Zadatak 481 (Rex, gimnazija)

Pokažite da uz uvjet $13 \cdot a \cdot b = 4 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2$ vrijedi $\log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b)$.

Rješenje 481

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \; \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n .$$

Preoblikujemo zadani uvjet.

$$13 \cdot a \cdot b = 4 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2 \Rightarrow 4 \cdot a^2 + 9 \cdot b^2 = 13 \cdot a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a \cdot b - 12 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2 = 13 \cdot a \cdot b \Rightarrow 4 \cdot a^2 + 12 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2 = 13 \cdot a \cdot b + 12 \cdot a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot a)^2 + 2 \cdot 2 \cdot a \cdot 3 \cdot b + (3 \cdot b)^2 = 25 \cdot a \cdot b \Rightarrow (2 \cdot a + 3 \cdot b)^2 = 25 \cdot a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot a + 3 \cdot b)^2 = 25 \cdot a \cdot b \;/ \cdot \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{(2 \cdot a + 3 \cdot b)^2}{25} = a \cdot b \Rightarrow \frac{(2 \cdot a + 3 \cdot b)^2}{5^2} = a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5}\right)^2 = a \cdot b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednakost} \end{array}\right] \Rightarrow \left(\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5}\right)^2 = a \cdot b \;/ \log \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5}\right)^2 = \log (a \cdot b) \Rightarrow 2 \cdot \log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \log a + \log b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \log a + \log b \;/ \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b).$$

Vježba 481

Pokažite da uz uvjet $4 \cdot a^2 - 13 \cdot a \cdot b + 9 \cdot b^2 = 0$ vrijedi $\log \frac{2 \cdot a + 3 \cdot b}{5} = \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b)$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 482 (Tin, gimnazija)

Odredite nekoliko parova pozitivnih realnih brojeva x, y za koje vrijedi $\log (x + y) = \log x + \log y$.

Rješenje 482

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \overrightarrow{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad \log f(x) = \log g(x) \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$\log(x + y) = \log x + \log y \Rightarrow \log(x + y) = \log(x \cdot y) \Rightarrow x + y = x \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y = x + y \Rightarrow x \cdot y - y = x \Rightarrow y \cdot (x - 1) = x \Rightarrow y \cdot (x - 1) = x \;/ \cdot \frac{1}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{x - 1}.$$

Rješenja su uređeni parovi:

$$(x,\ y) = \left(x,\ \frac{x}{x - 1}\right),\ x > 0,\ x \neq 1.$$

Na primjer,

$$(2,\ 2)\ ,\ \left(3,\ \frac{3}{2}\right),\ \left(5,\ \frac{5}{4}\right) \text{ itd.}$$

Vježba 482

Odredite nekoliko parova pozitivnih realnih brojeva x, y za koje vrijedi $\log(x + y) - \log x - \log y = 0.$

Rezultat: $(x,\ y) = \left(x,\ \frac{x}{x - 1}\right),\ x > 0,\ x \neq 1.$

Zadatak 483 (Maja, gimnazija)

Dokažite da za x > 0 vrijedi nejednakost $x^2 + 4^x + 1 - x \cdot 2^{x+1} > 0.$

Rješenje 483

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2.$$

$$a^2 \geq 0 \ ,\ a \in R.$$

$$x^2 + 4^x + 1 - x \cdot 2^{x+1} = x^2 + \left(2^2\right)^x + 1 - x \cdot 2^x \cdot 2^1 = x^2 + \left(2^x\right)^2 + 1 - x \cdot 2^x \cdot 2 =$$

$$= x^2 + \left(2^x\right)^2 + 1 - 2 \cdot x \cdot 2^x = \left(2^x\right)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot x + x^2 + 1 =$$

$$= \left(\left(2^x\right)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot x + x^2\right) + 1 = \left(2^x - x\right)^2 + 1 > 0.$$

Vježba 483

Dokažite da za x > 0 vrijedi nejednakost $x^2 + 4^x + 1 > x \cdot 2^{x+1}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 484 (Asterix, gimnazija)

Broj stanovnika u nekome gradu svake se godine povećao za isti postotak u odnosu na prethodnu godinu. Za šest se godina broj stanovnika povećao s 1635000 na 2010000 stanovnika. Koliko posto iznosi godišnje povećanje broja stanovnika toga grada?

Rješenje 484

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100.

Na primjer, $9\ \% = \frac{9}{100} \quad , \quad 81\ \% = \frac{81}{100} \quad , \quad 4.5\ \% = \frac{4.5}{100} \quad , \quad 0.3\ \% = \frac{0.3}{100} \quad , \quad p\ \% = \frac{p}{100}.$

Kako se računa "... p% od x..."?

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Kako zapisati da se x poveća za p% ?

$$x + \frac{p}{100} \cdot x = x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Neka je p postotak za koji se svake godine poveća broj stanovnika u gradu. Na početku broj stanovnika bio je 1635000.
Na kraju **prve** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_1 = 1635000 + \frac{p}{100} \cdot 1635000 \Rightarrow S_1 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Na kraju **druge** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_2 = S_1 + \frac{p}{100} \cdot S_1 \Rightarrow S_2 = S_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_2 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Na kraju **treće** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_3 = S_2 + \frac{p}{100} \cdot S_2 \Rightarrow S_3 = S_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_3 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Na kraju **četvrte** godine je broj stanovnika iznosio:

$$S_4 = S_3 + \frac{p}{100} \cdot S_3 \Rightarrow S_4 = S_3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow S_4 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_4 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4.$$

Vidi se da je na kraju n – te godine broj stanovnika iznosio:

$$S_n = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dakle, na kraju **šeste** godine je broj stanovnika bio:

$$S_6 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6.$$

Prema uvjetu zadatka dobije se eksponencijalna jednadžba:

$$\left.\begin{array}{l} S_6 = 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 \\ S_6 = 2010000 \end{array}\right\} \Rightarrow 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 2010000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1635000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = 2010000 \;/\cdot \frac{1}{1635000} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{2010000}{1635000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{2010000}{1635000} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{134}{109} \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{134}{109} \;/\sqrt[6]{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} \Rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1 \Rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1 \;/\cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 100 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{134}{109}} - 1\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Idemoooooooooooooooo,} \\ \text{džepno računalo u ruke!} \end{array}\right] \Rightarrow p = 3.50.$$

Vježba 484

Broj stanovnika u nekome gradu svake se godine povećao za isti postotak u odnosu na prethodnu godinu. Za šest se godina broj stanovnika povećao s 3270000 na 4020000 stanovnika. Koliko posto iznosi godišnje povećanje broja stanovnika toga grada?

Rezultat: 3.50 %.

Zadatak 485 (Lara, gimnazija)

Ako je a > 0, b > 0 i c > 0 dokazati da je $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Rješenje 485

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a.$$

Neka je

$$\log_a b = x.$$

Dalje slijedi:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu}\end{matrix}\right] \Rightarrow a^x = b \;/\; \log_c \Rightarrow \log_c a^x = \log_c b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log_c a = \log_c b \Rightarrow x \cdot \log_c a = \log_c b \;/ \cdot \frac{1}{\log_c a} \Rightarrow x = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Vježba 485

Ako je a > 0, b > 0 i c > 0 dokazati da je $\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 486 (Lara, gimnazija)

Ako je a > 0 i b > 0 dokazati da je $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Rješenje 486

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

$$a^{\log_a b} = b \quad , \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b b = 1.$$

Polazimo od poznatog identiteta.

$$a^{\log_a b} = b \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu}\end{matrix}\right] \Rightarrow a^{\log_a b} = b \;/\; \log_b \Rightarrow \log_b a^{\log_a b} = \log_b b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1 \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1 \;/ \cdot \frac{1}{\log_b a} \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Vježba 486

Ako je a > 0 i b > 0 dokazati da je $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 487 (Milica, tehnička škola)

Umnožak rješenja jednadžbe $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ je:

$A.\ 1 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 100$

Rješenje 487

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log a \quad , \quad \log 100 = 2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^\circ = 1 \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \; / ^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100 \; / \log \Rightarrow \log\left(x^{\log \sqrt{x}}\right) = \log 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{x} \cdot \log x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log x \cdot \log x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log^2 x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \log^2 x = 2 \; / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log^2 x = 4 \Rightarrow \log^2 x = 4 \; / \sqrt{} \Rightarrow \log x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \log x = \pm 2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \log x = 2 \\ \log x = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 10^2 \\ x_2 = 10^{-2} \end{matrix}\right\}.$$

Umnožak rješenja jednadžbe je:

$$x_1 \cdot x_2 = 10^2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 10^\circ \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 487

Zbroj rješenja jednadžbe $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ je:

$A.\ 10.01 \qquad B.\ 10.001 \qquad C.\ 100.01$

Rezultat: C.

Zadatak 488 (Branimir, srednja škola)

Izračunajte $\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)^3$.

Rješenje 488

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b b = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)}.$$

1.inačica

$$\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)^3 = \left(\log_4 \frac{1}{4^2}\right)^3 = \left(\log_4 4^{-2}\right)^3 = \left(-2 \cdot \log_4 4\right)^3 = (-2 \cdot 1)^3 = (-2)^3 = -8.$$

2.inačica

Najprije izračunamo

$$\log_4 \frac{1}{16}.$$

Neka je

$$\log_4 \frac{1}{16} = x \;\Rightarrow\; 4^x = \frac{1}{16} \;\Rightarrow\; 4^x = \frac{1}{4^2} \;\Rightarrow\; 4^x = 4^{-2} \;\Rightarrow\; x = -2 \;\Rightarrow\; \log_4 \frac{1}{16} = -2.$$

Tada je

$$\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)^3 = (-2)^3 = -8.$$

Vježba 488

Izračunajte $\left(\log_4 \frac{1}{16}\right)^2.$

Rezultat: 4.

Zadatak 489 (Ivan, srednja škola)

Ako je $\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} \cdot (\log a + \log b - \log 2)$, gdje su a i b katete pravokutnog trokuta, nađite njegove kutove.

Rješenje 489

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

$$\rightarrow$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a + \log b = \log(a \cdot b) \quad , \quad \log a - \log b = \log \frac{a}{b} \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$\log f(x) = \log g(x) \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad , \quad \sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \quad , \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha+\beta=90^{\circ}.$$

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Kotangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine katete nasuprot tog kuta.
Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Trigonometrijska jednadžba $\sin x=a \ , \ |a|\leq 1$

Skup rješenja jednadžbe $\sin x=a, \ |a|\leq 1,$ je $\{x_\circ+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\}\cup\{\pi-x_\circ+k\cdot 2\cdot\pi : k\in Z\}$ gdje je $x_\circ\in R$ jedno rješenje te jednadžbe.

$$\sin x=\sin x_\circ \ \Rightarrow \ x=x_\circ.$$

$$\log\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\log a+\log b-\log 2\right) \ \Rightarrow \ \log\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\log\left(a\cdot b\right)-\log 2\right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \log\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{a\cdot b}{2} \ \Rightarrow \ \log\frac{a-b}{2}=\frac{1}{2}\cdot\log\frac{a\cdot b}{2} \ /\cdot 2 \ \Rightarrow \ 2\cdot\log\frac{a-b}{2}=\log\frac{a\cdot b}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \log\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\log\frac{a\cdot b}{2} \ \Rightarrow \ \left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a\cdot b}{2} \ \Rightarrow \ \frac{\left(a-b\right)^2}{2^2}=\frac{a\cdot b}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=\frac{a\cdot b}{2} \ \Rightarrow \ \frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=\frac{a\cdot b}{2} \ /\cdot 4 \ \Rightarrow$$

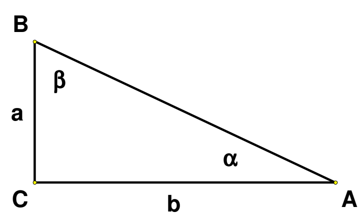
$$\Rightarrow \ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=2\cdot a\cdot b \ \Rightarrow \ a^2+b^2=2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot b \ \Rightarrow \ a^2+b^2=4\cdot a\cdot b \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a^2+b^2=4\cdot a\cdot b \ /\cdot\frac{1}{a\cdot b} \ \Rightarrow \ \frac{a^2}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}=\frac{4\cdot a\cdot b}{a\cdot b} \ \Rightarrow \ \frac{a^2}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}=\frac{4\cdot a\cdot b}{a\cdot b} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4.$$

Uočimo da je u pravokutnom trokutu ABC

$$tg\,\alpha=\frac{a}{b} \ , \ ctg\,\alpha=\frac{b}{a}.$$



Tada je

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4 \ \Rightarrow \ \left[\, tg\,\alpha=\frac{a}{b} \ , \ ctg\,\alpha=\frac{b}{a} \,\right] \ \Rightarrow \ tg\,\alpha+ctg\,\alpha=4 \ \Rightarrow \ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=4 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=4 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=4 \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l}\text{proširimo}\\ \text{razlomak sa } 2\end{array}\right] \ \Rightarrow \ \frac{2}{2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=4 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin(2\cdot\alpha)} = 4 \Rightarrow \frac{2}{\sin(2\cdot\alpha)} = 4 \;/\cdot \sin(2\cdot\alpha) \Rightarrow 2 = 4\sin(2\cdot\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sin(2\cdot\alpha) = 2 \Rightarrow 4\sin(2\cdot\alpha) = 2 \;/\cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(2\cdot\alpha) = \frac{2}{4} \Rightarrow \sin(2\cdot\alpha) = \frac{2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(2\cdot\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cdot\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\cdot\alpha = 30^\circ \Rightarrow 2\cdot\alpha = 30^\circ \;/\cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 15^\circ.$$

Budući da je trokut pravokutan, vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \left[\alpha = 15^\circ\right] \Rightarrow 15^\circ + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - 15^\circ \Rightarrow \beta = 75^\circ.$$

Vježba 489

Ako je $2\cdot\log\frac{a-b}{2} = \log a + \log b - \log 2,$ gdje su a i b katete pravokutnog trokuta, nađite njegove kutove.

Rezultat: 15º, 75º, 90º.

Zadatak 490 (Marko, srednja škola)

Riješite jednadžbu $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x.$

Rješenje 490

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n\cdot\log a \quad , \quad \log\sqrt{a} = \frac{1}{2}\cdot\log a \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a^\circ = 1 \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Rasprava!

Logaritamska funkcija definirana je za pozitivne realne brojeve.

$$f(x) = \log x \Rightarrow x > 0.$$

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu}\end{array}\right] \Rightarrow x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \;/\log \Rightarrow \log x^{\sqrt{x}} = \log\left(\sqrt{x}\right)^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\cdot\log x = x\cdot\log\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}\cdot\log x = x\cdot\frac{1}{2}\cdot\log x \Rightarrow \sqrt{x}\cdot\log x = \frac{x}{2}\cdot\log x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\cdot \log x-\frac{x}{2}\cdot\log x=0 \Rightarrow \sqrt{x}\cdot \log x-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}\cdot\log x=0 \Rightarrow \sqrt{x}\cdot\log x\cdot\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x}=0 \\ \Rightarrow \log x=0 \\ 1-\frac{\sqrt{x}}{2}=0 \end{array}\right\}.$$

Prva jednadžba

$$\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0 \text{ nije rješenje (rasprava!)}$$

Druga jednadžba

$$\log x=0 \Rightarrow x=10^{\circ} \Rightarrow x=1 \text{ rješenje}$$

Treća jednadžba

$$1-\frac{\sqrt{x}}{2}=0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{x}}{2}=-1 \Rightarrow -\frac{\sqrt{x}}{2}=-1 \;/\cdot(-2) \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \;/^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=2^2 \Rightarrow x=4. \text{ rješenje}$$

Vježba 490

Riješite jednadžbu $x^{\sqrt{x}}-\left(\sqrt{x}\right)^{x}=0.$

Rezultat: 1, 4.