrow f(x) < g(x).$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \frac{49}{16} \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \left(\frac{7}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \left(\frac{4}{7}\right)^{-2} \Rightarrow \left[0 < \frac{4}{7} < 1\right] \Rightarrow 5 \cdot x < -2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 513

Koja od navedenih nejednadžba ima isti skup rješenja kao i nejednadžba $\left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \frac{16}{49}$?

A. $5 \cdot x < -2$ B. $5 \cdot x < 2$ C. $5 \cdot x > -2$ D. $5 \cdot x > 2$

Rezultat: D.

Zadatak 514 (Mirjana, ekonomska škola)

Zadane su funkcije $f(x) = 3 \cdot x - 2$ i $g(x) = \log(x^2 + 1)$. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $(f \circ g)(x) = 1$?

A. 0 B. 6 C. 9 D. 18

Rješenje 514

Ponovimo!

Kompozicija funkcija f i g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log 10 = 1, \quad \log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) = 1 &\Rightarrow f(g(x)) = 1 \Rightarrow f(g(x)) = 1 \Rightarrow [f(x) = 3 \cdot x - 2] \Rightarrow \\
&\Rightarrow 3 \cdot g(x) - 2 = 1 \Rightarrow 3 \cdot g(x) = 1 + 2 \Rightarrow 3 \cdot g(x) = 3 \Rightarrow 3 \cdot g(x) = 3 \quad / : 3 \Rightarrow g(x) = 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow [g(x) = \log(x^2 + 1)] \Rightarrow \log(x^2 + 1) = 1 \Rightarrow \log(x^2 + 1) = \log 10 \Rightarrow \\
&\Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 10 - 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \quad / \sqrt{} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{9} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Budući da je $x^2 + 1 > 0$ za svaki realan broj x , rješenja jednadžbe su x_1 i x_2 pa vrijedi:

$$x_1 + x_2 = -3 + 3 = 0.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 514

Zadane su funkcije $f(x) = 3 \cdot x - 2$ i $g(x) = \log(x^2 + 1)$. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $(f \circ g)(x) = 4$?

- A. 0 B. 6 C. 9 D. 18

Rezultat: A.

Zadatak 515 (Josip, tehnička škola)

Zadane su funkcije $f(x) = 2 \cdot x + 1$ i $g(x) = 2^x - 9$. Riješite jednadžbu $(f \circ g)(x) = -4^x$.

Rješenje 515

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Kompozicija funkcija f i g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_b b^n = n, \quad \log_b b = 1.$$

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) = -4^x &\Rightarrow g(f(x)) = -4^x \Rightarrow g(f(x)) = -4^x \Rightarrow [g(x) = 2^x - 9] \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2^{f(x)} - 9 = -4^x \Rightarrow 2^{f(x)} - 9 = -4^x \Rightarrow [f(x) = 2 \cdot x + 1] \Rightarrow 2^{2 \cdot x + 1} - 9 = -4^x \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2^{2 \cdot x} \cdot 2^1 - 9 = -4^x \Rightarrow 2 \cdot 2^{2 \cdot x} + 4^x = 9 \Rightarrow 2 \cdot (2^2)^x + 4^x = 9 \Rightarrow 2 \cdot 4^x + 4^x = 9 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 3 \cdot 4^x = 9 \Rightarrow 3 \cdot 4^x = 9 \quad / : 3 \Rightarrow 4^x = 3 \Rightarrow [\text{logaritmiramo}] \Rightarrow 4^x = 3 \quad / \log_4 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \log_4 4^x = \log_4 3 \Rightarrow x = \log_4 3.
\end{aligned}$$

Vježba 515

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 516 (Ivica, tehnička škola)

Što od navedenoga vrijedi za brojeve x, y ako je (x, y) rješenje zadanoga sustava jednačba?

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 \\ 3 \cdot 3^x - 27^y = 0 \end{cases}$$

A. $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$ B. $x - y = \frac{11}{3}$ C. $x \cdot y = 3$ D. $x + y = 4$

Rješenje 516

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad n = \frac{n}{1}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b b = 1, \quad \log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y), \quad \log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \rightarrow K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz \mathbb{R} u \mathbb{R} i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f .

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \log_b x$ je interval realnih brojeva

$$D(f) = \langle 0, +\infty \rangle.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Primijetimo da mora biti $x > 0$ i $y > 0$ jer se nalaze pod znakom logaritma.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \log_4 x + \log_4 y = 1 \\ 3 \cdot 3^x - 27^y = 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{aligned} \log_4 (x \cdot y) = 1 \\ 3^1 \cdot 3^x = 27^y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \log_4 (x \cdot y) = \log_4 4 \\ 3^{1+x} = (3^3)^y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x \cdot y = 4 \\ 3^{1+x} = 3^{3 \cdot y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} x \cdot y = 4 \\ 1+x = 3 \cdot y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x \cdot y = 4 \\ x = 3 \cdot y - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow (3 \cdot y - 1) \cdot y = 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} 3 \cdot y^2 - y = 4 \\ 3 \cdot y^2 - y - 4 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3 \cdot y^2 - y - 4 = 0 \\ a = 3, \quad b = -1, \quad c = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} a=3, b=-1, c=-4 \\ \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \\ & \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{6} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{6} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{6} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{1+7}{6} \\ y_2 &= \frac{1-7}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{8}{6} \\ y_2 &= -\frac{6}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{8}{6} \\ y_2 &= -\frac{6}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{4}{3} \\ y_2 &= -1 \text{ nema smisla zbog } y > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Računamo x.

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{4}{3} \\ x &= 3 \cdot y - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 3 \cdot \frac{4}{3} - 1 \Rightarrow x = 3 \cdot \frac{4}{3} - 1 \Rightarrow x = 4 - 1 \Rightarrow x = 3.$$

Rješenje sustava je

$$(x, y) = \left(3, \frac{4}{3} \right).$$

Uočimo da je

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9}{4}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 516

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 517 (Sirius, medicinska škola)

Automobil je kupljen početkom 2015. godine. Njegova se vrijednost stalno smanjuje tako da je na kraju svake godine za osminu vrijednosti manja od vrijednosti koju je imao na početku te godine. Tijekom koje će godine vrijednost automobila biti prvi put manja od četvrtine kupovne cijene?

Rješenje 517

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1}, \quad a - \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c - b}{c}, \quad a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

→

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

$$\text{Na primjer, } 9\% = \frac{9}{100}, \quad 81\% = \frac{81}{100}, \quad 4.5\% = \frac{4.5}{100}, \quad 0.3\% = \frac{0.3}{100}, \quad p\% = \frac{p}{100}.$$

Pretpostavimo da se početnom iznosu C_0 kamatna stopa p oduzima glavnici na kraju svake godine. Nakon n godina imat ćemo iznos

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

1. inačica

Neka je x početna cijena automobila. Na kraju svake godine za osminu vrijednosti je manja od vrijednosti koju je imao na početku te godine. Zaključujemo:

- na kraju prve godine cijena je

$$x - \frac{1}{8} \cdot x = \frac{7}{8} \cdot x$$

- na kraju druge godine cijena je

$$\frac{7}{8} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot x = \frac{7}{8} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot x$$

- na kraju treće godine cijena je


$$\left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot x - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot x = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot x \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot x$$

...

- na kraju n -te godine cijena je

$$\left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot x.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot x &= \frac{1}{4} \cdot x \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot x = \frac{1}{4} \cdot x \quad /: x \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^n = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^n &= \frac{1}{4} \quad / \log \Rightarrow \log\left(\frac{7}{8}\right)^n = \log\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow n \cdot \log\left(\frac{7}{8}\right) = \log\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow n \cdot \log\left(\frac{7}{8}\right) &= \log\left(\frac{1}{4}\right) \quad /: \log\left(\frac{7}{8}\right) \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{1}{4}\right)}{\log\left(\frac{7}{8}\right)} \Rightarrow \text{

Tijekom jedanaeste godine bit će uvjet ispunjen, tj. godine 2025.$$

2. inačica

Na kraju svake godine za osminu vrijednosti je cijena manja od vrijednosti koju je imao automobil na početku godine. Izrazimo to u postotku.

$$p = \frac{1}{8} \Rightarrow p = 0.125 \Rightarrow p = \frac{12.5}{100} \Rightarrow p = 12.5\%.$$

Uporabom formule

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

dobije se:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{4} \cdot C_0 \\ p &= 12.5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[C_n = C_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \right] \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot C_0 = C_0 \cdot \left(1 - \frac{12.5}{100}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot C_0 = C_0 \cdot \left(1 - \frac{12.5}{100}\right)^n \quad /: C_0 \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(1 - \frac{12.5}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{87.5}{100}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.25 = 0.875^n \Rightarrow 0.875^n = 0.25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow 0.875^n = 0.25 / \log \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 0.875^n = \log 0.25 \Rightarrow n \cdot \log 0.875 = \log 0.25 \Rightarrow n \cdot \log 0.875 = \log 0.25 /: \log 0.875 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 0.25}{\log 0.875} \Rightarrow \Rightarrow n = 10.38.$$

Tijekom jedanaeste godine bit će uvjet ispunjen, tj. godine 2025.

Vježba 517

Automobil je kupljen početkom 2015. godine. Njegova se vrijednost stalno smanjuje tako da je na kraju svake godine za osminu vrijednosti manja od vrijednosti koju je imao na početku te godine. Tijekom koje će godine vrijednost automobila biti prvi put manja od polovine kupovne cijene?

Rezultat: 2020.

Zadatak 518 (Milan, srednja škola)

Riješite jednadžbu $0.01^{3 \cdot x - 6} - 1 = 0$.

Rješenje 518

Ponovimo!

$$0.01 = 10^{-2}, \quad a^0 = 1, \quad a \neq 0, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1. inačica

$$0.01^{3 \cdot x - 6} - 1 = 0 \Rightarrow 0.01^{3 \cdot x - 6} = 1 \Rightarrow (10^{-2})^{3 \cdot x - 6} = 1 \Rightarrow 10^{-2 \cdot (3 \cdot x - 6)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{-6 \cdot x + 12} = 10^0 \Rightarrow -6 \cdot x + 12 = 0 \Rightarrow -6 \cdot x = -12 \Rightarrow -6 \cdot x = -12 /: (-6) \Rightarrow x = 2.$$

2. inačica

$$0.01^{3 \cdot x - 6} - 1 = 0 \Rightarrow 0.01^{3 \cdot x - 6} = 1 \Rightarrow 0.01^{3 \cdot x - 6} = 0.01^0 \Rightarrow 3 \cdot x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = 6 \Rightarrow 3 \cdot x = 6 /: 3 \Rightarrow x = 2.$$

Vježba 518

Riješite jednadžbu $0.01^{2 \cdot x - 4} - 1 = 0$.

Rezultat: $x = 2$.

Zadatak 519 (Docx, maturant)Koliko je $\log(x+31)$ ako je $\log_x 16 + \log_x 9 = 2$?

- A. 1.591 B. 1.633 C. 2.346 D. 3.125

Rješenje 519

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .Baza b logaritma pozitivan je broj različit od 1.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y).$$

Dekadski logaritamLogaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.


$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log 10 = 1.$$

Najprije riješimo jednadžbu.

$$\begin{aligned} \log_x 16 + \log_x 9 = 2 &\Rightarrow \log_x (16 \cdot 9) = 2 \Rightarrow \log_x 144 = 2 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x^2 = 144 / \sqrt{} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{144} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 12 \\ x_2 = -12 \text{ nije rješenje jer mora biti } x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 12. \end{aligned}$$

Sada je

$$\log(x+31) = \log(12+31) = \log 43 = \text{} = 1.633.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 519Koliko je $\log(x-2)$ ako je $\log_x 16 + \log_x 9 = 2$?

- A. 1 B. 0.5 C. 2 D. -1

Rezultat: A.**Zadatak 520 (Amny, maturantica)**Koliko je x ako je $0.625^{2 \cdot y^2 - 3} = 2.56^{0.5 \cdot y}$ i $|x| = y$?**Rješenje 520**

Ponovimo!

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}, \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x , $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x , $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| \geq 0 \quad , \quad |x| = a, a > 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{array} \right\}$$

Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadaska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, ...) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).

$$\begin{aligned} 0.625^{2 \cdot y^2 - 3} &= 2.56^{0.5 \cdot y} \Rightarrow \left(\frac{625}{1000}\right)^{2 \cdot y^2 - 3} = \left(\frac{256}{100}\right)^{0.5 \cdot y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{625}{1000}\right)^{2 \cdot y^2 - 3} = \left(\frac{256}{100}\right)^{0.5 \cdot y} \Rightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^{2 \cdot y^2 - 3} = \left(\frac{64}{25}\right)^{0.5 \cdot y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^{2 \cdot y^2 - 3} = \left(\left(\frac{8}{5}\right)^2\right)^{0.5 \cdot y} \Rightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^{2 \cdot y^2 - 3} = \left(\frac{8}{5}\right)^y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{5}{8}\right)^{2 \cdot y^2 - 3} = \left(\frac{5}{8}\right)^{-y} \Rightarrow 2 \cdot y^2 - 3 = -y \Rightarrow 2 \cdot y^2 + y - 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot y^2 + y - 3 = 0 \\ a = 2, b = 1, c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 2, b = 1, c = -3 \\ y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{4} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{-1 + 5}{4} \\ y_2 = \frac{-1 - 5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{4}{4} \\ y_2 = -\frac{6}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{4}{4} \\ y_2 = -\frac{6}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = -\frac{3}{2} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Sada je

$$|x| = y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x| = 1 \\ |x| = -\frac{3}{2} \text{ nema smisla} \end{array} \right\} \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array} \right\}$$

Vježba 520

Odmor!

Rezultat: ...