

Zadatak 341 (Paula, maturantica)

Koliko realnih rješenja ima jednačina $\log_2(x-2) + \log_2(x+3) = 2 + \log_2(2 \cdot x - 3)$?

- A. nijedno B. jedno C. dva D. tri

Rješenje 341

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad , \quad \log_b b^n = n \quad , \quad \log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$a > b \quad , \quad c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Logaritamska funkcija s bazom b realna je funkcija oblika

$$f(x) = \log_b x,$$

gdje je $b > 0$ i $b \neq 1$. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$x \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Najprije moramo napraviti diskusiju rješenja zadatka. Budući da baza mora biti pozitivan broj i različit od 1, a logaritmandi (brojevi ili izrazi pod znakom logaritma) ne smiju biti negativni (logaritamska funkcija definirana je samo za pozitivne realne brojeve!), postaviti ćemo sljedeće nejednačbe koje tražena rješenja moraju zadovoljiti:

$$\left. \begin{array}{l} x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \\ 2 \cdot x-3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 2 \\ x > -3 \\ 2 \cdot x > 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 2 \\ x > -3 \\ 2 \cdot x > 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 2 \\ x > -3 \\ x > \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek} \\ \text{zajednički dio} \\ \text{oba rješenja} \end{array} \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in \langle 2, +\infty \rangle.$$

Tražimo rješenje jednačbe.

$$\begin{aligned} \log_2(x-2) + \log_2(x+3) &= 2 + \log_2(2 \cdot x - 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(x-2) + \log_2(x+3) &= \log_2 2^2 + \log_2(2 \cdot x - 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(x-2) + \log_2(x+3) &= \log_2 4 + \log_2(2 \cdot x - 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(x-2) \cdot (x+3) &= \log_2 4 \cdot (2 \cdot x - 3) \Rightarrow (x-2) \cdot (x+3) = 4 \cdot (2 \cdot x - 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 3 \cdot x - 2 \cdot x - 6 &= 8 \cdot x - 12 \Rightarrow x^2 + 3 \cdot x - 2 \cdot x - 6 - 8 \cdot x + 12 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 - 7 \cdot x + 6 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 7 \cdot x + 6 = 0 \\ a = 1, b = -7, c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1, b = -7, c = 6 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{7+5}{2} \\ x_2 = \frac{7-5}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{12}{2} \\ x_2 = \frac{2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{12}{2} \\ x_2 = \frac{2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 6 \in \langle 2, +\infty \rangle \\ x_2 = 1 \notin \langle 2, +\infty \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow x = 6.$$

Postoji samo jedno rješenje.
Odgovor je pod B.

Vježba 341

Koliko realnih rješenja ima jednačina $\log_2(x-2) - 2 = \log_2(2 \cdot x - 3) - \log_2(x+3)$?

A. nijedno B. jedno C. dva D. tri

Rezultat: B.

Zadatak 342 (Paula, maturantica)

Ako je $y = 2^{3 + \log_2 x}$, koliko je x ?

A. $x = \frac{y}{8}$ B. $x = y - 3$ C. $x = \log(y + 3)$ D. $x = 2^{\frac{8}{y}}$

Rješenje 342

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad b^{\log_b a} = a.$$

$$y = 2^{3 + \log_2 x} \Rightarrow y = 2^3 \cdot 2^{\log_2 x} \Rightarrow y = 8 \cdot x \Rightarrow 8 \cdot x = y \Rightarrow 8 \cdot x = y \quad /: 8 \Rightarrow x = \frac{y}{8}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 342

Ako je $y = 5^{3 + \log_5 x}$, koliko je x ?

A. $x = \frac{y}{125}$ B. $x = y - 25$ C. $x = \log(y + 5)$ D. $x = 5^{\frac{25}{y}}$

Rezultat: A.

Zadatak 343 (Paula, maturantica)

Čemu je jednak x ako je $\log x = \log a + \log b - \log c$, gdje su a, b, c pozitivni brojevi?

Rješenje 343

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

→

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad , \quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

$$\log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1. inačica

$$\log x = \log a + \log b - \log c \Rightarrow \log x = (\log a + \log b) - \log c \Rightarrow \log x = \log(a \cdot b) - \log c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = \log \frac{a \cdot b}{c} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}.$$

2. inačica

$$\log x = \log a + \log b - \log c \Rightarrow \log x = \log a + (\log b - \log c) \Rightarrow \log x = \log a + \log \frac{b}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = \log \left(a \cdot \frac{b}{c} \right) \Rightarrow \log x = \log \frac{a \cdot b}{c} \Rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Vježba 343

Čemu je jednak x ako je $\log x = \log a + \log b + \log c$, gdje su a, b, c pozitivni brojevi?

Rezultat: $x = a \cdot b \cdot c$.

Zadatak 344 (Darija, gimnazija)

Odredite $\log_{27} 729$.

Rješenje 344

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

→

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_b b = 1, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad \log_{b^k} a = \frac{1}{k} \cdot \log_b a.$$

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}, \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Prost broj (prim – broj) je prirodni broj veći od 1 koji je djeljiv jedino sa 1 i samim sobom.

1. inačica

Uočimo da je $27^2 = 729$. Tada je:

$$\log_{27} 729 = \log_{27} 27^2 = 2 \cdot \log_{27} 27 = 2 \cdot 1 = 2.$$

2. inačica

Broj 729 rastavimo na proste faktore.

$$\begin{aligned} 729 &= 3 \cdot 243 = \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 81 = \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 27 = \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \\ &= 3^6. \end{aligned}$$

Tada je:

$$\log_{27} 729 = \log_{27} 3^6 = \log_{27} (3^3)^2 = \log_{27} 27^2 = 2 \cdot \log_{27} 27 = 2 \cdot 1 = 2.$$

3. inačica

Brojeve 27 i 729 rastavimo na proste faktore.

$$\begin{aligned} 27 &= 3 \cdot 9 = & 729 &= 3 \cdot 243 = \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3 = & &= 3 \cdot 3 \cdot 81 = \\ &= 3^3. & &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 27 = \\ & & &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9 = \\ & & &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \\ & & &= 3^6. \end{aligned}$$

Tada je:

$$\log_{27} 729 = \log_{27} 3^6 = 6 \cdot \log_{27} 3 = 6 \cdot \log_{3^3} 3 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_3 3 = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

4. inačica

Zadani logaritam po bazi 27 može se računati preko dekadskih logaritama pa slijedi:

$$\log_{27} 729 = \frac{\log 729}{\log 27} = \frac{\log 3^6}{\log 3^3} = \frac{6 \cdot \log 3}{3 \cdot \log 3} = \frac{6 \cdot \log 3}{3 \cdot \log 3} = \frac{6}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Vježba 344

Odredite $\log_8 64$.

Rezultat: 2.

Zadatak 345 (Darija, gimnazija)

Logaritmirajte izraz $\frac{x^2 - y^2}{x \cdot y}$ po bazi 10.

Rješenje 345

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad \log(x \cdot y) = \log x + \log y.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Uporabit ćemo formulu za logaritam kvocijenta, formulu za razliku kvadrata te formulu za logaritam umnoška.

$$\begin{aligned} \log \frac{x^2 - y^2}{x \cdot y} &= \log(x^2 - y^2) - \log(x \cdot y) = \log((x-y) \cdot (x+y)) - \log(x \cdot y) = \\ &= \log(x-y) + \log(x+y) - (\log x + \log y) = \log(x-y) + \log(x+y) - \log x - \log y. \end{aligned}$$

Vježba 345

Logaritmirajte izraz $\frac{x \cdot y}{x^2 - y^2}$ po bazi 10.

Rezultat: $\log x + \log y - \log(x-y) - \log(x+y)$.

Zadatak 346 (4A, TUPŠ)

Izračunajte $\log_{3 \cdot \sqrt{3}} \frac{1}{27}$.

Rješenje 346

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

$$\log_b 1 = 0, \quad \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_b b = 1.$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad \log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log a, \quad n = \frac{n}{1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Uočimo da vrijedi

$$3 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \log_{3 \cdot \sqrt{3}} \frac{1}{27} &= \log_{\sqrt{27}} \frac{1}{27} = \log_{\sqrt{27}} 1 - \log_{\sqrt{27}} 27 = 0 - \log_{\sqrt{27}} (\sqrt{27})^2 = \\ &= -2 \cdot \log_{\sqrt{27}} \sqrt{27} = -2 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \log_{3 \cdot \sqrt{3}} \frac{1}{27} &= \log_{\sqrt{27}} \frac{1}{27} = \log_{\sqrt{27}} 27^{-1} = -1 \cdot \log_{\sqrt{27}} 27 = -1 \cdot \log_{\sqrt{27}} (\sqrt{27})^2 = \\ &= -1 \cdot 2 \cdot \log_{\sqrt{27}} \sqrt{27} = -1 \cdot 2 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} \log_{3 \cdot \sqrt{3}} \frac{1}{27} &= \log_{\sqrt{27}} \frac{1}{27} = \frac{\log \frac{1}{27}}{\log \sqrt{27}} = \frac{\log 1 - \log 27}{\frac{1}{2} \cdot \log 27} = \frac{0 - \log 27}{\frac{1}{2} \cdot \log 27} = \frac{-\log 27}{\frac{1}{2} \cdot \log 27} = \\ &= \frac{-\log 27}{\frac{1}{2} \cdot \log 27} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{1} = -2. \end{aligned}$$

Vježba 346

Izračunajte $\log_{2 \cdot \sqrt{2}} \frac{1}{8}$.

Rezultat: -2 .

Zadatak 347 (4A, TUPŠ)

Izračunajte $\log_3 \sqrt[4]{3} + \log_4 (\log_{16} 256)$.

Rješenje 347

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a . Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_b a, \quad \log_b b = 1, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_b n a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a.$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Uočimo da je $16^2 = 256$.

1. inačica

$$\begin{aligned} \log_3 \sqrt[4]{3} + \log_4 (\log_{16} 256) &= \frac{1}{4} \cdot \log_3 3 + \log_4 (\log_{16} 16^2) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \log_4 (2 \cdot \log_{16} 16) = \\ &= \frac{1}{4} + \log_4 (2 \cdot 1) = \frac{1}{4} + \log_4 2 = \frac{1}{4} + \log_2 2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \log_3 \sqrt[4]{3} + \log_4 (\log_{16} 256) &= \frac{1}{4} \cdot \log_3 3 + \log_4 (\log_{16} 16^2) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \log_4 (2 \cdot \log_{16} 16) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \log_4 (2 \cdot 1) = \frac{1}{4} + \log_4 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{\log_2 4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\log_2 2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot \log_2 2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} \log_3 \sqrt[4]{3} + \log_4 (\log_{16} 256) &= \frac{1}{4} \cdot \log_3 3 + \log_4 \left(\frac{\log 256}{\log 16} \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \log_4 \left(\frac{\log 16^2}{\log 16} \right) = \\ &= \frac{1}{4} + \log_4 \left(\frac{2 \cdot \log 16}{\log 16} \right) = \frac{1}{4} + \log_4 \left(\frac{2 \cdot \log 16}{\log 16} \right) = \frac{1}{4} + \log_4 2 = \frac{1}{4} + \log_2 2^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2^2 = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vježba 347

Izračunajte $\log_3 \sqrt[4]{3} + \log_4 (\log_{25} 625)$.

Rezultat: $\frac{3}{4}$

Zadatak 348 (Mislav, gimnazija)Izračunajte $\log_8(\log_9 3)$.**Rješenje 348**

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

→

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_b n a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b b = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b} \quad , \quad (\sqrt[n]{a})^2 = a \quad , \quad \log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_b a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \log_8(\log_9 3) &= \log_8(\log_{3 \cdot 2} 3) = \log_8\left(\frac{1}{2} \cdot \log_3 3\right) = \log_8\left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) = \log_8 \frac{1}{2} = \log_8 2^{-1} = \\ &= -1 \cdot \log_8 2 = -1 \cdot \log_{2^3} 2 = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_2 2 = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \log_8(\log_9 3) &= \log_8\left(\frac{1}{\log_3 9}\right) = \log_8\left(\frac{1}{\log_3 3^2}\right) = \log_8\left(\frac{1}{2 \cdot \log_3 3}\right) = \log_8\left(\frac{1}{2 \cdot 1}\right) = \\ &= \log_8 \frac{1}{2} = \log_8 2^{-1} = -1 \cdot \log_8 2 = -1 \cdot \frac{1}{\log_2 8} = \frac{-1}{\log_2 2^3} = \frac{-1}{3 \cdot \log_2 2} = \frac{-1}{3 \cdot 1} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} \log_8(\log_9 3) &= \log_8\left(\frac{\log 3}{\log 9}\right) = \log_8\left(\frac{\log 3}{\log 3^2}\right) = \log_8\left(\frac{\log 3}{2 \cdot \log 3}\right) = \log_8\left(\frac{\log 3}{2 \cdot \log 3}\right) = \\ &= \log_8 \frac{1}{2} = \log_8 2^{-1} = -1 \cdot \log_8 2 = -1 \cdot \log_{2^3} 2 = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_2 2 = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. inačica

$$\log_8(\log_9 3) = \log_8(\log_9 \sqrt{9}) = \log_8\left(\frac{1}{2} \cdot \log_9 9\right) = \log_8\left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) =$$

$$= \log_8 \frac{1}{2} = \log_8 2^{-1} = -1 \cdot \log_8 2 = -1 \cdot \log_{2^3} 2 = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_2 2 = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{1}{3}.$$

Vježba 348

Izračunajte $\log_8 (\log_4 2)$.

Rezultat: $-\frac{1}{3}$.

Zadatak 349 (4A, TUPŠ)

Ako je $a = \log 5$ i $b = \log 3$, izrazite $\log_{30} 8$ kao funkciju varijabli a i b .

Rješenje 349

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

→

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}, \quad \log a^n = n \cdot \log a, \quad \log 10 = 1, \quad \log(a \cdot b) = \log a + \log b.$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \log_{30} 8 &= \frac{\log 8}{\log 30} = \frac{\log 2^3}{\log(10 \cdot 3)} = \frac{3 \cdot \log 2}{\log 10 + \log 3} = \frac{3 \cdot \log \frac{10}{5}}{1 + \log 3} = \frac{3 \cdot (\log 10 - \log 5)}{1 + \log 3} = \\ &= \frac{3 \cdot (1 - \log 5)}{1 + \log 3} = \left[\begin{array}{l} a = \log 5 \\ b = \log 3 \end{array} \right] = \frac{3 \cdot (1 - a)}{1 + b}. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \log_{30} 8 &= \frac{\log 8}{\log 30} = \frac{\log \frac{1000}{125}}{\log(10 \cdot 3)} = \frac{\log 1000 - \log 125}{\log 10 + \log 3} = \frac{3 - \log 5^3}{1 + \log 3} = \frac{3 - 3 \cdot \log 5}{1 + \log 3} = \frac{3 \cdot (1 - \log 5)}{1 + \log 3} = \\ &= \left[\begin{array}{l} a = \log 5 \\ b = \log 3 \end{array} \right] = \frac{3 \cdot (1 - a)}{1 + b}. \end{aligned}$$

Vježba 349

Ako je $a = \log 5$ i $b = \log 3$, izrazite $\log_8 30$ kao funkciju varijabli a i b .

Rezultat: $\frac{1+b}{3 \cdot (1-a)}$.

Zadatak 350 (4A, TUPŠ)

$$\text{Odredite } \frac{x}{y} \text{ iz jednakosti } \begin{cases} \log^2 x - \log^2 y = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}.$$

Rješenje 350

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad , \quad \log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$\log 100 = 2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\left. \begin{cases} \log^2 x - \log^2 y = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} (\log x - \log y) \cdot (\log x + \log y) = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x - \log y) \cdot 1 = 2 \Rightarrow \log x - \log y = 2 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \log 100 \Rightarrow \frac{x}{y} = 100.$$

2. inačica

$$\left. \begin{cases} \log^2 x - \log^2 y = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} (\log x - \log y) \cdot (\log x + \log y) = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x - \log y) \cdot 1 = 2 \Rightarrow \log x - \log y = 2.$$

Sada promatramo jednostavniji sustav jednadžbi.

$$\left. \begin{cases} \log x - \log y = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \right\}.$$

Sustav riješimo metodom suprotnih koeficijenata.

$$\left. \begin{cases} \log x - \log y = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \log x = 3 \Rightarrow 2 \cdot \log x = 3 \quad /: 2 \Rightarrow \log x = \frac{3}{2}.$$

Računamo $\log y$ tako da uvrstimo $\log x$ u bilo koju jednadžbu sustava.

$$\left. \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ \log x = \frac{3}{2} \end{cases} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} + \log y = 1 \Rightarrow \log y = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow \log y = \frac{1}{1} - \frac{3}{2} \Rightarrow \log y = \frac{2-3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log y = -\frac{1}{2}.$$

Budući da je

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$$

slijedi:

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = \frac{3}{2} \\ \log y = -\frac{1}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \frac{x}{y} = \frac{4}{2} \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \frac{4}{2} \Rightarrow \log \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \log 100 \Rightarrow \frac{x}{y} = 100.$$

3. inačica

Riješimo sustav jednačnji.

$$\left. \begin{array}{l} \log^2 x - \log^2 y = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log^2 x - \log^2 y = 2 \\ \log x = 1 - \log y \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda zamjene} \\ \text{(supstitucije)} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - \log y)^2 - \log^2 y = 2 \Rightarrow 1 - 2 \cdot \log y + \log^2 y - \log^2 y = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \cdot \log y + \log^2 y - \log^2 y = 2 \Rightarrow 1 - 2 \cdot \log y = 2 \Rightarrow -2 \cdot \log y = 2 - 1 \Rightarrow -2 \cdot \log y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot \log y = 1 \quad /: (-2) \Rightarrow \log y = -\frac{1}{2}.$$

Računamo log x. Računamo log y tako da uvrstimo log x u bilo koju jednačnju sustava.

$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 1 \\ \log y = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \log x - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \log x = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \log x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \log x = \frac{2+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = \frac{3}{2}.$$

Sada je:

$$\log x - \log y = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \log x - \log y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow \log x - \log y = \frac{4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x - \log y = \frac{4}{2} \Rightarrow \log x - \log y = 2 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = 2 \Rightarrow \log \frac{x}{y} = \log 100 \Rightarrow \frac{x}{y} = 100.$$

Vježba 350

Odredite $\frac{y}{x}$ iz jednakosti $\left\{ \begin{array}{l} \log^2 x - \log^2 y = 2 \\ \log x + \log y = 1 \end{array} \right.$.

Rezultat: $\frac{y}{x} = \frac{1}{100}.$

Zadatak 351 (4A, TUPŠ)

Izračunajte: $\frac{\log 2 + \log 3}{1 + \log 3.6}.$

Rješenje 351

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad , \quad \log 10 = 1 \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\frac{\log 2 + \log 3}{1 + \log 3.6} = \frac{\log(2 \cdot 3)}{\log 10 + \log 3.6} = \frac{\log 6}{\log(10 \cdot 3.6)} = \frac{\log 6}{\log 36} = \frac{\log 6}{\log 6^2} = \frac{\log 6}{2 \cdot \log 6} = \frac{\log 6}{2 \cdot \log 6} = \frac{1}{2}.$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \frac{\log 2 + \log 3}{1 + \log 3.6} &= \frac{\log \frac{6}{3} + \log 3}{\log 10 + \log \frac{36}{10}} = \frac{\log 6 - \log 3 + \log 3}{\log 10 + \log 36 - \log 10} = \frac{\log 6 - \log 3 + \log 3}{\log 10 + \log 36 - \log 10} = \\ &= \frac{\log 6}{\log 36} = \frac{\log 6}{\log 6^2} = \frac{\log 6}{2 \cdot \log 6} = \frac{\log 6}{2 \cdot \log 6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vježba 351

Izračunajte: $\frac{1 + \log 3.6}{\log 2 + \log 3}$.

Rezultat: 2.

Zadatak 352 (4A, TUPŠ)

Izračunajte: $\log \frac{1}{4} (\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

Rješenje 352

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a \quad , \quad \log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \log_b b = 1.$$

$$\log_b n a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a, \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b}, \quad \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 4) &= \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 2^2) = \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot 2 \cdot \log_3 2) = \\ &= \log_{\frac{1}{4}} (2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2) = \log_{\frac{1}{4}} (2 \cdot 1) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 4) &= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \right) = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \right) = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{1} \right) = \\ &= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\log 4}{\log 2} \right) = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\log 2^2}{\log 2} \right) = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{2 \cdot \log 2}{\log 2} \right) = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{2 \cdot \log 2}{\log 2} \right) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \\ &= \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 3 \cdot \log_3 4) &= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 4 \right) = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{\log_3 4}{\log_3 2} \right) = \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 4) = \\ &= \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 2^2) = \log_{\frac{1}{4}} (2 \cdot \log_2 2) = \log_{\frac{1}{4}} (2 \cdot 1) = \log_{\frac{1}{4}} 2 = \\ &= \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vježba 352

Izračunajte: $\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$.

Rezultat: $-\frac{1}{2}$.

Zadatak 353 (4A, TUPŠ)

Izračunajte: $\log_{0.25} 25 + \log_{0.5} 1.6$.

Rješenje 353

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_b n a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \frac{a}{b} \cdot b = a, \quad \log_b b = 1.$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Baze logaritama su decimalni brojevi pa ih najprije napišimo u obliku razlomaka, skratimo, a zatim napišemo u obliku potencija.

- $0.25 = \frac{25}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$.
- $0.5 = \frac{5}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$.

1. inačica

$$\begin{aligned} \log_{0.25} 25 + \log_{0.5} 1.6 &= \log_{2^{-2}} 25 + \log_{2^{-1}} 1.6 = -\frac{1}{2} \cdot \log_2 25 - \frac{1}{1} \cdot \log_2 1.6 = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \log_2 5^2 - \log_2 1.6 = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_2 5 - \log_2 1.6 = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_2 5 - \log_2 1.6 = \\ &= -\log_2 5 - \log_2 1.6 = -(\log_2 5 + \log_2 1.6) = -\log_2 (5 \cdot 1.6) = -\log_2 8 = -\log_2 2^3 = \\ &= -3 \cdot \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3. \end{aligned}$$

2. inačica

Uočimo da je $0.5^2 = 0.25$.

$$\begin{aligned} \log_{0.25} 25 + \log_{0.5} 1.6 &= \log_{0.5^2} 25 + \log_{0.5} 1.6 = \frac{1}{2} \cdot \log_{0.5} 25 + \log_{0.5} 1.6 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_{0.5} 5^2 + \log_{0.5} 1.6 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_{0.5} 5 + \log_{0.5} 1.6 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_{0.5} 5 + \log_{0.5} 1.6 = \\ &= \log_{0.5} 5 + \log_{0.5} 1.6 = \log_{0.5} (5 \cdot 1.6) = \log_{0.5} 8 = \log_{2^{-1}} 8 = -\log_2 8 = -\log_2 2^3 = \\ &= -3 \cdot \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3. \end{aligned}$$

Vježba 353

Izračunajte: $\log_{0.5} 1.6 + \log_{0.25} 25$.

Rezultat: -3 .

Zadatak 354 (4A, TUPŠ)

Izračunajte: $\log \sqrt{3} \left(\log_2 5 \cdot \log_{0.2} \frac{1}{8} \right)$.

Rješenje 354

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_{b^n} a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a, \quad \log_{b^n} a^n = \log_b a.$$

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1, \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \log_b b = 1, \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Decimalni broj 0.2 pretvorimo u razlomak, skratimo, a zatim napišemo u obliku potencije.

$$0.2 = \frac{2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \log \sqrt{3} \left(\log_2 5 \cdot \log_{0.2} \frac{1}{8} \right) &= \log \sqrt{3} \left(\log_2 5 \cdot \log_{5^{-1}} \frac{1}{8} \right) = \log \sqrt{3} \left(\log_2 5 \cdot \log_{5^{-1}} 8^{-1} \right) = \\ &= \log \sqrt{3} \left(\log_2 5 \cdot \log_5 8 \right) = \log \sqrt{3} \left(\log_2 5 \cdot \log_5 2^3 \right) = \log \sqrt{3} \left(\log_2 5 \cdot 3 \cdot \log_5 2 \right) = \\ &= \log \sqrt{3} \left(3 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 2 \right) = \log \sqrt{3} (3 \cdot 1) = \log \sqrt{3} 3 = \log \sqrt{3} (\sqrt{3})^2 = 2 \cdot \log \sqrt{3} \sqrt{3} = \\ &= 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \log \sqrt{3} \left(\log_2 5 \cdot \log_{0.2} \frac{1}{8} \right) &= \log \sqrt{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log \frac{1}{8}}{\log 0.2} \right) = \log \sqrt{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 8^{-1}}{\log \frac{2}{10}} \right) = \\ &= \log \sqrt{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{-1 \cdot \log 8}{\log \frac{2}{10}} \right) = \log \sqrt{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{-1 \cdot \log 2^3}{\log \frac{1}{5}} \right) = \log \sqrt{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{-1 \cdot 3 \cdot \log 2}{\log 5^{-1}} \right) = \\ &= \log \sqrt{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{-3 \cdot \log 2}{-1 \cdot \log 5} \right) = \log \sqrt{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{3 \cdot \log 2}{\log 5} \right) = \log \sqrt{3} \left(\frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{3 \cdot \log 2}{\log 5} \right) = \\ &= \log \sqrt{3} 3 = \log \sqrt{3} (\sqrt{3})^2 = 2 \cdot \log \sqrt{3} \sqrt{3} = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned}
\log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \log_{0.2} \frac{1}{8}\right) &= \log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \log_{5^{-1}} \frac{1}{8}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \log_{5^{-1}} 8^{-1}\right) = \\
&= \log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \log_5 8\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \frac{1}{\log_8 5}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \frac{1}{\log_{2^3} 5}\right) = \\
&= \log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \log_2 5}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \frac{3}{\log_2 5}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(\log_2 5 \cdot \frac{3}{\log_2 5}\right) = \\
&= \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2 \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 2 \cdot 1 = 2.
\end{aligned}$$

Vježba 354

Izračunajte: $\log_{\sqrt{3}}\left(\log_{0.2} \frac{1}{8} \cdot \log_2 5\right)$.

Rezultat: $x = a \cdot b \cdot c$.

Zadatak 355 (4A, TUPŠ)

Izračunajte: $\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$.

Rješenje 355

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log_b \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log_b a, \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a.$$

$$\log_b n a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a, \quad \log_b a \cdot \log_a b = 1, \quad \log_b a = \frac{\log a}{\log b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\begin{aligned}
\log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2} &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_{25} 2 = \frac{1}{6} \cdot \log_2 \frac{1}{5} \cdot \log_{25} 2 = \frac{1}{6} \cdot \log_2 5^{-1} \cdot \frac{1}{\log_2 25} = \\
&= \frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot \log_2 5 \cdot \frac{1}{\log_2 5^2} = -\frac{1}{6} \cdot \log_2 5 \cdot \frac{1}{2 \cdot \log_2 5} = -\frac{1}{6} \cdot \log_2 5 \cdot \frac{1}{2 \cdot \log_2 5} =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}.$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2} &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_{25} 2 = \frac{1}{6} \cdot \log_2 \frac{1}{5} \cdot \log_{25} 2 = \frac{1}{6} \cdot \log_2 5^{-1} \cdot \log_5 2^2 = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (-1) \cdot \log_2 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_5 2 = -\frac{1}{12} \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 2 = -\frac{1}{12} \cdot 1 = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2} &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_{25} 2 = \frac{1}{6} \cdot \log_2 \frac{1}{5} \cdot \log_{25} 2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\log \frac{1}{5}}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 25} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\log \frac{1}{5}}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 25} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\log \frac{1}{5}}{1} \cdot \frac{1}{\log 25} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\log \frac{1}{5}}{\log 25} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\log 5^{-1}}{\log 5^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-1 \cdot \log 5}{2 \cdot \log 5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{-1 \cdot \log 5}{2 \cdot \log 5} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Vježba 355

Izračunajte: $\log_{25} \sqrt[3]{2} \cdot \log_2 \sqrt{\frac{1}{5}}$.

Rezultat: $-\frac{1}{12}$.

Zadatak 356 (Tanja, ekonomska škola)

Zadana je funkcija $f(x) = \log_2(5 \cdot x - 1)$. Odredite nultočku funkcije f.

Rješenje 356

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$\log_b 1 = 0 \quad , \quad \log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a \neq 0.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0) = 0.$$

1. inačica

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \log_2(5 \cdot x - 1) \\ f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \log_2(5 \cdot x - 1) = 0 \Rightarrow \log_2(5 \cdot x - 1) = \log_2 1 \Rightarrow 5 \cdot x - 1 = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5 \cdot x = 1 + 1 \Rightarrow 5 \cdot x = 2 \Rightarrow 5 \cdot x = 2 \quad / : 5 \Rightarrow x = \frac{2}{5}.$$

2. inačica

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \log_2(5 \cdot x - 1) \\ f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \log_2(5 \cdot x - 1) = 0 \Rightarrow 2^0 = 5 \cdot x - 1 \Rightarrow 5 \cdot x - 1 = 2^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot x - 1 = 1 \Rightarrow 5 \cdot x = 1 + 1 \Rightarrow 5 \cdot x = 2 \Rightarrow 5 \cdot x = 2 \text{ / : } 5 \Rightarrow x = \frac{2}{5}.$$

Vježba 356

Zadana je funkcija $f(x) = \log_2(4 \cdot x - 1)$. Odredite nultočku funkcije f .

Rezultat: $\frac{1}{2}$.

Zadatak 357 (Kikica Ijenivica, gimnazija)

Odredi x u sljedećoj jednakosti $\log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$.

Rješenje 357

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt[3]{a^3} = a.$$

$$a = b \Rightarrow a^n = b^n, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad a^1 = a, \quad b \cdot \frac{a}{b} = a.$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2} &\Rightarrow x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \sqrt{x^3} = 8 \Rightarrow \sqrt{x^3} = 8 \text{ / }^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sqrt{x^3})^2 = 8^2 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x^3 = 64 \text{ / } \sqrt[3]{} \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \sqrt[3]{4^3} \Rightarrow x = 4. \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2} &\Rightarrow x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{potenciramo} \\ \text{sa } -\frac{2}{3} \end{array} \right] \Rightarrow x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8} \text{ / }^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^1 = 8^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = (2^3)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = 2^2 \Rightarrow x = 4. \end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned} \log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2} &\Rightarrow \log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2} \text{ / } \cdot (-2) \Rightarrow -2 \cdot \log_x \frac{1}{8} = 3 \Rightarrow \log_x \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_x 8^2 = 3 \Rightarrow \log_x 64 = 3 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x^3 = 64 \text{ / } \sqrt[3]{} \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \sqrt[3]{4^3} \Rightarrow x = 4. \end{aligned}$$

4. inačica

$$\begin{aligned} \log_x \frac{1}{8} = -\frac{3}{2} &\Rightarrow \log_x 8^{-1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow -1 \cdot \log_x 8 = -\frac{3}{2} \Rightarrow -1 \cdot \log_x 8 = -\frac{3}{2} \cdot (-1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_x 8 = \frac{3}{2} \Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = 8 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{potenciramo} \\ \text{sa } \frac{2}{3} \end{array} \right] \Rightarrow x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^1 = \left(2^3 \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = 2^2 \Rightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Vježba 357

Odredi x u sljedećoj jednakosti $\log_x \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$.

Rezultat: 16.

Zadatak 358 (Kikica Ljenivica, gimnazija)

Izračunajte $\frac{2 \cdot \log_{0.2} 12 + \log_{\sqrt{5}} 16}{\log_{25} 36 - 3 \cdot \log_5 2}$.

Rješenje 358

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Decimalni broj 0.2 pretvorimo u razlomak, skratimo, a zatim napišemo u obliku potencije.

$$0.2 = \frac{2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\log_b n a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_b n a^n = \log_b a.$$

$$\log_{\frac{1}{b}} a = -\log_b a, \quad \log_{\sqrt{b}} a = 2 \cdot \log_b a, \quad \log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}, \quad \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} = \frac{b}{a}.$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n.$$

$$\frac{2 \cdot \log_{0.2} 12 + \log_{\sqrt{5}} 16}{\log_{25} 36 - 3 \cdot \log_5 2} = \frac{2 \cdot \log_{\frac{2}{10}} 12 + 2 \cdot \log_5 16}{\log_{5^2} 6^2 - \log_5 2^3} = \frac{2 \cdot \log_{\frac{2}{10}} 12 + 2 \cdot \log_5 16}{\log_5 6 - \log_5 8}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot \log_5 \frac{1}{5} 12 + 2 \cdot \log_5 16}{\log_5 \frac{6}{8}} = \frac{-2 \cdot \log_5 12 + 2 \cdot \log_5 16}{\log_5 \frac{6}{8}} = \frac{2 \cdot \log_5 16 - 2 \cdot \log_5 12}{\log_5 \frac{3}{4}} = \\
&= \frac{2 \cdot (\log_5 16 - \log_5 12)}{\log_5 \frac{3}{4}} = \frac{2 \cdot \log_5 \frac{16}{12}}{\log_5 \frac{3}{4}} = \frac{2 \cdot \log_5 \frac{4}{3}}{\log_5 \frac{3}{4}} = \frac{2 \cdot \log_5 \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}{\log_5 \frac{3}{4}} = \\
&= \frac{-2 \cdot \log_5 \frac{3}{4}}{\log_5 \frac{3}{4}} = -2.
\end{aligned}$$

Vježba 358

Izračunajte $\frac{\log_{25} 36 - 3 \cdot \log_5 2}{2 \cdot \log_{0.2} 12 + \log_{\sqrt{5}} 16}$.

Rezultat: $-\frac{1}{2}$.

Zadatak 359 (Kikica Ijenivica, gimnazija)

Izračunajte $\log_{0.2} \log_{\sqrt{3}} 3 - \log_5 \log_3 (9 \cdot \sqrt{3})$.

Rješenje 359

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Decimalni broj 0.2 pretvorimo u razlomak, skratimo, a zatim napišemo u obliku potencije.

$$0.2 = \frac{2}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\log_{\sqrt{b}} a = 2 \cdot \log_b a, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c + b}{c}, \quad \log_b b = 1, \quad \log_b a^n = n \cdot \log_b a, \quad \log_{\frac{1}{b}} a = -\log_b a.$$

$$\log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y), \quad b \cdot \frac{a}{b} = a.$$

$$\begin{aligned}
& \log_{0.2} \log_{\sqrt{3}} 3 - \log_5 \log_3 (9 \cdot \sqrt{3}) = \log_{0.2} (2 \cdot \log_3 3) - \log_5 \log_3 \left(3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \right) = \\
& = \log_{0.2} (2 \cdot 1) - \log_5 \log_3 \left(3^{2 + \frac{1}{2}} \right) = \log_{0.2} 2 - \log_5 \log_3 3^{\frac{5}{2}} = \log_{\frac{2}{10}} 2 - \log_5 \left(\frac{5}{2} \cdot \log_3 3 \right) = \\
& = \log_{\frac{2}{10}} 2 - \log_5 \left(\frac{5}{2} \cdot 1 \right) = \log_{\frac{1}{5}} 2 - \log_5 \frac{5}{2} = -\log_5 2 - \log_5 \frac{5}{2} = -\left(\log_5 2 + \log_5 \frac{5}{2} \right) = \\
& = -\log_5 \left(2 \cdot \frac{5}{2} \right) = -\log_5 \left(2 \cdot \frac{5}{2} \right) = -\log_5 5 = -1.
\end{aligned}$$

Vježba 359

Izračunajte $\log_{0.2} \log_{\sqrt{2}} 2 - \log_5 \log_3 (9 \cdot \sqrt{3})$.

Rezultat: - 1.

Zadatak 360 (Kikica Ijenivica, gimnazija)

Izračunajte $\frac{1}{3} \cdot \log 54 - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot \log 20$.

Rješenje 360

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a .

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \quad \log_b a = b^c \quad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija \log_{10} označava se simbolom \log . Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\begin{aligned}
& \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a \quad , \quad \log(a \cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad , \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{a \cdot c} \\
& \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad , \quad \log 10 = 1 \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.
\end{aligned}$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1. inačica

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \cdot \log 54 - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot \log 20 = \log \sqrt[3]{54} - \log 3 - \log \sqrt[3]{20} = \log \sqrt[3]{54} - \left(\log 3 + \log \sqrt[3]{20} \right) = \\
& = \log \sqrt[3]{54} - \log \left(3 \cdot \sqrt[3]{20} \right) = \log \frac{\sqrt[3]{54}}{3 \cdot \sqrt[3]{20}} = \log \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{20}} \right) = \log \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{54}{20}} \right) = \log \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{54}{20}} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log\left(\frac{1}{3} \cdot 3 \sqrt{\frac{27}{10}}\right) = \log\frac{1}{3} + \log 3 \sqrt{\frac{27}{10}} = \log\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log\frac{27}{10} = \log\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot (\log 27 - \log 10) = \\
&= \log\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot (\log 27 - 1) = \log\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log 27 - \frac{1}{3} = \log\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log 3^3 - \frac{1}{3} = \log\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log 3 - \frac{1}{3} = \\
&= \log\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log 3 - \frac{1}{3} = \log\frac{1}{3} + \log 3 - \frac{1}{3} = \log 3^{-1} + \log 3 - \frac{1}{3} = -\log 3 + \log 3 - \frac{1}{3} = \\
&= -\log 3 + \log 3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \cdot \log 54 - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot \log 20 &= \frac{1}{3} \cdot \log 54 - \frac{1}{3} \cdot \log 20 - \log 3 = \frac{1}{3} \cdot (\log 54 - \log 20) - \log 3 = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \log \frac{54}{20} - \log 3 = \frac{1}{3} \cdot \log \frac{54}{20} - \log 3 = \frac{1}{3} \cdot \log \frac{27}{10} - \log 3 = \frac{1}{3} \cdot (\log 27 - \log 10) - \log 3 = \\
&= \frac{1}{3} \cdot (\log 3^3 - 1) - \log 3 = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot \log 3 - 1) - \log 3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log 3 - \frac{1}{3} - \log 3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log 3 - \frac{1}{3} - \log 3 = \\
&= \log 3 - \frac{1}{3} - \log 3 = \log 3 - \frac{1}{3} - \log 3 = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3. inačica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \cdot \log 54 - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot \log 20 &= \frac{1}{3} \cdot (\log 54 - 3 \cdot \log 3 - \log 20) = \frac{1}{3} \cdot (\log 54 - \log 3^3 - \log 20) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot (\log 54 - \log 27 - \log 20) = \frac{1}{3} \cdot \left(\log \frac{54}{27} - \log 20\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\log \frac{54}{27} - \log 20\right) = \frac{1}{3} \cdot (\log 2 - \log 20) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \log \frac{2}{20} = \frac{1}{3} \cdot \log \frac{2}{20} = \frac{1}{3} \cdot \log \frac{1}{10} = \frac{1}{3} \cdot \log 10^{-1} = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \log 10 = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 1 = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

4. inačica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \cdot \log 54 - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot \log 20 &= \frac{1}{3} \cdot \log (27 \cdot 2) - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot \log (10 \cdot 2) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot (\log 27 + \log 2) - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot (\log 10 + \log 2) = \frac{1}{3} \cdot (\log 3^3 + \log 2) - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot (1 + \log 2) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot \log 3 + \log 2) - \log 3 - \frac{1}{3} \cdot (1 + \log 2) = \\
&= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log 3 + \frac{1}{3} \cdot \log 2 - \log 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \log 2 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \log 3 + \frac{1}{3} \cdot \log 2 - \log 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \log 2 = \\
&= \log 3 + \frac{1}{3} \cdot \log 2 - \log 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \log 2 = \log 3 + \frac{1}{3} \cdot \log 2 - \log 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \log 2 = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Vježba 360

Izračunajte $\frac{1}{3} \cdot \log 27 + \log 3$.

Rezultat: $\log 9$.