Zadatak 041 (Miroslav, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x^2-2+\sqrt{x+2}}=x.$

Rješenje 041

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{x^2-2+\sqrt{x+2}}=x \Rightarrow \sqrt{x^2-2+\sqrt{x+2}}=x \,/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-2+\sqrt{x+2}}\right)^2=x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2+\sqrt{x+2}=x^2 \Rightarrow x^2-2+\sqrt{x+2}=x^2 \Rightarrow -2+\sqrt{x+2}=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}=2 \,/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^2=2^2 \Rightarrow x+2=4 \Rightarrow x=4-2 \Rightarrow x=2.$$

Provjera!
Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$\sqrt{x^2-2+\sqrt{x+2}}=x$$

$$\sqrt{x^2-2+\sqrt{x+2}}=x$$

x = 2

$$\sqrt{2^2-2+\sqrt{2+2}}=2$$

$$\sqrt{4-2+\sqrt{4}}=2$$

$$\sqrt{4-2+2}=2$$

$$\sqrt{4-2+2}=2$$

$$\sqrt{4}=2$$

$$2=2$$

x jest rješenje

Vježba 041

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x^2+\sqrt{x+2}-2}-x=0.$

Rezultat: x = 2.

Zadatak 042 (Marija, srednja škola)

Zadana je funkcija $f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x+2}$. Riješite jednadžbu f(x) = 0.

Rješenje 042

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x+2} \\ f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{1-x}-\sqrt{x+2}=0 \Rightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{x+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{x+2} \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{1-x}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}\right)^2 \Rightarrow 1-x=x+2 \Rightarrow -x-x=2-1$$

$$\Rightarrow -2\cdot x=1 \Rightarrow -2\cdot x=1 \;/:(-2) \Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Provjera!

Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x+2}=0.$$

$\sqrt{1-x}-\sqrt{x+2}=0$ $x=-\frac{1}{2}$
$\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}-\sqrt{-\frac{1}{2}+2}=0$ $\sqrt{1+\frac{1}{2}}-\sqrt{-\frac{1}{2}+2}=0$ $\sqrt{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}}-\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{2}{1}}=0$ $\sqrt{\frac{2+1}{2}}-\sqrt{\frac{-1+4}{2}}=0$ $\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}=0$ $0=0$ x jest rješenje

Vježba 042

Zadana je funkcija $f(x)=-\sqrt{2+x}+\sqrt{1-x}$. Riješite jednadžbu f(x) = 0.

Rezultat: $x=-\frac{1}{2}.$

Zadatak 043 (Ivan, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x}=1.$

Rješenje 043

Ponovimo!

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^3=\sqrt{a^3}=a\cdot\sqrt{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x}=1 \Rightarrow \sqrt[3]{1-x}=1-\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt[3]{1-x}=1-\sqrt{x} \;/^3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3=\left(1-\sqrt{x}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x=1^3-3\cdot1^2\cdot\sqrt{x}+3\cdot1\cdot\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^3 \Rightarrow 1-x=1-3\cdot\sqrt{x}+3\cdot x-x\cdot\sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x=1-3\cdot\sqrt{x}+3\cdot x-x\cdot\sqrt{x} \Rightarrow -x=-3\cdot\sqrt{x}+3\cdot x-x\cdot\sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+3\cdot\sqrt{x}-3\cdot x+x\cdot\sqrt{x}=0 \Rightarrow x\cdot\sqrt{x}+3\cdot\sqrt{x}-4\cdot x=0 \Rightarrow x\cdot\sqrt{x}+3\cdot\sqrt{x}-4\cdot\left(\sqrt{x}\right)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\cdot\left(x+3-4\cdot\sqrt{x}\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\sqrt{x}=0\\ x+3-4\cdot\sqrt{x}=0\end{matrix}\right\}.$$

Rješavamo jednadžbe.

- $\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=0^2 \Rightarrow x_1=0.$
- $x-4\cdot\sqrt{x}+3=0.$

Uvodimo zamjenu (supstituciju)

$$\boxed{t=\sqrt{x}.}$$

$$x-4\cdot\sqrt{x}+3=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-4\cdot\sqrt{x}+3=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ t=\sqrt{x}\\ t^2=x\end{bmatrix} \Rightarrow t^2-4\cdot t+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}t^2-4\cdot t+3=0\\ a=1 \;,\; b=-4 \;,\; c=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a=1 \;,\; b=-4 \;,\; c=3\\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\frac{4+2}{2} \\ t_2=\frac{4-2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\frac{6}{2} \\ t_2=\frac{2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=3 \\ t_2=1\end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se na zamjenu (supstituciju).

- $\left.\begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ t=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=3^2 \Rightarrow x_2=9.$
- $\left.\begin{matrix} t=\sqrt{x} \\ t=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=1^2 \Rightarrow x_3=1.$

Provjera!
Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x}=1$		
x = 0	x = 9	x = 1
$\sqrt[3]{1-0}+\sqrt{0}=1$ $\sqrt[3]{1}+0=1$ $1+0=1$ $1=1$ x je rješenje	$\sqrt[3]{1-9}+\sqrt{9}=1$ $\sqrt[3]{-8}+3=1$ $-2+3=1$ $1=1$ x je rješenje	$\sqrt[3]{1-1}+\sqrt{1}=1$ $\sqrt[3]{0}+1=1$ $0+1=1$ $1=1$ x je rješenje

Vježba 043

Riješi jednadžbu $1+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt{x}.$

Rezultat: $x\in\{0, 1, 9\}.$

Zadatak 044 (Ana, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\sqrt{6+x}\cdot\sqrt{6-x}=x.$

Rješenje 044

Ponovimo!

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad (a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2 \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

$$a=b \Rightarrow b=a \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{6+x}\cdot\sqrt{6-x}=x \Rightarrow \sqrt{(6+x)\cdot(6-x)}=x \Rightarrow \sqrt{36-x^2}=x \Rightarrow \sqrt{36-x^2}=x \,/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{36-x^2}\right)^2=x^2 \Rightarrow 36-x^2=x^2 \Rightarrow 36=x^2+x^2 \Rightarrow 36=2\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2=36 \Rightarrow 2\cdot x^2=36 \ /:2 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow x^2=18 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{9\cdot 2} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow x_{1,2}=\pm 3\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=3\cdot\sqrt{2} \\ x_2=-3\cdot\sqrt{2}\end{matrix}\right\}.$$

Provjera!
Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt{6+x}\cdot\sqrt{6-x}=x$	
$x=3\cdot\sqrt{2}$	$x=-3\cdot\sqrt{2}$
$\sqrt{6+3\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-3\cdot\sqrt{2}}=3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(6-3\cdot\sqrt{2}\right)}=3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{36-\left(3\cdot\sqrt{2}\right)^2}=3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{36-3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}=3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{36-9\cdot 2}=3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{36-18}=3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{9\cdot 2}=3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}$ $3\cdot\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}$ x je rješenje	$\sqrt{6-3\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-(-3)\cdot\sqrt{2}}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{6-3\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6+3\cdot\sqrt{2}}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{\left(6-3\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(6+3\cdot\sqrt{2}\right)}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{36-\left(3\cdot\sqrt{2}\right)^2}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{36-3^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{36-9\cdot 2}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{36-18}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{18}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{9\cdot 2}=-3\cdot\sqrt{2}$ $\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=-3\cdot\sqrt{2}$ $3\cdot\sqrt{2}\neq-3\cdot\sqrt{2}$ x nije rješenje

Vježba 044

Riješi jednadžbu $\sqrt{6-x}=\dfrac{x}{\sqrt{6+x}}$.

Rezultat: $x=3\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 045 (Josip, gimnazija)

Koji je skup svih rješenja nejednadžbe $\sqrt{4-3\cdot x}-\sqrt{x+1}>2$?

Rješenje 045

Ponovimo!

$$a\ge b\ ,\ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}\le\frac{b}{c} \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(-a-b)^2=(a+b)^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga: $A\bigcap B$.

Unija skupova A i B je skup koji se sastoji od svih elemenata zadanih skupova. Označavamo ga: $A\bigcup B$.

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

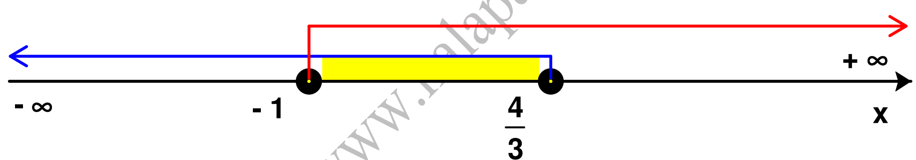
je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Ako je a > 0 parabola je okrenuta prema gore.

Budući da su u nejednadžbi dani drugi korijeni, izrazi pod njima (radikandi) nužno moraju biti veći od nule ili jednaki nuli (nenegativni realni brojevi). Eksplicitno napišemo uvjete. Dobije se sustav dviju linearnih nejednadžbi, a skup rješenja tog sustava je presjek skupova rješenja pojedinih nejednadžbi.

$$\left.\begin{matrix}4-3\cdot x\geq 0\\ x+1\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-3\cdot x\geq -4\\ x\geq -1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-3\cdot x\geq -4\ /:(-3)\\ x\geq -1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x\leq\frac{4}{3}\\ x\geq -1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\langle -\infty,\ \frac{4}{3}\right]\\ x\in\left[-1,\ +\infty\right\rangle\end{matrix}\right\}.$$



Rješenja zadane nejednadžbe moramo potražiti na segmentu $\left[-1,\ \frac{4}{3}\right]$ koji se dobije kao presjek polusegmenata $\left\langle -\infty,\ \frac{4}{3}\right]$ i $\left[-1,\ +\infty\right\rangle$.

$$\left\langle -\infty,\ \frac{4}{3}\right]\cap\left[-1,\ +\infty\right\rangle=\left[-1,\ \frac{4}{3}\right].$$

Sada rješavamo polaznu nejednadžbu.

$$\sqrt{4-3\cdot x}-\sqrt{x+1}>2\Rightarrow\sqrt{4-3\cdot x}>2+\sqrt{x+1}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{kvadriramo nejednadžbu jer su obje}\\ \text{njezine strane nenegativni brojevi}\\ \sqrt{4-3\cdot x}\geq 0\ ,\ \sqrt{x+1}\geq 0\end{matrix}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{4-3\cdot x}>2+\sqrt{x+1}\ /^2\Rightarrow\left(\sqrt{4-3\cdot x}\right)^2>\left(2+\sqrt{x+1}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-3\cdot x>2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x+1}\right)^2\Rightarrow 4-3\cdot x>4+4\cdot\sqrt{x+1}+x+1\Rightarrow$$

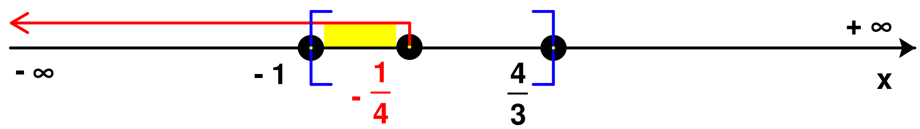
$$\Rightarrow 4-3\cdot x>4+4\cdot\sqrt{x+1}+x+1\Rightarrow -3\cdot x>4\cdot\sqrt{x+1}+x+1\Rightarrow -3\cdot x-x-1>4\cdot\sqrt{x+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot x-1>4\cdot\sqrt{x+1}.$$

Uočimo da je na desnoj strani nejednadžbe nenegativan broj jer je drugi korijen nenegativan broj. Zato i lijeva strana nejednadžbe mora biti nenegativan broj, tj. mora biti

$$-4\cdot x-1\geq 0\ \Rightarrow\ -4\cdot x\geq 1\ \Rightarrow\ -4\cdot x\geq 1\ /:(-4)\ \Rightarrow\ x\leq -\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ x\in\left\langle -\infty,\ -\frac{1}{4}\right].$$

Dakle, zadanu nejednadžbu moramo riješiti na segmentu $\left[-1,\ -\frac{1}{4}\right]$ koji se dobije kao presjek segmenta $\left[-1,\ \frac{4}{3}\right]$ i polusegmenta $\left\langle -\infty,\ -\frac{1}{4}\right]$.



$$\left[-1,\ \frac{4}{3}\right]\cap\left\langle -\infty,\ -\frac{1}{4}\right]=\left[-1,\ -\frac{1}{4}\right].$$

Nastavljamo rješavati nejednadžbu.

$$-4\cdot x-1>4\cdot\sqrt{x+1}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{kvadriramo nejednadžbu jer su obje}\\ \text{njezine strane nenegativni brojevi}\end{array}\right]\Rightarrow\ -4\cdot x-1>4\cdot\sqrt{x+1}\ /^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (-4\cdot x-1)^2>\left(4\cdot\sqrt{x+1}\right)^2\ \Rightarrow\ (4\cdot x+1)^2>4^2\cdot\left(\sqrt{x+1}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (4\cdot x)^2+2\cdot 4\cdot x\cdot 1+1^2>16\cdot(x+1)\ \Rightarrow\ 16\cdot x^2+8\cdot x+1>16\cdot x+16\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 16\cdot x^2+8\cdot x+1-16\cdot x-16>0\ \Rightarrow\ 16\cdot x^2-8\cdot x-15>0.$$

Dobili smo kvadratnu nejednadžbu koju možemo riješiti na dva načina.

1.inačica

Trebamo riješiti nejednadžbu $16\cdot x^2-8\cdot x-15>0.$

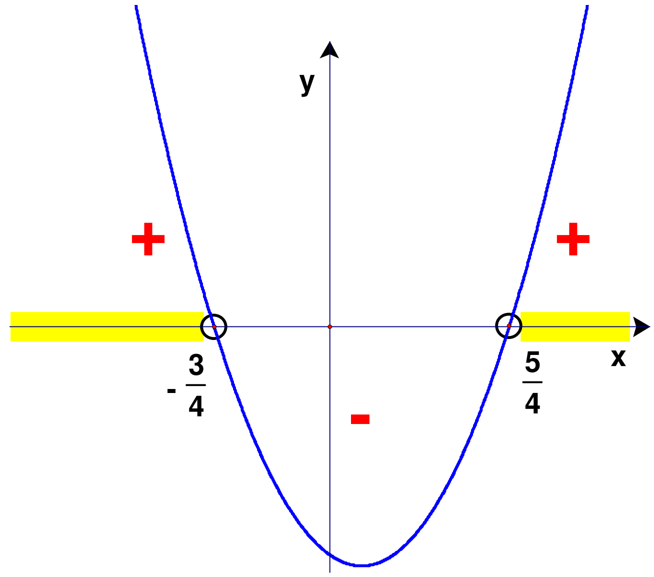
Odredimo najprije nultočke kvadratne jednadžbe $16\cdot x^2-8\cdot x-15=0.$

$$\left.\begin{array}{l}16\cdot x^2-8\cdot x-15=0\\ a=16\ ,\ b=-8\ ,\ c=-15\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}a=16\ ,\ b=-8\ ,\ c=-15\\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 16\cdot(-15)}}{2\cdot 16}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+960}}{32}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{1024}}{32}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{8\pm 32}{32}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{8-32}{32}\\ x_2=\dfrac{8+32}{32}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1=-\dfrac{24}{32}\\ x_2=\dfrac{40}{32}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1=-\dfrac{24}{32}\\ x_2=\dfrac{40}{32}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1=-\dfrac{3}{4}\\ x_2=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}.$$

Nakon toga skiciramo graf kvadratne funkcije $f(x)=16\cdot x^2-8\cdot x-15.$ To je parabola okrenuta otvorom prema gore jer je vodeći koeficijent pozitivan, $a=16>0$. Graf kvadratne funkcije siječe os x u dvije točke $x_1=-\frac{3}{4}$ i $x_2=\frac{5}{4}$. Funkcija je pozitivna na onim intervalima gdje se njezin graf nalazi iznad osi x. Ti su intervali (istaknuti žutom bojom na slici) skup rješenja kvadratne nejednadžbe $16\cdot x^2-8\cdot x-15>0.$



Vidimo da graf leži iznad osi x na dijelu do prve nultočke $x_1=-\frac{3}{4}$ i poslije druge nultočke $x_2=\frac{5}{4}$, pri čemu je $x_1 < x_2$. Taj skup zapisujemo ovako:

$$x\in\left\langle -\infty, -\frac{3}{4}\right]\cup\left\langle \frac{5}{4}, +\infty\right\rangle.$$

Taj isti skup predstavlja skup svih rješenja kvadratne nejednadžbe $16\cdot x^2-8\cdot x-15>0$.

2.inačica

Trebamo riješiti nejednadžbu $16\cdot x^2-8\cdot x-15>0$.
Odredimo najprije njezine realne nultočke tako da riješimo pripadnu kvadratnu jednadžbu $16\cdot x^2-8\cdot x-15=0$. Te nultočke dijele R (brojevni pravac) na intervale.

$$\left.\begin{matrix}16\cdot x^2-8\cdot x-15=0\\ a=16\ ,\ b=-8\ ,\ c=-15\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}a=16\ ,\ b=-8\ ,\ c=-15\\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 16\cdot(-15)}}{2\cdot 16}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64+960}}{32}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{1024}}{32}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm 32}{32}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=\frac{8-32}{32}\\ x_2=\frac{8+32}{32}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=-\frac{24}{32}\\ x_2=\frac{40}{32}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=-\frac{24}{32}\\ x_2=\frac{40}{32}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=-\frac{3}{4}\\ x_2=\frac{5}{4}\end{matrix}\right\}.$$

Dobivene nultočke ucrtamo na os x.

U točkama $-\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{4}$ vrijedi jednakost = pa one nisu rješenje naše stroge nejednakosti >. Zato ih nismo popunili, ostavili smo prazne kružiće. Dobili smo intervale:

$$\left\langle -\infty, -\frac{3}{4} \right\rangle, \left\langle -\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle.$$

Iz svakog intervala odaberemo po jedan x i uvrstimo ga u $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 15$. Predznak dobivene vrijednosti određuje predznak za cijeli interval.

- $\left\langle -\infty, -\frac{3}{4} \right\rangle$

Odaberemo, na primjer, x = – 1 i uvrstimo ga u $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 15$:

$$16 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 15 = 16 \cdot 1 + 8 - 15 = 16 + 8 - 15 = 9 > 0.$$

Rezultat je pozitivan, što znači da je $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 15$ pozitivno na cijelom intervalu $\left\langle -\infty, -\frac{3}{4} \right\rangle$.

Upišemo + iznad tog intervala.

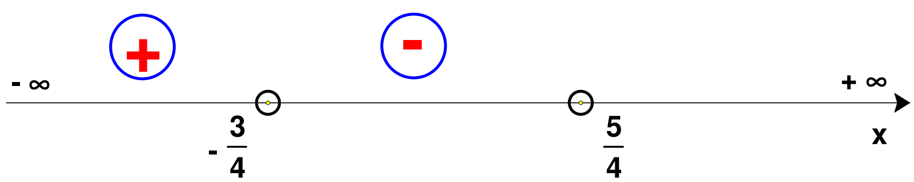
- $\left\langle -\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\rangle$

Odaberemo, na primjer, x = 0 i uvrstimo ga u $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 15$:

$$16 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 15 = 0 - 0 - 15 = -15 < 0.$$

Rezultat je negativan, što znači da je $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 15$ negativno na cijelom intervalu $\left\langle -\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\rangle$.

Upišemo – iznad tog intervala.



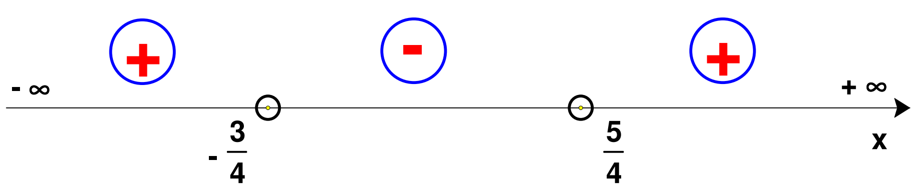
- $\left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle$

Odaberemo, na primjer, x = 2 i uvrstimo ga u $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 15$:

$$16 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 15 = 16 \cdot 4 - 16 - 15 = 64 - 16 - 15 = 33 > 0.$$

Rezultat je pozitivan, što znači da je $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 15$ pozitivno na cijelom intervalu $\left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle$.

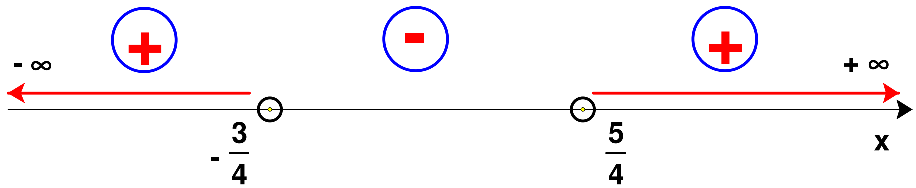
Upišemo + iznad tog intervala.



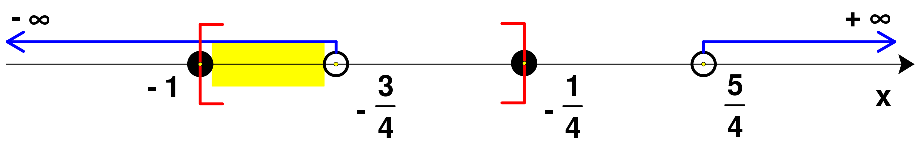
Nejednadžba $16 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 15 > 0$ vrijedi za $x < -\frac{3}{4}$ i $x > \frac{5}{4}$. Drugi način zapisivanja tog rezultata ima oblik:

$$x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle.$$

Na slici to možemo označiti strelicama.



Konačno rješenje polazne nejednadžbe $\sqrt{4 - 3 \cdot x} - \sqrt{x + 1} > 2$ dobije se kao presjek rješenja od uvjeta i rješenja kvadratne nejednadžbe.



$$\left. \begin{array}{l} x \in \left[-1, -\frac{1}{4} \right] \\ x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tražimo presjek,} \\ \text{zajednički dio} \end{array} \right] \Rightarrow x \in \left[-1, -\frac{3}{4} \right\rangle.$$

Vježba 045

Koji je skup svih rješenja nejednadžbe $\sqrt{4 - 3 \cdot x} - 2 > \sqrt{x + 1}$?

Rezultat: $x \in \left[-1, -\frac{3}{4} \right\rangle$.

Zadatak 046 (Leptirica, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

Rješenje 046

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a} \right)^2 = a \quad , \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a + b}{n}.$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2 \quad , \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

Najprije provedemo raspravu!

Moramo naći vrijednosti od x za koje je nazivnik

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

i to izbaciti iz skupa rješenja.

Uočimo da ne postoji realan broj x za koji je nazivnik

$$\sqrt{x}+1=0.$$

Sada računamo:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1}=1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+1}=1 \,/\cdot\left(\sqrt{x}+1\right) \Rightarrow 2=\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x}+1=2 \Rightarrow \sqrt{x}=2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=1^2 \Rightarrow x=1.$$

Budući da je u raspravi utvrđeno da ne smije biti x = 1, jednadžba nema rješenja.

2.inačica

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

Najprije provedemo raspravu!

Moramo naći vrijednosti od x za koje je nazivnik

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

i to izbaciti iz skupa rješenja.

Uočimo da ne postoji realan broj x za koji je nazivnik

$$\sqrt{x}+1=0.$$

Sada računamo:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1 \Rightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1 \,/\cdot(x-1) \Rightarrow 2\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{x}-2=x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1=2\cdot\sqrt{x}-2 \Rightarrow x-1-2\cdot\sqrt{x}+2=0 \Rightarrow x-2\cdot\sqrt{x}+1=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2-2\cdot\sqrt{x}+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2=0 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=1 \,/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=1^2 \Rightarrow x=1.$$

Budući da je u raspravi utvrđeno da ne smije biti x = 1, jednadžba nema rješenja.

3.inačica

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

Najprije provedemo raspravu!

Moramo naći vrijednosti od x za koje je nazivnik

$$x-1=0\ \Rightarrow\ x=1$$

i to izbaciti iz skupa rješenja.

Uočimo da ne postoji realan broj x za koji je nazivnik

$$\sqrt{x}+1=0.$$

Sada računamo:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1-\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1\ \Rightarrow\ 2\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=1\ /\cdot\left(x-1\right)\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1\ \Rightarrow\ 2\cdot\sqrt{x}-2=x-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\sqrt{x}=x-1+2\ \Rightarrow\ 2\cdot\sqrt{x}=x+1\ \Rightarrow\ 2\cdot\sqrt{x}=x+1\ /^2\ \Rightarrow\ \left(2\cdot\sqrt{x}\right)^2=\left(x+1\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^2\cdot\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(x+1\right)^2\ \Rightarrow\ 4\cdot x=x^2+2\cdot x+1\ \Rightarrow\ x^2+2\cdot x+1=4\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+2\cdot x+1-4\cdot x=0\ \Rightarrow\ x^2-2\cdot x+1=0\ \Rightarrow\ \left(x-1\right)^2=0\ \Rightarrow\ \left(x-1\right)^2=0\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ x-1=0\ \Rightarrow\ x=1.$$

Budući da je u raspravi utvrđeno da ne smije biti x = 1, jednadžba nema rješenja.

Vježba 046

Riješi jednadžbu: $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=1-\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$

Rezultat: Nema rješenja.

Zadatak 047 (Zvone, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4.$

Rješenje 047

Ponovimo!

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

$$\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)=a^2-b^2.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ ili }\ b=0\ \text{ ili }\ a=b=0.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4 \Rightarrow \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}\right)^2=4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2+2\cdot\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{5-x}+\left(\sqrt{5-x}\right)^2=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+5+2\cdot\sqrt{(x+5)\cdot(5-x)}+5-x=16 \Rightarrow x+5+2\cdot\sqrt{(x+5)\cdot(5-x)}+5-x=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10+2\cdot\sqrt{(5+x)\cdot(5-x)}=16 \Rightarrow 10+2\cdot\sqrt{25-x^2}=16 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{25-x^2}=16-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sqrt{25-x^2}=6 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{25-x^2}=6\ /:2 \Rightarrow \sqrt{25-x^2}=3 \Rightarrow \sqrt{25-x^2}=3\ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{25-x^2}\right)^2=3^2 \Rightarrow 25-x^2=9 \Rightarrow -x^2=9-25 \Rightarrow -x^2=-16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2=-16\ /\cdot(-1) \Rightarrow x^2=16.$$

Jednadžbu

$$x^2=16$$

možemo riješiti na dva načina.

1.inačica

$$x^2=16 \Rightarrow x^2=16\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{16} \Rightarrow x_{1,2}=\pm 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{matrix}\right\}.$$

2.inačica

$$x^2=16 \Rightarrow x^2-16=0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x+4)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-4=0 \\ x+4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{matrix}\right\}.$$

Provjera!

Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4.$	
x = 4	x = – 4
$\sqrt{4+5}+\sqrt{5-4}=4$ $\sqrt{9}+\sqrt{1}=4$ $3+1=4$ $4=4$ x je rješenje	$\sqrt{-4+5}+\sqrt{5-(-4)}=4$ $\sqrt{1}+\sqrt{5+4}=4$ $\sqrt{1}+\sqrt{9}=4$ $1+3=4$ $4=4$ x je rješenje

Vježba 047

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x+5}=4-\sqrt{5-x}.$

Rezultat: 4, – 4.

Zadatak 048 (Zvone, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{2\cdot x^2-3\cdot x+1}=x+1.$

Rješenje 048

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1} = x + 1 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1} = x + 1 \, / ^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}\right)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 = x^2 + 2 \cdot x + 1 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 = x^2 + 2 \cdot x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x = x^2 + 2 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x - x^2 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow x^2 - 5 \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (x - 5) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{matrix}\right\}.$$

Provjera!
Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1} = x + 1.$	
x = 0	x = 5
$\sqrt{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1} = 0 + 1$	$\sqrt{2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 1} = 5 + 1$
$\sqrt{2 \cdot 0 - 0 + 1} = 1$	$\sqrt{2 \cdot 25 - 15 + 1} = 6$
$\sqrt{0 + 1} = 1$	$\sqrt{50 - 15 + 1} = 6$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{36} = 6$
$1 = 1$	$6 = 6$
x je rješenje	x je rješenje

Vježba 048

Riješi jednadžbu: $\sqrt{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1} - x = 1.$

Rezultat: 0, 5.

Zadatak 049 (Zvone, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{2 \cdot x + 5} = x + 1.$

Rješenje 049

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{2\cdot x+5}=x+1 \Rightarrow \sqrt{2\cdot x+5}=x+1\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2\cdot x+5}\right)^2=(x+1)^2 \Rightarrow 2\cdot x+5=x^2+2\cdot x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+5=x^2+2\cdot x+1 \Rightarrow 5=x^2+1 \Rightarrow x^2+1=5 \Rightarrow x^2=5-1 \Rightarrow x^2=4.$$

Jednadžbu

$$x^2=16$$

možemo riješiti na dva načina.

1.inačica

$$x^2=4 \Rightarrow x^2=4\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4} \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\}.$$

2.inačica

$$x^2=4 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x+2)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2=0 \\ x+2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\}.$$

Provjera!
Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt{2\cdot x+5}=x+1$	
x = 2	x = – 2
$\sqrt{2\cdot 2+5}=2+1$ $\sqrt{4+5}=3$ $\sqrt{9}=3$ $3=3$ x je rješenje	$\sqrt{2\cdot(-2)+5}=-2+1$ $\sqrt{-4+5}=-1$ $\sqrt{1}=-1$ $1\neq-1$ x nije rješenje

Vježba 049

Riješi jednadžbu: $\sqrt{2\cdot x+5}-x=1.$

Rezultat: 2.

Zadatak 050 (Zvone, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2-x}=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{1-x}.$

Rješenje 050

Ponovimo!

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{(x+1) \cdot (2-x)} = \sqrt{(x+2) \cdot (1-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1) \cdot (2-x)} = \sqrt{(x+2) \cdot (1-x)} \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(x+1) \cdot (2-x)}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+2) \cdot (1-x)}\right)^2 =$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot (2-x) = (x+2) \cdot (1-x) \Rightarrow 2 \cdot x - x^2 + 2 - x = x - x^2 + 2 - 2 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x - x^2 + 2 - x = x - x^2 + 2 - 2 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot x - x = x - 2 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot x - x - x + 2 \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Provjera!
Ovaj rezultat moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{1-x}$
x = 0
$\sqrt{0+1} \cdot \sqrt{2-0} = \sqrt{0+2} \cdot \sqrt{1-0}$ $\sqrt{1} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1}$ $1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot 1$ $\sqrt{2} = \sqrt{2}$ x je rješenje

Vježba 050

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x} - \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{1-x} = 0.$

Rezultat: 0.

Zadatak 051 (Zvone, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{7 \cdot x + 1} = 2 \cdot \sqrt{x+4}.$

Rješenje 051

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj**

veći ili jednak nuli).
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{7\cdot x+1}=2\cdot\sqrt{x+4} \Rightarrow \sqrt{7\cdot x+1}=2\cdot\sqrt{x+4} \;/^{\,2} \Rightarrow \left(\sqrt{7\cdot x+1}\right)^2=\left(2\cdot\sqrt{x+4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7\cdot x+1=2^2\cdot\left(\sqrt{x+4}\right)^2 \Rightarrow 7\cdot x+1=4\cdot(x+4) \Rightarrow 7\cdot x+1=4\cdot x+16 \Rightarrow 7\cdot x-4\cdot x=16-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x=15 \Rightarrow 3\cdot x=15 \;/:3 \Rightarrow x=5.$$

Provjera!
Ovaj rezultat moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$\sqrt{7\cdot x+1}=2\cdot\sqrt{x+4}$
x = 5
$\sqrt{7\cdot 5+1}=2\cdot\sqrt{5+4}$ $\sqrt{35+1}=2\cdot\sqrt{9}$ $\sqrt{36}=2\cdot 3$ $6=6$ x je rješenje

Vježba 051

Riješi jednadžbu: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7\cdot x+1}=\sqrt{x+4}.$

Rezultat: 5.

Zadatak 052 (Cedric, Sean, Zeljko, Medox, Höhere Technische Lehranstalt)

Zeige das die Wurzelgleichung keine Reele Lösung haben kann, ohne diese Gleichung zu lösen. Ne rješavajući jednadžbu pokaži da ona nema rješenja: $\sqrt{5-3\cdot x}-\sqrt{3\cdot x-5}=4.$

Rješenje 052

Ponovimo!

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Neka je f realna funkcija realne varijable. Prema definiciji funkcije drugi korijen mora biti

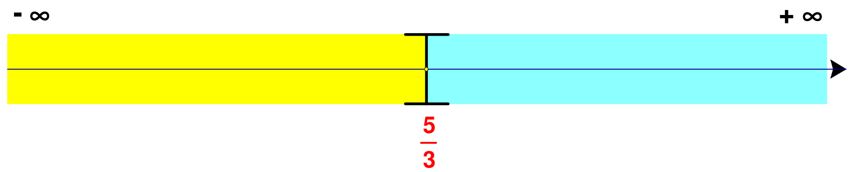
$$\sqrt{f(x)}\;,\;\; x\in R \Rightarrow f(x)\geq 0.$$

Budući da izrazi pod drugim korijenom moraju biti nenegativni (pozitivni ili jednaki nuli) napisat ćemo sustav nejednadžbi. Riješimo obje nejednadžbe kako bismo našli skupove njihovih rješenja.

$$\sqrt{5-3\cdot x}-\sqrt{3\cdot x-5}=4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5-3\cdot x\geq 0 \\ 3\cdot x-5\geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -3\cdot x\geq -5 \\ 3\cdot x\geq 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -3\cdot x\geq -5 \;/:(-3) \\ 3\cdot x\geq 5 \;/:3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x\leq \frac{5}{3} \\ x\geq \frac{5}{3} \end{matrix}\right\}.$$

Rješenje sustava nejednadžbi su brojevi koji istodobno zadovoljavaju obje nejednadžbe sustava, tj. brojeve koji se nalaze i u prvom i u drugom skupu rješenja. Drugim riječima, rješenje sustava je presjek skupova rješenja pojedinih nejednadžbi i u ovom slučaju to je



$$\left\langle -\infty, \frac{5}{3} \right] \cap \left[\frac{5}{3}, +\infty \right\rangle = \left\{ \frac{5}{3} \right\}.$$

Ako zadana iracionalna jednadžba ima rješenje, ono je $x = \frac{5}{3}$. Provjerimo!

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{5-3\cdot x} - \sqrt{3\cdot x-5} = 4 \\ x = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{5-3\cdot\frac{5}{3}} - \sqrt{3\cdot\frac{5}{3}-5} = 4 \Rightarrow \sqrt{5-3\cdot\frac{5}{3}} - \sqrt{3\cdot\frac{5}{3}-5} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{5-5} - \sqrt{5-5} = 4 \Rightarrow \sqrt{0} - \sqrt{0} = 4 \Rightarrow 0-0=4 \Rightarrow 0=4.$$

Budući da je posljednji izraz neistinit, slijedi da $\frac{5}{3}$ nije rješenje zadane iracionalne jednadžbe pa ta jednadžba nema rješenja.

Vježba 052

Ne rješavajući jednadžbu pokaži da ona nema rješenja: $\sqrt{5-3\cdot x} - \sqrt{3\cdot x-5} = 3.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 053 (Sonja, strojarska škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{5\cdot x+4} - \sqrt{3\cdot x+1} = 5.$

Rješenje 053

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{5\cdot x+4} - \sqrt{3\cdot x+1} = 5 \Rightarrow \sqrt{5\cdot x+4} = 5 + \sqrt{3\cdot x+1} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{5\cdot x+4}=5+\sqrt{3\cdot x+1} \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{5\cdot x+4}\right)^2=\left(5+\sqrt{3\cdot x+1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x+4=5^2+2\cdot 5\cdot\sqrt{3\cdot x+1}+\left(\sqrt{3\cdot x+1}\right)^2 \Rightarrow 5\cdot x+4=25+10\cdot\sqrt{3\cdot x+1}+3\cdot x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x+4-25-3\cdot x-1=10\cdot\sqrt{3\cdot x+1} \Rightarrow 2\cdot x-22=10\cdot\sqrt{3\cdot x+1} \Rightarrow 2\cdot x-22=10\cdot\sqrt{3\cdot x+1} \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-11=5\cdot\sqrt{3\cdot x+1} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{kvadriramo}\\ \text{jednadžbu}\end{matrix}\right] \Rightarrow x-11=5\cdot\sqrt{3\cdot x+1} \;/^2 \Rightarrow (x-11)^2=\left(5\cdot\sqrt{3\cdot x+1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-22\cdot x+121=5^2\cdot\left(\sqrt{3\cdot x+1}\right)^2 \Rightarrow x^2-22\cdot x+121=25\cdot(3\cdot x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-22\cdot x+121=75\cdot x+25 \Rightarrow x^2-22\cdot x+121-75\cdot x-25=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-97\cdot x+96=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix}x^2-97\cdot x+96=0\\ a=1\;,\;b=-97\;,\;c=96\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a=1\;,\;b=-97\;,\;c=96\\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-97)\pm\sqrt{(-97)^2-4\cdot 1\cdot 96}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{97\pm\sqrt{9409-384}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{97\pm\sqrt{9025}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{97\pm 95}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{97+95}{2}\\ x_2=\dfrac{97-95}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{192}{2}\\ x_2=\dfrac{2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{192}{2}\\ x_2=\dfrac{2}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_1=96\\ x_2=1\end{matrix}\right\}.$$

Provjera!
Ove rezultate moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$\sqrt{5\cdot x+4}-\sqrt{3\cdot x+1}=5$	
$x=96$	$x=1$
$\sqrt{5\cdot 96+4}-\sqrt{3\cdot 96+1}=5$	$\sqrt{5\cdot 1+4}-\sqrt{3\cdot 1+1}=5$
$\sqrt{480+4}-\sqrt{288+1}=5$	$\sqrt{5+4}-\sqrt{3+1}=5$
$\sqrt{484}-\sqrt{289}=5$	$\sqrt{9}-\sqrt{4}=5$
$22-17=5$	$3-2=5$
$5=5$	$1\neq 5$
x je rješenje	x nije rješenje

Vježba 053

Riješi jednadžbu: $\sqrt{5\cdot x+4}-5=\sqrt{3\cdot x+1}.$

Rezultat: x = 96.

Zadatak 054 (4A, 4B, TUPŠ)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x^2+1}=4-x.$

Rješenje 054

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{x^2+1}=4-x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}=4-x\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=(4-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+1=16-8\cdot x+x^2 \Rightarrow x^2+1=16-8\cdot x+x^2 \Rightarrow 1=16-8\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot x=16-1 \Rightarrow 8\cdot x=15 \Rightarrow 8\cdot x=15\ /:8 \Rightarrow x=\frac{15}{8}.$$

Provjera!
Ovaj rezultat moramo uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$\sqrt{x^2+1}=4-x$
$x=\frac{15}{8}$
$\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2+1}=4-\frac{15}{8}$ $\sqrt{\frac{225}{64}+\frac{1}{1}}=\frac{4}{1}-\frac{15}{8}$ $\sqrt{\frac{225+64}{64}}=\frac{32-15}{8}$ $\sqrt{\frac{289}{64}}=\frac{17}{8}$ $\frac{17}{8}=\frac{17}{8}$ x je rješenje

Vježba 054

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x^2+1}+x=4.$

Rezultat: $x=\frac{15}{8}.$

Zadatak 055 (Sandra, maturantica)

Nađi x iz jednadžbe: $\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\ldots}}}}=10.$

Rješenje 055

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \sqrt[n]{a\cdot\sqrt[n]{a}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Geometrijski red

$$a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+a_1\cdot q^3+\ ...\ +a_1\cdot q^n+\ ...$$

konvergentan je onda i samo onda ako vrijedi

$$|q|<1.$$

Njegova je suma jednaka

$$s=\frac{a_1}{1-q}.$$

1.inačica

$$\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot ...}}}}=10 \Rightarrow \sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot ...}}}}=10 \ /^3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot ...}}}}\right)^3=10^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot ...}}}}=1000 \Rightarrow x\cdot\underbrace{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot ...}}}}}_{=10}=1000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot 10=1000 \Rightarrow 10\cdot x=1000 \ /:10 \Rightarrow x=100.$$

2.inačica

$$\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot ...}}}}=10 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{9}}\cdot x^{\frac{1}{27}}\cdot x^{\frac{1}{81}}\cdot \ ....=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...}=10.$$

Odredimo zbroj geometrijskog reda:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ ... \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{3} \\ q=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{3} \\ q=\frac{3}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{3} \\ q=\frac{3}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=\frac{1}{3} \\ q=\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[s=\frac{a_1}{1-q} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow s=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}} \Rightarrow s=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3-1}{3}} \Rightarrow s=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow s=\frac{3}{3\cdot 2} \Rightarrow s=\frac{3}{3\cdot 2} \Rightarrow s=\frac{1}{2}.$$

Prema tome, vrijedi:

$$x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...}=10 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}=10 \Rightarrow \sqrt{x}=10 \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=10 \Rightarrow x=100.$$

Vježba 055

Nađi x iz jednadžbe: $\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot ...}}}}=2.$

Rezultat: $x=4.$

Zadatak 056 (2A, TUPŠ)

Nađi x iz jednadžbe: $\sqrt{x}-4=\sqrt{9\cdot x}.$

Rješenje 056

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

$$i^2=-1.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Pozor! Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).

Neka je f realna funkcija realne varijable. Prema definiciji funkcije drugi korijen mora biti

$$\sqrt{f(x)} \;,\; x\in R \;\Rightarrow\; f(x)\ge 0.$$

Jednadžba $\sqrt{f(x)}=g(x)$ ekvivalentna je sustavu $\begin{cases} f(x)=\left[g(x)\right]^2 \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$

1.inačica (Lovro, 2A, TUPŠ, Bjelovar)

$$\sqrt{x}-4=\sqrt{9\cdot x} \Rightarrow \sqrt{x}-4=3\cdot\sqrt{x} \Rightarrow 1\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt{x}=4 \Rightarrow -2\cdot\sqrt{x}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot\sqrt{x}=4 \;/:(-2) \Rightarrow \sqrt{x}=-2 \Rightarrow \sqrt{x}=2\cdot(-1) \Rightarrow \left[i^2=-1\right] \Rightarrow \sqrt{x}=2\cdot i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=2\cdot i^2 \;/^2 \Rightarrow x=4\cdot i^4.$$

Nema rješenja za $x\in R.$

2.inačica

$$\sqrt{x}-4=\sqrt{9\cdot x} \Rightarrow \sqrt{x}-4=\sqrt{9}\cdot\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}-4=3\cdot\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}-3\cdot\sqrt{x}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot\sqrt{x}=4 \Rightarrow -2\cdot\sqrt{x}=4 \;/:(-2) \Rightarrow \sqrt{x}=-2.$$

Jednadžba $\sqrt{x}=-2$ nema rješenja u skupu realnih brojeva, ali nakon kvadriranja dobije se x = 4. Uvjerimo se da to nije rezultat!

Provjera!

Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$\sqrt{x}-4=\sqrt{9\cdot x}.$$

$$\sqrt{4}-4=\sqrt{9\cdot 4}$$
$$2-4=\sqrt{36}$$
$$-2=6$$

x = 4 nije rješenje

Vježba 056

Nađi x iz jednadžbe: $\sqrt{x}-2=\sqrt{9\cdot x}.$

Rezultat: Nema rješenja za $x\in R.$