Zadatak 061 (Viktor, srednja škola)

Ako x i y zadovoljavaju sustav $2^x \cdot (x+y) = 10$ i $\sqrt[x]{x+y} = 5,$ tada y iznosi:

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 5 \qquad E.\ 9$

Rješenje 061

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^x \cdot (x+y) = 10 \\ \sqrt[x]{x+y} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^x \cdot (x+y) = 10 \\ \sqrt[x]{x+y} = 5 \;/\,^x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^x \cdot (x+y) = 10 \\ \left(\sqrt[x]{x+y}\right)^x = 5^x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2^x \cdot (x+y) = 10 \\ x+y = 5^x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow 2^x \cdot 5^x = 10 \Rightarrow (2 \cdot 5)^x = 10 \Rightarrow 10^x = 10^1 \Rightarrow x = 1.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x+y = 5^x \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + y = 5^1 \Rightarrow 1 + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 1 \Rightarrow y = 4.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 061

Ako x i y zadovoljavaju sustav $2^x \cdot (x+y) = 10$ i $\sqrt[x]{x+y} = 5,$ tada x iznosi:

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 5 \qquad E.\ 9$

Rezultat: A.

Zadatak 062 (Vlado, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\sqrt{x} + 6 = x.$

Rješenje 062

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajena metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

1.inačica

$$\sqrt{x} + 6 = x \Rightarrow x = \sqrt{x} + 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ t = \sqrt{x} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 3 \cdot t + 2 \cdot t - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{array}\right] \Rightarrow \left(t^2 - 3 \cdot t\right) + (2 \cdot t - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\cdot(t-3)+2\cdot(t-3)=0 \Rightarrow (t-3)\cdot(t+2)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t-3=0 \\ t+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=3 \\ t_2=-2 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow t=3.$$

Vraćamo se zamjeni.

$$\left.\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ t=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow \sqrt{x}=3\ /^{2} \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=3^2 \Rightarrow x=9.$$

Provjera!

Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$\sqrt{x}+6=x$$

$\sqrt{x}+6=x$ x = 9
$\sqrt{9}+6=9$ $3+6=9$ $9=9$ x jest rješenje

2.inačica

$$\sqrt{x}+6=x \Rightarrow \sqrt{x}=x-6 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow \sqrt{x}=x-6\ /^{2} \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=(x-6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=x^2-12\cdot x+36 \Rightarrow x^2-12\cdot x+36=x \Rightarrow x^2-12\cdot x+36-x=0 \Rightarrow x^2-13\cdot x+36=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-9\cdot x-4\cdot x+36=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{array}\right] \Rightarrow \left(x^2-9\cdot x\right)+(-4\cdot x+36)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(x-9)-4\cdot(x-9)=0 \Rightarrow (x-9)\cdot(x-4)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-9=0 \\ x-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=9 \\ x_2=4 \end{array}\right\}.$$

Provjera!

Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt{x}+6=x$	
$x=9$	$x=4$
$\sqrt{9}+6=9$ $3+6=9$ $9=9$ x je rješenje	$\sqrt{4}+6=4$ $2+6=4$ $8\neq 4$ x nije rješenje

Vježba 062

Riješite jednadžbu: $\sqrt{x}+2=x.$

Rezultat: x = 4.

Zadatak 063 (Ante, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$

Rješenje 063

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^3=a\cdot\sqrt{a} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n : a^m=a^{n-m}.$$

$$\left(a\cdot b\right)^{n}=a^{n}\cdot b^{n} \quad , \quad \left(a+b\right)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}.$$

$$\left(a-b\right)^{3}=a^{3}-3\cdot a^{2}\cdot b+3\cdot a\cdot b^{2}-b^{3}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajena metoda rješavanja:
Kubiramo ili kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1 \Rightarrow \sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{kubiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1} \;/^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{2-x}\right)^{3}=\left(1-\sqrt{x-1}\right)^{3} \Rightarrow 2-x=1^{3}-3\cdot 1^{2}\cdot\sqrt{x-1}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{x-1}\right)^{2}-\left(\sqrt{x-1}\right)^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-x=1-3\cdot\sqrt{x-1}+3\cdot(x-1)-(x-1)\cdot\sqrt{x-1} \Rightarrow 3\cdot\sqrt{x-1}+(x-1)\cdot\sqrt{x-1}=1+3\cdot(x-1)-2+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1}\cdot(3+x-1)=1+3\cdot x-3-2+x \Rightarrow \sqrt{x-1}\cdot(x+2)=4\cdot x-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1}\cdot(x+2)=4\cdot(x-1) \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{kvadriramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{x-1}\cdot(x+2)=4\cdot(x-1) \;/^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\cdot(x+2)\right)^{2}=\left(4\cdot(x-1)\right)^{2} \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^{2}\cdot(x+2)^{2}=4^{2}\cdot(x-1)^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^{2}+4\cdot x+4\right)=16\cdot(x-1)^{2} \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^{2}+4\cdot x+4\right)-16\cdot(x-1)^{2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^{2}+4\cdot x+4-16\cdot(x-1)\right)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^{2}+4\cdot x+4-16\cdot x+16\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^{2}-12\cdot x+20\right)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^{2}-10\cdot x-2\cdot x+20\right)=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left(\left(x^{2}-10\cdot x\right)+(-2\cdot x+20)\right)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x\cdot(x-10)-2\cdot(x-10)\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot(x-10)\cdot(x-2)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}x-1=0\\ x-10=0\\ x-2=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_1=1\\ x_2=10\\ x_3=2\end{matrix}\right\}.$$

Provjera!
Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$		
x = 1	x = 10	x = 2
$\sqrt[3]{2-1}+\sqrt{1-1}=1$	$\sqrt[3]{2-10}+\sqrt{10-1}=1$	$\sqrt[3]{2-2}+\sqrt{2-1}=1$

$\sqrt[3]{1}+\sqrt{0}=1$ $1+0=1$ $1=1$ x je rješenje	$\sqrt[3]{-8}+\sqrt{9}=1$ $-2+3=1$ $1=1$ x je rješenje	$\sqrt[3]{0}+\sqrt{1}=1$ $0+1=1$ $1=1$ x je rješenje

Vježba 063

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 064 (Maturant, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+1=0.$

Rješenje 064

Ponovimo!

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x \in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y \in B$.

Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je $x \geq 0$ ili $x \in [0,+\infty\rangle$.

Budući da je $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x-3} \geq 0 \\ \sqrt{x-2} \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \geq 0\end{array}\right\}$, lijeva strana jednadžbe je pozitivna, a desna strana jednaka nuli.

Jednadžba nema rješenja.

Vježba 064

$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}+2=0.$

Rezultat: Nema rješenja.

Zadatak 065 (Maturant, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\sqrt{5 \cdot x-1}+\sqrt{3 \cdot x-2}+\sqrt{x+2}=7.$

Rješenje 065

Ponovimo!

$$a \geq b \;,\; c>0 \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x \in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y \in B$.

Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je $x \geq 0$ ili $x \in [0,+\infty\rangle$.

Skup zadajemo nabrajanjem njegovih elemenata ili opisom karakterističnih svojstava koja posjeduju njegovi elementi. Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga $A \cap B$.

Funkcija je rastuća ako većoj vrijednosti argumenta pridružuje vrijednost koja je veća od one koju pridružuje manjoj vrijednosti argumenta ili joj je jednaka.
Funkcija je strogo rastuća na intervalu D ako $\left(\forall x_1, x_2 \in D\right)\ ,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right).$

Za funkciju $f : D \to K$ kažemo da je injekcija (injektivna funkcija) ako različite elemente domene D preslikava u različite elemente kodomene K:

$$\forall\ x_1, x_2 \in D\ ,\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right).$$

Ili ovako:

$$\forall\ x_1, x_2 \in D\ ,\ f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2.$$

Promatrajmo funkciju

$$f(x) = \sqrt{5\cdot x - 1} + \sqrt{3\cdot x - 2} + \sqrt{x+2}$$

i odredimo njezinu domenu.

$$\left.\begin{matrix} 5\cdot x - 1 \geq 0 \\ 3\cdot x - 2 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot x \geq 1 \\ 3\cdot x \geq 2 \\ x \geq -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot x \geq 1 \ /:5 \\ 3\cdot x \geq 2 \ /:3 \\ x \geq -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \geq \frac{1}{5} \\ x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x \in \left[\frac{1}{5}, +\infty\right\rangle \\ x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right\rangle \\ x \in \left[-2, +\infty\right\rangle \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{matrix}\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right\rangle.$$

Funkcija f je strogo rastuća pa je zato injektivna. Može samo jednom na domeni $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right\rangle$ poprimiti vrijednost 7.
Direktno provjeravamo!

- $f(x) = \sqrt{5\cdot x - 1} + \sqrt{3\cdot x - 2} + \sqrt{x+2} \Rightarrow \left[x = 1\right] \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(1) = \sqrt{5\cdot 1 - 1} + \sqrt{3\cdot 1 - 2} + \sqrt{1+2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{4} + \sqrt{1} + \sqrt{3} \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(1) = 2 + 1 + \sqrt{3} \Rightarrow f(1) = 3 + \sqrt{3} \neq 7$
- $f(x) = \sqrt{5\cdot x - 1} + \sqrt{3\cdot x - 2} + \sqrt{x+2} \Rightarrow \left[x = 2\right] \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(2) = \sqrt{5\cdot 2 - 1} + \sqrt{3\cdot 2 - 2} + \sqrt{2+2} \Rightarrow f(2) = \sqrt{9} + \sqrt{4} + \sqrt{4} \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(2) = 3 + 2 + 2 \Rightarrow f(2) = 7.$

Rješenje je x = 2.

Vježba 065

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 066 (Vila, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4\ ,\ x \in R.$

Rješenje 066

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \sqrt{a^n}=a^{\frac{n}{2}} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Primijetimo da vrijedi:

- $$2-\sqrt{3}=\frac{2-\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=\frac{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2+\sqrt{3}}=\frac{4-3}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=$$
  $$=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}.$$
- $$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{4-3}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}=$$
  $$=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Sada je:

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right] \Rightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ t=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t}+t=4 \Rightarrow \frac{1}{t}+t=4 \,/\cdot t \Rightarrow 1+t^2=4\cdot t \Rightarrow t^2-4\cdot t+1=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} t^2-4\cdot t+1=0 \\ a=1 \;,\; b=-4 \;,\; c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} a=1 \;,\; b=-4 \;,\; c=1 \\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4\cdot 3}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm 2\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{2\cdot\left(2\pm\sqrt{3}\right)}{2}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{2\cdot\left(2\pm\sqrt{3}\right)}{2}\Rightarrow t_{1,2}=2\pm\sqrt{3}\Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=2+\sqrt{3} \\ t_2=2-\sqrt{3}\end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni:

- $$\left.\begin{matrix}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t \\ t=2+\sqrt{3}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}\Rightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^1\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2+\sqrt{3}\right)^1\Rightarrow \frac{x}{2}=1\Rightarrow \frac{x}{2}=1\,/\cdot 2\Rightarrow x_1=2.$$
- $$\left.\begin{matrix}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t \\ t=2-\sqrt{3}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left[2-\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\right]\Rightarrow \left.\begin{matrix}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t \\ t=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\Rightarrow \frac{x}{2}=-1\Rightarrow \frac{x}{2}=-1\,/\cdot 2\Rightarrow x_2=-2.$$

Vježba 066

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 067 (Barny, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$

Rješenje 067

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a\quad,\quad (a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\quad,\quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad \sqrt{a^3}=a\cdot\sqrt{a}.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}\quad,\quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajena metoda rješavanja:
Kvadriramo (kubiramo) jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1\Rightarrow \sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}\Rightarrow \sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}\,/^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3=\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3\Rightarrow 2-x=1-3\cdot\sqrt{x-1}+3\cdot\left(\sqrt{x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-x=1-3\cdot\sqrt{x-1}+3\cdot(x-1)-(x-1)\cdot\sqrt{x-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-x=1-3\cdot\sqrt{x-1}+3\cdot x-3-(x-1)\cdot\sqrt{x-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\sqrt{x-1}+(x-1)\cdot\sqrt{x-1}=1+3\cdot x-3-2+x \Rightarrow \sqrt{x-1}\cdot(3+x-1)=4\cdot x-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1}\cdot(x+2)=4\cdot(x-1) \Rightarrow \sqrt{x-1}\cdot(x+2)=4\cdot(x-1)\ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\cdot(x+2)\right)^2=\left(4\cdot(x-1)\right)^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2\cdot(x+2)^2=16\cdot(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot(x+2)^2=16\cdot(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+2)^2-16\cdot(x-1)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left((x+2)^2-16\cdot(x-1)\right)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2+4\cdot x+4-16\cdot x+16\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2-12\cdot x+20\right)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2-10\cdot x-2\cdot x+20\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left(\left(x^2-10\cdot x\right)+(-2\cdot x+20)\right)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x\cdot(x-10)-2\cdot(x-10)\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot(x-10)\cdot(x-2)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-10)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x-10=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=10 \end{array}\right\}.$$

Provjera!
Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$		
x = 1	x = 2	x = 10
$\sqrt[3]{2-1}+\sqrt{1-1}=1$ $\sqrt[3]{1}+\sqrt{0}=1$ $1+0=1$ $1=1$ x_1 je rješenje	$\sqrt[3]{2-2}+\sqrt{2-1}=1$ $\sqrt[3]{0}+\sqrt{1}=1$ $0+1=1$ $1=1$ x_2 je rješenje	$\sqrt[3]{2-10}+\sqrt{10-1}=1$ $\sqrt[3]{-8}+\sqrt{9}=1$ $-2+3=1$ $1=1$ x_3 je rješenje

Vježba 067

Odmor!

Rezultat: …