Zadatak 301 (4A, TUPŠ)

Riješi jednadžbu $81^{x}-9^{x+1}=3\cdot\log_3\frac{1}{27}+3^{2\cdot x}$.

Rješenje 301

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^{c} \qquad a=b^{c}$$
$$\to$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad \left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad \log_b a^{n}=n\cdot\log_b a \quad , \quad \log_b b=1.$$

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad a^{0}=1 \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$81^{x}-9^{x+1}=3\cdot\log_3\frac{1}{27}+3^{2\cdot x} \Rightarrow \left(9^{2}\right)^{x}-9^{x}\cdot 9^{1}=3\cdot\log_3\frac{1}{3^{3}}+\left(3^{2}\right)^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9^{2\cdot x}-9\cdot 9^{x}=3\cdot\log_3 3^{-3}+9^{x} \Rightarrow 9^{2\cdot x}-9\cdot 9^{x}=3\cdot(-3)\cdot\log_3 3+9^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9^{2\cdot x}-9\cdot 9^{x}=3\cdot(-3)\cdot 1+9^{x} \Rightarrow 9^{2\cdot x}-9\cdot 9^{x}=-9+9^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9^{2\cdot x}-9\cdot 9^{x}+9-9^{x}=0 \Rightarrow 9^{2\cdot x}-10\cdot 9^{x}+9=0.$$

Jednadžbu prevedemo u kvadratnu jednadžbu pomoću zamjene (supstitucije)

$$t=9^{x}.$$

$$9^{2\cdot x}-10\cdot 9^{x}+9=0 \Rightarrow \left(9^{x}\right)^{2}-10\cdot 9^{x}+9=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ t=9^{x}\end{bmatrix} \Rightarrow t^{2}-10\cdot t+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} t^{2}-10\cdot t+9=0\\ a=1\ ,\ b=-10\ ,\ c=9\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=-10\ ,\ c=9\\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^{2}-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{10\pm 8}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\dfrac{10+8}{2}\\ t_2=\dfrac{10-8}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\dfrac{18}{2}\\ t_2=\dfrac{2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=9\\ t_2=1\end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se na zamjenu (supstituciju).

- $\left.\begin{matrix} t=9^{x}\\ t=9\end{matrix}\right\} \Rightarrow 9^{x}=9 \Rightarrow 9^{x}=9^{1} \Rightarrow x_1=1$
- $\left.\begin{matrix} t=9^{x}\\ t=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow 9^{x}=1 \Rightarrow 9^{x}=9^{0} \Rightarrow x_2=0.$

Vježba 301

Riješi jednadžbu $3^{4\cdot x}=3\cdot\log_3\frac{1}{27}+3^{2\cdot x+2}+3^{2\cdot x}$.

Rezultat: $x_1=1\ ,\ x_2=0.$

Zadatak 302 (4A, TUPŠ)

Riješi jednadžbu $4^{5-9\cdot x}=\frac{1}{8^{x-2}}$.

Rješenje 302

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad,\quad a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \Rightarrow\ f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$4^{5-9\cdot x}=\frac{1}{8^{x-2}}\ \Rightarrow\ \left(2^2\right)^{5-9\cdot x}=\frac{1}{\left(2^3\right)^{x-2}}\ \Rightarrow\ 2^{2\cdot(5-9\cdot x)}=\frac{1}{2^{3\cdot(x-2)}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{10-18\cdot x}=\frac{1}{2^{3\cdot x-6}}\ \Rightarrow\ 2^{10-18\cdot x}=2^{-(3\cdot x-6)}\ \Rightarrow\ 10-18\cdot x=-(3\cdot x-6)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10-18\cdot x=-3\cdot x+6\ \Rightarrow\ -18\cdot x+3\cdot x=6-10\ \Rightarrow\ -15\cdot x=-4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -15\cdot x=-4\ /:(-15)\ \Rightarrow\ x=\frac{4}{15}.$$

Vježba 302

Riješi jednadžbu $4^{5-9\cdot x}=\frac{64}{8^x}$.

Rezultat: $x=\frac{4}{15}.$

Zadatak 303 (4A, TUPŠ)

Riješi jednadžbu $10^x=0.1\cdot 1000^{x-1}$.

Rješenje 303

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\quad,\quad 10^{-1}=0.1\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^{f(x)}=a^{g(x)}\ \Rightarrow\ f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$10^x=0.1\cdot 1000^{x-1}\ \Rightarrow\ 10^x=10^{-1}\cdot\left(10^3\right)^{x-1}\ \Rightarrow\ 10^x=10^{-1}\cdot 10^{3\cdot(x-1)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10^x=10^{-1}\cdot 10^{3\cdot x-3}\ \Rightarrow\ 10^x=10^{-1+3\cdot x-3}\ \Rightarrow\ x=-1+3\cdot x-3\ \Rightarrow\ x-3\cdot x=-1-3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\cdot x=-4\ \Rightarrow\ -2\cdot x=-4\ /:(-2)\ \Rightarrow\ x=2.$$

Vježba 303

Riješi jednadžbu $10\cdot 10^x=1000^{x-1}$.

Rezultat: $x = 2.$

Zadatak 304 (4A, TUPŠ)

Riješi jednadžbu $2^x \cdot 5^x = 0.1 \cdot 100000^{x-1}.$

Rješenje 304

Ponovimo!

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad 10^{-1} = 0.1.$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$2^x \cdot 5^x = 0.1 \cdot 100000^{x-1} \Rightarrow (2 \cdot 5)^x = 10^{-1} \cdot \left(10^5\right)^{x-1} \Rightarrow 10^x = 10^{-1} \cdot 10^{5 \cdot (x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^x = 10^{-1} \cdot 10^{5 \cdot x - 5} \Rightarrow 10^x = 10^{-1+5 \cdot x - 5} \Rightarrow x = -1 + 5 \cdot x - 5 \Rightarrow x - 5 \cdot x = -1 - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot x = -6 \Rightarrow -4 \cdot x = -6 \ /: (-4) \Rightarrow x = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Vježba 304

Riješi jednadžbu $2^{x+1} \cdot 5^{x+1} = 100000^{x-1}.$

Rezultat: $x = \frac{3}{2}.$

Zadatak 305 (MT, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\log(\sin x) = 0.$

Rješenje 305

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \ \ \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log 1 = 0 \quad , \quad \log f(x) = \log g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) \quad , \quad \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \ , \ k \in Z.$$

$$\log(\sin x) = 0.$$

Uvodimo zamjenu (supstituciju).

$$t = \sin x.$$

$$\log(\sin x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ t = \sin x \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \log t = 0 \;\Rightarrow\; \log t = \log 1 \;\Rightarrow\; t = 1.$$

Vraćamo se na zamjenu.

$$\left.\begin{array}{l} t = \sin x \\ t = 1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \sin x = 1 \;\Rightarrow\; x = \sin^{-1} 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \;\;,\;\; k \in Z.$$

Vježba 305

Riješi jednadžbu $3 \cdot \log(\cos x) = 0.$

Rezultat: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \;\;,\;\; k \in Z.$

Zadatak 306 (Mario, gimnazija)

Ako je $a^2 + b^2 = 6 \cdot a \cdot b$, dokazati da je $\log|a+b| - \log|a-b| = \frac{1}{2} \cdot \log 2.$

Rješenje 306

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \;\; \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$a = b \;\Rightarrow\; a + c = b + c \quad,\quad (x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad,\quad (x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2.$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad,\quad \left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad,\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad,\quad \log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;\;,\;\; n \neq 0 \;\;,\;\; n \neq 1.$$

Zadanu jednakost preoblikujemo na dva načina.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 6 \cdot a \cdot b \\ a^2 + b^2 = 6 \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 6 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 6 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 6 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 6 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} (a+b)^2 = 8 \cdot a \cdot b \\ (a-b)^2 = 4 \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} (a+b)^2 = 8 \cdot a \cdot b \;/\sqrt{\;} \\ (a-b)^2 = 4 \cdot a \cdot b \;/\sqrt{\;} \end{array}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} |a+b| = \sqrt{8 \cdot a \cdot b} \\ |a-b| = \sqrt{4 \cdot a \cdot b} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednakosti} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \frac{|a+b|}{|a-b|} = \frac{\sqrt{8 \cdot a \cdot b}}{\sqrt{4 \cdot a \cdot b}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|a+b|}{|a-b|}=\sqrt{\frac{8\cdot a\cdot b}{4\cdot a\cdot b}} \Rightarrow \frac{|a+b|}{|a-b|}=\sqrt{\frac{8\cdot a\cdot b}{4\cdot a\cdot b}} \Rightarrow \frac{|a+b|}{|a-b|}=\sqrt{2} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{logarotmiramo}\\ \text{jednakost}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|a+b|}{|a-b|}=\sqrt{2}\ /\log \Rightarrow \log\frac{|a+b|}{|a-b|}=\log\sqrt{2} \Rightarrow \log|a+b|-\log|a-b|=\frac{1}{2}\cdot\log 2.$$

Vježba 306

Ako je $a^2+b^2=4\cdot a\cdot b$, dokazati da je $\log|a+b|-\log|a-b|=\frac{1}{2}\cdot\log 3$.

Rezultat: Sličan dokaz.

Zadatak 307 (2A, TUPŠ)

Svođenjem na bazu 2 riješi jednadžbu $16^{5-x}=2\cdot 8^{2\cdot x+3}$.

Rješenje 307

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$16^{5-x}=2\cdot 8^{2\cdot x+3} \Rightarrow \left(2^4\right)^{5-x}=2^1\cdot\left(2^3\right)^{2\cdot x+3} \Rightarrow 2^{4\cdot(5-x)}=2^1\cdot 2^{3\cdot(2\cdot x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{20-4\cdot x}=2^1\cdot 2^{6\cdot x+9} \Rightarrow 2^{20-4\cdot x}=2^{1+6\cdot x+9} \Rightarrow 2^{20-4\cdot x}=2^{6\cdot x+10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20-4\cdot x=6\cdot x+10 \Rightarrow -4\cdot x-6\cdot x=10-20 \Rightarrow -10\cdot x=-10 \Rightarrow -10\cdot x=-10\ /:(-10) \Rightarrow x=1.$$

Vježba 307

Svođenjem na bazu 2 riješi jednadžbu $8\cdot 16^{4-x}=8^{2\cdot x+3}$.

Rezultat: x = 1.

Zadatak 308 (Vox, gimnazija)

Broj stanovnika nekog grada povećava se po eksponencijalnom zakonu $S=S_0\cdot e^{k\cdot t}$, gdje je S_0 broj stanovnika na početku promatranja, a S_t broj nakon t godina. Ako se u posljednjih 10 godina broj povećao s 52000 na 64000, onda je koeficijent k približno jednak:

$A.\ -0.035 \qquad B.\ 0.11 \qquad C.\ 0.02 \qquad D.\ -0.043$

Rješenje 308

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} a=b\\ c=d\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \quad , \quad a=b \Rightarrow b=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = \underset{\rightarrow}{b^c} \qquad a = b^c$$

Prirodni logaritam

Logaritamska funkcija $\log_e$ označava se simbolom ln. Broj ln x zovemo prirodni logaritam.

$$\ln x = \log_e x \quad , \quad e = 2.7182818284590452353602874713527.$$

Neka je $S_1 = 52000$ broj stanovnika grada nakon t_1 godina, a $S_2 = 64000$ broj stanovnika nakon t_2 godina. Tada je

$$t_2 - t_1 = \Delta t = 10.$$

Iz sustava jednadžbi dobijemo k.

$$\left.\begin{matrix} S_1 = S_0 \cdot e^{k \cdot t_1} \\ S_2 = S_0 \cdot e^{k \cdot t_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_0 \cdot e^{k \cdot t_2}}{S_0 \cdot e^{k \cdot t_1}} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{\cancel{S_0} \cdot e^{k \cdot t_2}}{\cancel{S_0} \cdot e^{k \cdot t_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{e^{k \cdot t_2}}{e^{k \cdot t_1}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{dijeljenje potencija} \\ \text{jednakih baza, baza } e \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = e^{k \cdot t_2 - k \cdot t_1} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = e^{k \cdot (t_2 - t_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[t_2 - t_1 = \Delta t\right] \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = e^{k \cdot \Delta t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = e^{k \cdot \Delta t} \ / \ln \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{S_2}{S_1} = \ln e^{k \cdot \Delta t} \Rightarrow \ln \frac{S_2}{S_1} = k \cdot \Delta t \Rightarrow k \cdot \Delta t = \ln \frac{S_2}{S_1} \Rightarrow k \cdot \Delta t = \ln \frac{S_2}{S_1} \ / \cdot \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln \frac{S_2}{S_1}}{\Delta t} \Rightarrow k = \frac{\ln S_2 - \ln S_1}{\Delta t} \Rightarrow k = \frac{\ln 64\,000 - \ln 52\,000}{10} \Rightarrow k = 0.02.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 308

Broj stanovnika nekog grada povećava se po eksponencijalnom zakonu $S = S_0 \cdot e^{k \cdot t}$, gdje je S_0 broj stanovnika na početku promatranja, a S_t broj nakon t godina. Ako se u posljednjih 10 godina broj povećao s 104000 na 128000, onda je koeficijent k približno jednak:

$$A.\ -0.035 \qquad B.\ 0.11 \qquad C.\ 0.02 \qquad D.\ -0.043$$

Rezultat: C.

Zadatak 309 (Max, gimnazija)

Za funkciju $f(x) = a^x$ vrijedi $f(1) \cdot f(2) = 27.$ Koliko je $f(-1) \cdot f(3)$?

Rješenje 309

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Izračunamo bazu a eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$.

$$f(1)\cdot f(2)=27 \Rightarrow \left[f(x)=a^{x}\right] \Rightarrow a^{1}\cdot a^{2}=27 \Rightarrow a^{3}=27 \Rightarrow a^{3}=27 \,/\sqrt[3]{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt[3]{27} \Rightarrow a=\sqrt[3]{3^{3}} \Rightarrow a=3.$$

Eksponencijalna funkcija glasi

$$f(x)=3^{x}.$$

Tada je:

$$f(-1)\cdot f(3)=\left[f(x)=3^{x}\right]=3^{-1}\cdot 3^{3}=3^{2}=9.$$

Vježba 309

Za funkciju $f(x)=a^{x}$ vrijedi $f(1)\cdot f(2)=27$. Koliko je $f(-1)\cdot f(4)$?

Rezultat: 27.

Zadatak 310 (Hrvoje, gimnazija)

Procjenjuje se da radnik, nakon T sati uvježbavanja rada na stroju, može u jednome danu izraditi N proizvoda, gdje se N računa prema formuli $N=40\cdot\left(1-10^{-0.052\cdot T}\right)$. Koliko proizvoda dnevno može zgotoviti radnik nakon 5 sati uvježbavanja?

Rješenje 310

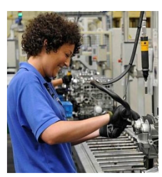
Ponovimo!

Koristimo džepno računalo!

$$\left.\begin{array}{l} T=5 \\ N=40\cdot\left(1-10^{-0.052\cdot T}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow N=40\cdot\left(1-10^{-0.052\cdot 5}\right) \Rightarrow N=40\cdot\left(1-10^{-0.26}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N=40\cdot(1-0.54954) \Rightarrow N=40\cdot 0.45046 \Rightarrow N=18.02 \Rightarrow N\approx 18.$$

Radnik može dnevno zgotoviti 18 proizvoda.



Vježba 310

Procjenjuje se da radnik, nakon T sati uvježbavanja rada na stroju, može u jednome danu izraditi N proizvoda, gdje se N računa prema formuli $N=40\cdot\left(1-10^{-0.052\cdot T}\right)$. Koliko proizvoda dnevno može zgotoviti radnik nakon 8 sati uvježbavanja?

Rezultat: 24.

Zadatak 311 (Hrvoje, gimnazija)

Procjenjuje se da radnik, nakon T sati uvježbavanja rada na stroju, može u jednome danu izraditi N proizvoda, gdje se N računa prema formuli $N=40\cdot\left(1-10^{-0.052\cdot T}\right)$. Nakon koliko najmanje sati uvježbavanja radnik može izraditi 33 proizvoda dnevno?

Rješenje 311

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\boxed{\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \underset{\rightarrow}{} \qquad a = b^c}$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\boxed{\log_{10} x = \log x.}$$

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad , \quad \log 10 = 1.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Računamo nakon koliko najmanje sati uvježbavanja radnik može izraditi 33 proizvoda dnevno.

$$\left.\begin{array}{l} N = 33 \\ N = 40 \cdot \left(1 - 10^{-0.052 \cdot T}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 33 = 40 \cdot \left(1 - 10^{-0.052 \cdot T}\right) \Rightarrow 33 = 40 \cdot \left(1 - 10^{-0.052 \cdot T}\right) \,/ : 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{33}{40} = 1 - 10^{-0.052 \cdot T} \Rightarrow 10^{-0.052 \cdot T} = 1 - \frac{33}{40} \Rightarrow 10^{-0.052 \cdot T} = \frac{1}{1} - \frac{33}{40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{-0.052 \cdot T} = \frac{40 - 33}{40} \Rightarrow 10^{-0.052 \cdot T} = \frac{7}{40} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{-0.052 \cdot T} = \frac{7}{40} \,/ \log \Rightarrow \log 10^{-0.052 \cdot T} = \log\left(\frac{7}{40}\right) \Rightarrow -0.052 \cdot T \cdot \log 10 = \log\left(\frac{7}{40}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.052 \cdot T \cdot 1 = \log\left(\frac{7}{40}\right) \Rightarrow -0.052 \cdot T = \log\left(\frac{7}{40}\right) \Rightarrow -0.052 \cdot T = \log\left(\frac{7}{40}\right) \,/ \cdot \frac{1}{-0.052} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{\log\left(\frac{7}{40}\right)}{-0.052} \Rightarrow T = \frac{\log 7 - \log 40}{-0.052} \Rightarrow T = 14.557 \Rightarrow T \approx 15.$$

Radniku treba najmanje 15 sati uvježbavanja.

Vježba 311

Procjenjuje se da radnik, nakon T sati uvježbavanja rada na stroju, može u jednome danu izraditi N proizvoda, gdje se N računa prema formuli $N = 40 \cdot \left(1 - 10^{-0.052 \cdot T}\right)$. Nakon koliko najmanje sati uvježbavanja radnik može izraditi 20 proizvoda dnevno?

Rezultat: 6.

Zadatak 312 (Dado, srednja škola)

Riješi jednadžbu $4^{3 \cdot x} = 8^{x-1}$.

$$A.\ x = -1 \qquad B.\ x = -\frac{3}{4} \qquad C.\ x = -\frac{4}{3} \qquad D.\ x = \frac{3}{4}$$

Rješenje 312

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$4^{3 \cdot x} = 8^{x-1} \Rightarrow \left(2^2\right)^{3 \cdot x} = \left(2^3\right)^{x-1} \Rightarrow 2^{6 \cdot x} = 2^{3 \cdot (x-1)} \Rightarrow 2^{6 \cdot x} = 2^{3 \cdot x - 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot x = 3 \cdot x - 3 \Rightarrow 6 \cdot x - 3 \cdot x = -3 \Rightarrow 3 \cdot x = -3 \Rightarrow 3 \cdot x = -3 \;/ : 3 \Rightarrow x = -1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 312

Riješi jednadžbu $9^{3 \cdot x} = 27^{x-1}$.

$$A.\ x = -1 \qquad B.\ x = -\frac{3}{4} \qquad C.\ x = -\frac{4}{3} \qquad D.\ x = \frac{3}{4}$$

Rezultat: A.

Zadatak 313 (Ken, srednja škola)

Ako se 25 g radioaktivnog otpada radioaktivnim raspadom reducira na 20 g nakon 8000 godina, koliko je vrijeme poluraspada radioaktivne tvari?

Rješenje 313

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Prirodni logaritam

Logaritamska funkcija $\log_e$ označava se simbolom ln. Broj $\ln x$ zovemo prirodni logaritam.

$$\ln x = \log_e x \quad , \quad e = 2.718281828459045235360287471352 7.$$

$$\ln e = 1 \quad , \quad \ln e^n = n.$$

Raspad radioaktivne tvari odvija se po eksponencijalnom zakonu

$$M = M_0 \cdot e^{k \cdot t},$$

gdje je M masa radioaktivne tvari koja je preostala nakon t godina (tj. masa koja se još nije raspala nakon t godina), M_0 početna masa radioaktivne tvari (u trenutku t = 0), k konstanta specifična za svaku radioaktivnu tvar, t vrijeme u godinama.

Vrijeme poluraspada t_p neke radioaktivne tvari jest vrijeme potrebno da se raspadne polovina početne mase te tvari. To vrijeme računamo iz jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{M_0}{2} - \text{polovina početne mase} \\ M &= M_0 \cdot e^{k \cdot t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \;/ \cdot \frac{1}{M_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k \cdot t} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \;/ \ln \Rightarrow \ln e^{k \cdot t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \;/ \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ k = \frac{1}{t_p} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Najprije izračunamo konstantu k.

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = 25 \\ M = 20 \\ t = 8000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[M = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \right] \Rightarrow 20 = 25 \cdot e^{8000 \cdot k} \Rightarrow 20 = 25 \cdot e^{8000 \cdot k} \quad /: 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{20}{25} = e^{8000 \cdot k} \Rightarrow \frac{20}{25} = e^{8000 \cdot k} \Rightarrow \frac{4}{5} = e^{8000 \cdot k} \Rightarrow e^{8000 \cdot k} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow e^{8000 \cdot k} = \frac{4}{5} \quad / \ln \Rightarrow \ln e^{8000 \cdot k} = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow 8000 \cdot k = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8000 \cdot k = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \quad / \cdot \frac{1}{8000} \Rightarrow k = \frac{1}{8000} \cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow k = -2.789 \cdot 10^{-5}.$$

Vrijeme poluraspada t_p iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ k = -2.789 \cdot 10^{-5} \end{array}\right\} \Rightarrow t_p = \frac{1}{-2.789 \cdot 10^{-5}} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_p = -\frac{1}{2.789 \cdot 10^{-5}} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t_p = 24852.9 \ \textit{godina}.$$

Vježba 313

Ako se 50 g radioaktivnog otpada radioaktivnim raspadom reducira na 40 g nakon 8000 godina, koliko je vrijeme poluraspada radioaktivne tvari?

Rezultat: 24 852.9 godina.

Zadatak 314 (Ken, srednja škola)

Koliko je vrijeme potrebno da se 2.4 g ugljika ^{14}C radioaktivnim raspadom reducira na 1.3 g? Vrijeme poluraspada ugljika ^{14}C jest 5730 godina.

Rješenje 314

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \underset{\rightarrow}{\log_b a = b^c} \qquad a = b^c$$

Prirodni logaritam

Logaritamska funkcija $\log_e$ označava se simbolom ln. Broj ln *x* zovemo prirodni logaritam.

$$\ln x = \log_e x \quad , \quad e = 2.71828182845904523536028747135 27.$$

$$\ln e = 1 \quad , \quad \ln e^{n} = n.$$

Raspad radioaktivne tvari odvija se po eksponencijalnom zakonu

$$M = M_0 \cdot e^{k \cdot t},$$

gdje je M masa radioaktivne tvari koja je preostala nakon t godina (tj. masa koja se još nije raspala nakon t godina), M_0 početna masa radioaktivne tvari (u trenutku t = 0), k konstanta specifična za svaku radioaktivnu tvar, t vrijeme u godinama.
Vrijeme poluraspada t_p neke radioaktivne tvari jest vrijeme potrebno da se raspadne polovina početne mase te tvari. To vrijeme računamo iz jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} M = \frac{M_0}{2} - \text{polovina početne mase} \\ M = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \;/ \cdot \frac{1}{M_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k \cdot t} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \;/ \ln \Rightarrow \ln e^{k \cdot t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \;/ \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Uočimo da vrijedi:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ k = \frac{1}{t_p} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\}}.$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Najprije izračunamo konstantu k.

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = 2.4 \\ M = 1.3 \\ t_p = 5\,730 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k = \frac{1}{t_p} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] \Rightarrow k = \frac{1}{5\,730} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k = -1.21 \cdot 10^{-4}.$$

Tada vrijeme raspada t iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = 2.4 \\ M = 1.3 \\ k = -1.21 \cdot 10^{-4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[M = M_0 \cdot e^{k \cdot t}\right] \Rightarrow 1.3 = 2.4 \cdot e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.3 = 2.4 \cdot e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t} \;/ \cdot \frac{10}{24} \Rightarrow \frac{13}{24} = e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t} \Rightarrow e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t} = \frac{13}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t} = \frac{13}{24} \;/ \ln \Rightarrow \ln e^{-1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t} = \ln\left(\frac{13}{24}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t = \ln\left(\frac{13}{24}\right) \Rightarrow -1.21 \cdot 10^{-4} \cdot t = \ln\left(\frac{13}{24}\right) \;/ \cdot \frac{1}{-1.21 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{-1.21 \cdot 10^{-4}} \cdot \ln\left(\frac{13}{24}\right) \Rightarrow t = \frac{-1}{1.21 \cdot 10^{-4}} \cdot \ln\left(\frac{13}{24}\right) \Rightarrow t = 5\,066.98 \; godina.$$

Vježba 314

Koliko je vrijeme potrebno da se 4.8 g ugljika ^{14}C radioaktivnim raspadom reducira na 2.6 g? Vrijeme poluraspada ugljika ^{14}C jest 5730 godina.

Rezultat: 5 066.98 godina.

Zadatak 315 (Ken, srednja škola)

Odredi vrijeme poluraspada materije, ako je funkcija radioaktivnog raspada $M = M_0 \cdot e^{-0.013 \cdot t}$ (vrijeme t je u godinama).

Rješenje 315

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

Prirodni logaritam

Logaritamska funkcija $\log_e$ označava se simbolom ln. Broj ln *x* zovemo prirodni logaritam.

$$\ln x = \log_e x \quad , \quad e = 2.71828182845904523536028747135 27.$$

$$\ln e = 1 \quad , \quad \ln e^n = n.$$

Raspad radioaktivne tvari odvija se po eksponencijalnom zakonu

$$M = M_0 \cdot e^{k \cdot t},$$

gdje je M masa radioaktivne tvari koja je preostala nakon t godina (tj. masa koja se još nije raspala nakon t godina), M_0 početna masa radioaktivne tvari (u trenutku t = 0), k konstanta specifična za svaku radioaktivnu tvar, t vrijeme u godinama.

Vrijeme poluraspada t_p neke radioaktivne tvari jest vrijeme potrebno da se raspadne polovina početne mase te tvari. To vrijeme računamo iz jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} M = \dfrac{M_0}{2} - \text{polovina početne mase} \\ M = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \quad / \cdot \frac{1}{M_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k \cdot t} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \quad / \ln \Rightarrow \ln e^{k \cdot t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad / \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} t_p = \dfrac{1}{k} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \\ k = \dfrac{1}{t_p} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right\}.$$

Iz zadane funkcije odredimo konstantu k, a zatim izračunamo vrijeme poluraspada t_p.

$$\left.\begin{array}{l} M = M_0 \cdot e^{-0.013 \cdot t} \\ M = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow k = -0.013 \Rightarrow \left[t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] \Rightarrow t_p = \frac{1}{-0.013} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; t_p = \frac{-1}{0.013} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; t_p = 53 \;\; godine.$$

Vježba 315

Odredi vrijeme poluraspada materije, ako je funkcija radioaktivnog raspada $M = M_0 \cdot e^{-0.026 \cdot t}$ (vrijeme t je u godinama).

Rezultat: 26.66 godina.

Zadatak 316 (BB, gimnazija)

Za koliko se posto smanji količina radija za 10 godina, ako je vrijeme poluraspada radija 1580 godina?

Rješenje 316

Ponovimo!

Kako izračunati koliko posto iznosi a od b?

$$\frac{a}{b} \cdot 100\%.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Prirodni logaritam

Logaritamska funkcija $\log_e$ označava se simbolom ln. Broj $\ln x$ zovemo prirodni logaritam.

$$\ln x = \log_e x \quad , \quad e = 2.718281828459045235360287471352 7.$$

$$\ln e = 1 \; , \; \ln e^n = n.$$

Raspad radioaktivne tvari odvija se po eksponencijalnom zakonu

$$M = M_0 \cdot e^{k \cdot t},$$

gdje je M masa radioaktivne tvari koja je preostala nakon t godina (tj. masa koja se još nije raspala nakon t godina), M_0 početna masa radioaktivne tvari (u trenutku t = 0), k konstanta specifična za svaku radioaktivnu tvar, t vrijeme u godinama.
Vrijeme poluraspada t_p neke radioaktivne tvari jest vrijeme potrebno da se raspadne polovina početne mase te tvari. To vrijeme računamo iz jednadžbe:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{M_0}{2} - \text{polovina početne mase} \\ M &= M_0 \cdot e^{k \cdot t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \Rightarrow \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{k \cdot t} \;\; / \cdot \frac{1}{M_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k \cdot t} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \;\; / \ln \Rightarrow \ln e^{k \cdot t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \;\; / \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} t_p = \frac{1}{k}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ k = \frac{1}{t_p}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)\end{array}\right\}.$$

Odredimo konstantu k za radij.

$$\left.\begin{array}{l} k = \frac{1}{t_p}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ t_p = 1580 \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{1}{1580}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k = -4.387\cdot 10^{-4}.$$

1.inačica

Najprije izračunamo postotak neraspadnutih atoma radija.

$$\frac{M}{M_0}\cdot 100\% = \frac{M_0\cdot e^{k\cdot t}}{M_0}\cdot 100\% = \frac{M_0\cdot e^{k\cdot t}}{M_0}\cdot 100\% = e^{k\cdot t}\cdot 100\% = \left[\begin{array}{l} k = -4.387\cdot 10^{-4} \\ t = 10\end{array}\right] =$$

$$= e^{-4.387\cdot 10^{-4}\cdot 10}\cdot 100\% = e^{-4.387\cdot 10^{-3}}\cdot 100\% = \frac{1}{e^{4.387\cdot 10^{-3}}}\cdot 100\% = 99.56\%.$$

Tada je postotak raspadnutih atoma jednak:

$$100\% - 99.56\% = 0.44\%.$$

2.inačica

Postotak raspadnutih atoma radija je jednak:

$$\frac{M_0 - M}{M_0}\cdot 100\% = \frac{M_0 - M_0\cdot e^{k\cdot t}}{M_0}\cdot 100\% = \frac{M_0\cdot\left(1-e^{k\cdot t}\right)}{M_0}\cdot 100\% = \frac{M_0\cdot\left(1-e^{k\cdot t}\right)}{M_0}\cdot 100\% =$$

$$= \left(1-e^{k\cdot t}\right)\cdot 100\% = \left[\begin{array}{l} k = -4.387\cdot 10^{-4} \\ t = 10\end{array}\right] = \left(1-e^{-4.387\cdot 10^{-4}\cdot 10}\right)\cdot 100\% =$$

$$= \left(1-e^{-4.387\cdot 10^{-3}}\right)\cdot 100\% = \left(1-\frac{1}{e^{4.387\cdot 10^{-3}}}\right)\cdot 100\% = 0.44\%.$$

Vježba 316

Za koliko se posto smanji količina radija za 20 godina, ako je vrijeme poluraspada radija 1580 godina?

Rezultat: 0.87%.

Zadatak 317 (Grey, gimnazija)

Za koliko će vremena od 100 grama stroncija ^{90}Sr ostati 10 grama? (vrijeme poluraspada stroncija t_p = 28 godina)

Rješenje 317

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \;\; \rightarrow \qquad a = b^c$$

Prirodni logaritam

Logaritamska funkcija $\log_e$ označava se simbolom ln. Broj $\ln x$ zovemo prirodni logaritam.

$$\ln x = \log_e x \quad , \quad e = 2.71828182845904523536028747135 27.$$

$$\ln e = 1 \quad , \quad \ln e^n = n.$$

Raspad radioaktivne tvari odvija se po eksponencijalnom zakonu

$$N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t},$$

gdje je N masa radioaktivne tvari koja je preostala nakon t godina (tj. masa koja se još nije raspala nakon t godina), N_0 početna masa radioaktivne tvari (u trenutku t = 0), k konstanta specifična za svaku radioaktivnu tvar, t vrijeme u godinama.

Vrijeme poluraspada t_p neke radioaktivne tvari jest vrijeme potrebno da se raspadne polovina početne mase te tvari. To vrijeme računamo iz jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} N = \frac{N_0}{2} - \text{polovina početne mase} \\ N = N_0 \cdot e^{k \cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{k \cdot t} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{k \cdot t} \;/ \cdot \frac{1}{N_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k \cdot t} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \;/\; \ln \Rightarrow \ln e^{k \cdot t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \;/ \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Uočimo da vrijedi:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ k = \frac{1}{t_p} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\}}.$$

Odredimo konstantu k za stroncij.

$$\left.\begin{array}{l} k = \frac{1}{t_p} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ t_p = 28 \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{1}{28} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k = -0.024755.$$

Tada vrijeme raspada t u godinama iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} N_0 = 100 \\ N = 10 \\ k = -0.024755 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[N = N_0 \cdot e^{k \cdot t}\right] \Rightarrow 10 = 100 \cdot e^{-0.024755 \cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 = 100 \cdot e^{-0.024755 \cdot t} \;/ \cdot \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{10} = e^{-0.024755 \cdot t} \Rightarrow e^{-0.024755 \cdot t} = \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow e^{-0.024755 \cdot t} = \frac{1}{10} \;/\; \ln \Rightarrow \ln e^{-0.024755 \cdot t} = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.024755 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow -0.024755 \cdot t = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \;/ \cdot \frac{1}{-0.024755} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; t = \frac{1}{-0.024755} \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) \; \Rightarrow \; t \approx 93 \; godine.$$

Vježba 317

Za koliko će vremena od 200 grama stroncija ^{90}Sr ostati 20 grama? (vrijeme poluraspada stroncija t_p = 28 godina)

Rezultat: 93 godine.

Zadatak 318 (Grey, gimnazija)

Za koliko će vremena od 100 grama joda ^{131}J ostati 1 gram? (vrijeme poluraspada joda t_p = 8 dana)

Rješenje 318

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = \overset{\rightarrow}{b^c} \qquad a = b^c$$

Prirodni logaritam

Logaritamska funkcija $\log_e$ označava se simbolom ln. Broj ln x zovemo prirodni logaritam.

$$\ln x = \log_e x \quad , \quad e = 2.71828182845904523536028747135 27.$$

$$\ln e = 1 \quad , \quad \ln e^n = n.$$

Raspad radioaktivne tvari odvija se po eksponencijalnom zakonu

$$N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t},$$

gdje je N masa radioaktivne tvari koja je preostala nakon t godina (tj. masa koja se još nije raspala nakon t godina), N_0 početna masa radioaktivne tvari (u trenutku t = 0), k konstanta specifična za svaku radioaktivnu tvar, t vrijeme u danima.

Vrijeme poluraspada t_p neke radioaktivne tvari jest vrijeme potrebno da se raspadne polovina početne mase te tvari. To vrijeme računamo iz jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} N = \dfrac{N_0}{2} - \text{polovina početne mase} \\ N = N_0 \cdot e^{k \cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{k \cdot t} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{k \cdot t} \; / \cdot \frac{1}{N_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{k \cdot t} \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow e^{k \cdot t} = \frac{1}{2} \; / \ln \Rightarrow \ln e^{k \cdot t} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k \cdot t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \; / \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow t_p = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} t_p = \dfrac{1}{k} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \\ k = \dfrac{1}{t_p} \cdot \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right\}.$$

Odredimo konstantu k za jod.

$$\left.\begin{array}{l} k=\frac{1}{t_p}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ t_p=8 \end{array}\right\} \Rightarrow k=\frac{1}{8}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k=-0.0866434.$$

Tada vrijeme raspada t u danima iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} N_0=100 \\ N=1 \\ k=-0.0866434 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[N=N_0\cdot e^{k\cdot t}\right] \Rightarrow 1=100\cdot e^{-0.0866434\cdot t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=100\cdot e^{-0.0866434\cdot t} \;/\cdot\frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{100}=e^{-0.0866434\cdot t} \Rightarrow e^{-0.0866434\cdot t}=\frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu}\end{array}\right] \Rightarrow e^{-0.0866434\cdot t}=\frac{1}{100} \;/\ln \Rightarrow \ln e^{-0.0866434\cdot t}=\ln\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.0866434\cdot t=\ln\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow -0.0866434\cdot t=\ln\left(\frac{1}{100}\right) \;/\cdot\frac{1}{-0.0866434} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{-0.0866434}\cdot\ln\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow t\approx 53\ dana.$$

Vježba 318

Za koliko će vremena od 1000 grama joda ^{131}J ostati 10 grama? (vrijeme poluraspada joda t_p = 8 dana)

Rezultat: 53 dana.

Zadatak 319 (Grey, gimnazija)

Odredite postotak radija ^{226}Ra koji će ostati nakon 2250 godina? (vrijeme poluraspada radija t_p = 1660 godina)

Rješenje 319

Ponovimo!

Kako izračunati koliko posto iznosi a od b?

$$\frac{a}{b}\cdot 100\%.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \qquad a=b^c$$
$$\rightarrow$$

Prirodni logaritam

Logaritamska funkcija $\log_e$ označava se simbolom ln. Broj ln x zovemo prirodni logaritam.

$$\ln x=\log_e x \quad , \quad e=2.71828182845904523536028747135 27.$$

$$\ln e=1 \quad , \quad \ln e^n=n.$$

Raspad radioaktivne tvari odvija se po eksponencijalnom zakonu

$$N(t)=N_0\cdot e^{k\cdot t},$$

gdje je N masa radioaktivne tvari koja je preostala nakon t godina (tj. masa koja se još nije raspala nakon t godina), N_0 početna masa radioaktivne tvari (u trenutku t = 0), k konstanta specifična za

svaku radioaktivnu tvar, t vrijeme u godinama.
Vrijeme poluraspada t_p neke radioaktivne tvari jest vrijeme potrebno da se raspadne polovina početne mase te tvari. To vrijeme računamo iz jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} N=\frac{N_0}{2} - \text{polovina početne mase} \\ N=N_0\cdot e^{k\cdot t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{N_0}{2}=N_0\cdot e^{k\cdot t} \Rightarrow \frac{N_0}{2}=N_0\cdot e^{k\cdot t} \;/\cdot\frac{1}{N_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=e^{k\cdot t} \Rightarrow e^{k\cdot t}=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{array}\right] \Rightarrow e^{k\cdot t}=\frac{1}{2} \;/\ \ln \Rightarrow \ln e^{k\cdot t}=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\cdot t=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k\cdot t=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \;/\cdot\frac{1}{k} \Rightarrow t_p=\frac{1}{k}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} t_p=\frac{1}{k}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ k=\frac{1}{t_p}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\}.$$

Odredimo konstantu k za radij.

$$\left.\begin{array}{l} k=\frac{1}{t_p}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ t_p=1660 \end{array}\right\} \Rightarrow k=\frac{1}{1660}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k=-4.175585\cdot 10^{-4}.$$

Računamo postotak neraspadnutih atoma radija.

$$\frac{N}{N_0}\cdot 100\%=\frac{N_0\cdot e^{k\cdot t}}{N_0}\cdot 100\%=\frac{\cancel{N_0}\cdot e^{k\cdot t}}{\cancel{N_0}}\cdot 100\%=e^{k\cdot t}\cdot 100\%=\left[\begin{array}{l} k=-4.175585\cdot 10^{-4}\\ t=2\,250\end{array}\right]=$$

$$=e^{-4.175585\cdot 10^{-4}\cdot 2250}\cdot 100\%=e^{-0.939506625}\cdot 100\%=\frac{1}{e^{0.939506625}}\cdot 100\%=39\%.$$

Vježba 319

Odredite postotak polonija ^{210}Po koji će ostati nakon 2 godine? (vrijeme poluraspada polonija t_p = 138 dana)

Rezultat: Napomena: 2 godine = 730 dana, 2.56%.

Zadatak 320 (Tena, gimnazija)

Riješi jednadžbu $5\cdot 100^{1-x}=\frac{1}{2}\cdot 10^{6\cdot x-1}$.

Rješenje 320

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$5 \cdot 100^{1-x} = \frac{1}{2} \cdot 10^{6 \cdot x - 1} \Rightarrow 5 \cdot 100^{1-x} = \frac{1}{2} \cdot 10^{6 \cdot x - 1} \ / \cdot 2 \Rightarrow 10 \cdot 100^{1-x} = 10^{6 \cdot x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{1} \cdot \left(10^{2}\right)^{1-x} = 10^{6 \cdot x - 1} \Rightarrow 10^{1} \cdot 10^{2 - 2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1} \Rightarrow 10^{1 + 2 - 2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{3 - 2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1} \Rightarrow 3 - 2 \cdot x = 6 \cdot x - 1 \Rightarrow -2 \cdot x - 6 \cdot x = -1 - 3 \Rightarrow -8 \cdot x = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 \cdot x = -4 \ / : (-8) \Rightarrow x = \frac{4}{8} \Rightarrow x = \frac{4}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vježba 320

Riješi jednadžbu $2 \cdot 100^{1-x} = \frac{1}{5} \cdot 10^{6 \cdot x - 1}$.

Rezultat: $x = \frac{1}{2}$.