Zadatak 501 (Katarina, maturantica)

Riješi jednadžbu $\frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{1000}=0.01.$

Rješenje 501

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad a^{1}=a\quad,\quad a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \Rightarrow\ f(x)=g(x).$$

$$100=10^{2}\quad,\quad 1000=10^{3}\quad,\quad 0.1=10^{-1}\quad,\quad 0.01=10^{-2}\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}.$$

$$\frac{a^{n}}{a^{m}}=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, 10000, …) tako da mu decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.

1.inačica

$$\frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{1000}=0.01\ \Rightarrow\ \frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{1000}=0.01\ /\cdot 1000\ \Rightarrow\ 10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}=10\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10^{2\cdot x}\cdot\left(10^{2}\right)^{x}=10\ \Rightarrow\ 10^{2\cdot x}\cdot 10^{2\cdot x}=10\ \Rightarrow\ 10^{2\cdot x+2\cdot x}=10\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10^{4\cdot x}=10^{1}\ \Rightarrow\ 4\cdot x=1\ \Rightarrow\ 4\cdot x=1\ /:4\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{4}.$$

2.inačica

$$\frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{1000}=0.01\ \Rightarrow\ \frac{10^{2\cdot x}\cdot\left(10^{2}\right)^{x}}{10^{3}}=10^{-2}\ \Rightarrow\ \frac{10^{2\cdot x}\cdot 10^{2\cdot x}}{10^{3}}=10^{-2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10^{2\cdot x}\cdot 10^{2\cdot x}\cdot 10^{-3}=10^{-2}\ \Rightarrow\ 10^{2\cdot x+2\cdot x-3}=10^{-2}\ \Rightarrow\ 10^{4\cdot x-3}=10^{-2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot x-3=-2\ \Rightarrow\ 4\cdot x=-2+3\ \Rightarrow\ 4\cdot x=1\ \Rightarrow\ 4\cdot x=1\ /:4\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{4}.$$

3.inačica

$$\frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{1000}=0.01\ \Rightarrow\ \frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{1000}=0.01\ /\cdot 10\ \Rightarrow\ \frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{100}=0.1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{100^{1}}=0.1\ \Rightarrow\ 10^{2\cdot x}\cdot 100^{x-1}=10^{-1}\ \Rightarrow\ 10^{2\cdot x}\cdot\left(10^{2}\right)^{x-1}=10^{-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10^{2\cdot x}\cdot 10^{2\cdot x-2}=10^{-1}\ \Rightarrow\ 10^{2\cdot x+2\cdot x-2}=10^{-1}\ \Rightarrow\ 10^{4\cdot x-2}=10^{-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot x-2=-1\ \Rightarrow\ 4\cdot x=-1+2\ \Rightarrow\ 4\cdot x=1\ \Rightarrow\ 4\cdot x=1\ /:4\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{4}.$$

Vježba 501

Riješi jednadžbu $\frac{10^{2\cdot x}\cdot 100^{x}}{100}=0.1.$

www.halapa.com

Rezultat: $x = \frac{1}{4}.$

Zadatak 502 (Milena, maturantica)

Ako je $\log_3 x \cdot \log_x z \cdot \log_z y = \log_x x^2$, onda je y jednak:

$A.\ 81 \qquad B.\ 27 \qquad C.\ 18 \qquad D.\ 9 \qquad E.\ 4.5$

Rješenje 502

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_v b = 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\log_3 x \cdot \log_x z \cdot \log_z y = \log_x x^2 \Rightarrow \log_3 x \cdot \frac{\log_3 z}{\log_3 x} \cdot \frac{\log_3 y}{\log_3 z} = 2 \cdot \log_x x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 x \cdot \frac{\log_3 z}{\log_3 x} \cdot \frac{\log_3 y}{\log_3 z} = 2 \cdot 1 \Rightarrow \log_3 y = 2 \Rightarrow y = 3^2 \Rightarrow y = 9.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 502

Ako je $\log_3 x \cdot \log_x z \cdot \log_z y = \log_x x^3$, onda je y jednak:

$A.\ 81 \qquad B.\ 27 \qquad C.\ 18 \qquad D.\ 9 \qquad E.\ 4.5$

Rezultat: B.

Zadatak 503 (Vinko, gimnazija)

Koliko rješenja ima jednadžba $\log(\cos x) = \log(\sin x)$ unutar intervala $\left[0, 2 \cdot \pi\right\rangle$?

$A.\ 0 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 4 \qquad E.\ 2$

Rješenje 503

Ponovimo!

$$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

www.halapa.com

$$\log_{10} x = \log x.$$

Logaritamska funkcija definirana je za pozitivne realne brojeve.

$$f(x) = \log x \;\Rightarrow\; x > 0.$$

Trigonometrijska jednadžba tg x = tg a, $a \in R$

Skup rješenja jednadžbe

$$tg\, x = tg\, a \;\;,\;\; a \in R$$

je

$$\{\, a + k \cdot \pi \;\;,\;\; k \in Z \,\}.$$

Rasprava!

Funkcija kosinus pozitivna je u prvom i četvrtom kvadrantu.

$$\cos x > 0 \;\Rightarrow\; x \in \left\langle 0,\, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ ili } x \in \left\langle \frac{3 \cdot \pi}{2},\, 2 \cdot \pi \right\rangle.$$

Funkcija sinus pozitivna je u prvom i drugom kvadrantu.

$$\sin x > 0 \;\Rightarrow\; x \in \left\langle 0,\, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ ili } x \in \left\langle \frac{\pi}{2},\, \pi \right\rangle.$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \\ x \in \left[\, 0,\, 2 \cdot \pi \right\rangle \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x \in \left\langle 0,\, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Riješimo jednadžbu!

$$\log(\cos x) = \log(\sin x) \;\Rightarrow\; \cos x = \sin x \;\Rightarrow\; \sin x = \cos x \;\Rightarrow\; \sin x = \cos x \;/\cdot \frac{1}{\cos x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \;\Rightarrow\; tg\, x = 1 \;\Rightarrow\; x = tg^{-1}\, 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{4} \in \left\langle 0,\, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Jednadžba ima jedno rješenje.

Odgovor je pod C.

Vježba 503

Koliko rješenja ima jednadžba $\log(\cos x) = \log(\sin x)$ unutar intervala $\left[\, 0,\, \pi \right\rangle$?

$A.\ 0 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 4 \qquad E.\ 2$

Rezultat: C.

Zadatak 504 (Dona, maturantica)

Čemu je jednak do kraja pojednostavljen izraz $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - 1$ za sve x za koje je definiran?

Rješenje 504

Ponovimo!

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad,\quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad,\quad a^1 = a \quad,\quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad,\quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

www.halapa.com

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{\cos^2 x}{1-\sin x} - 1 = \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} - \frac{1}{1} = \frac{\cos^2 x - (1-\sin x)}{1-\sin x} = \frac{\cos^2 x - 1 + \sin x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin^2 x - 1 + \sin x}{1-\sin x} =$$

$$= \frac{1-\sin^2 x - 1 + \sin x}{1-\sin x} = \frac{-\sin^2 x + \sin x}{1-\sin x} = \frac{\sin x - \sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{\sin x \cdot (1-\sin x)}{1-\sin x} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot (1-\sin x)}{1-\sin x} = \sin x.$$

2.inačica

$$\frac{\cos^2 x}{1-\sin x} - 1 = \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} - 1 = \frac{(1-\sin x) \cdot (1+\sin x)}{1-\sin x} - 1 = \frac{(1-\sin x) \cdot (1+\sin x)}{1-\sin x} - 1 =$$

$$= 1 + \sin x - 1 = 1 + \sin x - 1 = \sin x.$$

Vježba 504

Čemu je jednak do kraja pojednostavljen izraz $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} - 1$ za sve x za koje je definiran?

Rezultat: $\cos x.$

Zadatak 505 (Valentina, ekonomska škola)

Koja od navedenih nejednadžba ima isti skup rješenja kao i nejednadžba $\left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \frac{49}{16}$?

$A.\ 5 \cdot x < -2 \qquad B.\ 5 \cdot x < 2 \qquad C.\ 5 \cdot x > -2 \qquad D.\ 5 \cdot x > 2$

Rješenje 505

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad , \quad 0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) < g(x).$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \frac{49}{16} \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \left(\frac{7}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \left(\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{5 \cdot x} > \left(\frac{4}{7}\right)^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[0 < \frac{4}{7} < 1\right] \Rightarrow 5 \cdot x < -2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 505

Koja od navedenih nejednadžba ima isti skup rješenja kao i nejednadžba $\left(\frac{3}{5}\right)^{5 \cdot x} > \frac{25}{9}$?

$A.\ 5 \cdot x < -2 \qquad B.\ 5 \cdot x < 2 \qquad C.\ 5 \cdot x > -2 \qquad D.\ 5 \cdot x > 2$

Rezultat: A.

www.halapa.com