Zadatak 021 (Anamarija, hotelijerska škola)

Riješi jednadžbu $\sqrt{x^2} = -x.$

Rješenje 021

Ponovimo!

Jednadžba $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ekvivalentna je sustavu $\begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Zadana je jednadžba ekvivalentna sustavu:

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{x^2} = -x \\ -x \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{x^2} = -x \;/^2 \\ -x \ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 = (-x)^2 \\ -x \ge 0 \;/\cdot(-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 = x^2 \;\; (\text{identitet}) \\ x \le 0 \end{matrix}\right\}.$$

Budući sa smo dobili identitet rješenje jednadžbe je skup realnih brojeva, a nejednadžba je ekvivalentna sa $x \le 0$ pa je rješenje početne jednadžbe $\langle -\infty,\ 0\,]$.

Vježba 021

Riješi jednadžbu $\sqrt{x^2} + x = 0.$

Rezultat: $\langle -\infty,\ 0\,].$

Zadatak 022 (Anamarija, hotelijerska škola)

Riješi jednadžbu $\sqrt{\sqrt[3]{x} + 1} = 3.$

Rješenje 022

Budući da je na lijevoj strani član s drugim korijenom, kvadrirat ćemo lijevu i desnu stranu zadane jednadžbe:

$$\sqrt{\sqrt[3]{x}+1} = 3 \Rightarrow \sqrt{\sqrt[3]{x}+1} = 3 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow \sqrt[3]{x} + 1 = 9 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 8.$$

Još jedno kubiranje i sređivanje dovodi nas konačno do rješenja:

$$\sqrt[3]{x} = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 8 \;/^3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 8^3 \Rightarrow x = 512.$$

Da je to i rješenje zadane iracionalne jednadžbe uvjeravamo se uvrštavanjem:

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{\sqrt[3]{x}+1} \\ x = 512 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{\sqrt[3]{512}+1} = 3 \Rightarrow \sqrt{8+1} = 3 \Rightarrow \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 3 = 3,$$

a to je istinita jednakost.

Vježba 022

Riješi jednadžbu $\sqrt{\sqrt[3]{x} + 2} = 2.$

Rezultat: 8.

Zadatak 023 (Vedrana, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\dfrac{3 + 2 \cdot \sqrt[n]{x-1}}{4 + 5 \cdot \sqrt[n]{x-1}} = 6.$

Rješenje 023

$$\frac{3 + 2 \cdot \sqrt[n]{x-1}}{4 + 5 \cdot \sqrt[n]{x-1}} = 6 \Rightarrow \frac{3 + 2 \cdot \sqrt[n]{x-1}}{4 + 5 \cdot \sqrt[n]{x-1}} = 6 \;/\cdot\left(4 + 5 \cdot \sqrt[n]{x-1}\right) \Rightarrow 3 + 2 \cdot \sqrt[n]{x-1} = 6 \cdot \left(4 + 5 \cdot \sqrt[n]{x-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 2 \cdot \sqrt[n]{x-1} = 24 + 30 \cdot \sqrt[n]{x-1} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt[n]{x-1} - 30 \cdot \sqrt[n]{x-1} = 24 - 3 \Rightarrow -28 \cdot \sqrt[n]{x-1} = 21 \;/\cdot\left(-\frac{1}{28}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{x-1}=-\frac{21}{28} \Rightarrow \sqrt[n]{x-1}=-\frac{3}{4} \Rightarrow \sqrt[n]{x-1}=-\frac{3}{4} \,/^{\,n} \Rightarrow \left(\sqrt[n]{x-1}\right)^n=\left(-\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow x-1=\left(-\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n.$$

Vježba 023

Riješi jednadžbu $\frac{1+2\cdot\sqrt[n]{x-1}}{4+5\cdot\sqrt[n]{x-1}}=1.$

Rezultat: $1+(-1)^n.$

Zadatak 024 (Ivan, gimnazija)

Riješite iracionalnu jednadžbu $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}}.$

Rješenje 024

Ponovimo!

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}} \Rightarrow \sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}} \,/\cdot\sqrt{a-x} \Rightarrow \left(\sqrt{a-x}\right)^2+\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{b-x}=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-x+\sqrt{(a-x)\cdot(b-x)}=a \Rightarrow \sqrt{(a-x)\cdot(b-x)}=x \Rightarrow \sqrt{(a-x)\cdot(b-x)}=x \,/^{\,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(a-x)\cdot(b-x)}\right)^2=x^2 \Rightarrow (a-x)\cdot(b-x)=x^2 \Rightarrow a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x+x^2=x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x=0 \Rightarrow -a\cdot x-b\cdot x=-a\cdot b \,/\cdot(-1) \Rightarrow a\cdot x+b\cdot x=a\cdot b \Rightarrow x\cdot(a+b)=a\cdot b \Rightarrow x=\frac{a\cdot b}{a+b}.$$

Vježba 024

Riješite iracionalnu jednadžbu $\sqrt{a-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}}.$

Rezultat: x = 0.

Zadatak 025 (Cure iz hotelijerske škole, TUPŠ)

Za koju je vrijednost parametra m zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $m\cdot x^2-2\cdot(m-1)\cdot x+5=0$ jednak 1?

Rješenje 025

Ponovimo!

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}} \Rightarrow \sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}} \,/\cdot\sqrt{a-x} \Rightarrow \left(\sqrt{a-x}\right)^2+\sqrt{a-x}\cdot\sqrt{b-x}=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-x+\sqrt{(a-x)\cdot(b-x)}=a \Rightarrow \sqrt{(a-x)\cdot(b-x)}=x \Rightarrow \sqrt{(a-x)\cdot(b-x)}=x \,/^{\,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(a-x)\cdot(b-x)}\right)^2=x^2 \Rightarrow (a-x)\cdot(b-x)=x^2 \Rightarrow a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x+x^2=x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x=0 \Rightarrow -a\cdot x-b\cdot x=-a\cdot b \,/\cdot(-1) \Rightarrow a\cdot x+b\cdot x=a\cdot b \Rightarrow x\cdot(a+b)=a\cdot b \Rightarrow x=\frac{a\cdot b}{a+b}.$$

Vježba 025

Za koju je vrijednost parametra m zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $m\cdot x^2-2\cdot(m-1)\cdot x+5=0$ jednak 0?

Rezultat: x = 0.

Zadatak 026 (Emy, gimnazija)

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{x+3-4\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\cdot\sqrt{x-1}}=1.$

Rješenje 026

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\sqrt{x+3-4\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\cdot\sqrt{x-1}}=1 \Rightarrow \sqrt{x-1+4-4\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1+9-6\cdot\sqrt{x-1}}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)-4\cdot\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\cdot\sqrt{x-1}+9}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{supstitucija} \\ \sqrt{x-1}=t \Rightarrow x-1=t^2\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2-4\cdot t+4}+\sqrt{t^2-6\cdot t+9}=1 \Rightarrow \sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}=1 \Rightarrow |t-2|+|t-3|=1.$$

Iz $t - 2 = 0$ nalazimo karakterističnu točku (KT) modula:

$$t-2=0 \Rightarrow t=2 \ \text{KT}.$$

Iz $t - 3 = 0$ nalazimo karakterističnu točku (KT) modula:

$$t-3=0 \Rightarrow t=3 \ \text{KT}.$$

Karakteristične točke $t = 2$, $t = 3$ dijele brojevni pravac na tri dijela:

$$t<2 \quad , \quad 2\leq t\leq 3 \quad , \quad t>3.$$

Je li izraz pod znakom modula pozitivan ili negativan, provjeravamo uvrštavanjem jednog broja manjeg od KT i jednog većeg od KT, a zatim primijenimo definiciju modula (apsolutne vrijednosti).

Prvi slučaj

Za $t < 2$ izrazi $t - 2$ i $t - 3$ su negativni pa vrijedi:

$$|t-2|=-(t-2)=-t+2 \quad , \quad |t-3|=-(t-3)=-t+3.$$

Zato je:

$$|t-2|+|t-3|=1 \Rightarrow -t+2-t+3=1 \Rightarrow -t-t=1-2-3 \Rightarrow -2\cdot t=-4 \ /:(-2) \Rightarrow t=2.$$

To je suprotno pretpostavci $t < 2$.

Drugi slučaj

Za $2 \leq t \leq 3$ izraz $t - 2$ je pozitivan, a izraz $t - 3$ je negativan pa vrijedi:

$$|t-2|=t-2 \quad , \quad |t-3|=-(t-3)=-t+3.$$

Zato je:

$$|t-2|+|t-3|=1 \Rightarrow t-2-t+3=1 \Rightarrow t-2-t+3=1 \Rightarrow -2+3=1 \Rightarrow 1=1.$$

Ako u nekom intervalu (segmentu) dobijemo identičku jednakost, onda su svi brojevi iz tog intervala (segmenta) rješenja jednadžbe. Znači da je rješenje:

$$t\in[2, 3].$$

Treći slučaj

Za $t > 3$ izrazi $t - 2$ i $t - 3$ su pozitivni pa vrijedi:

$$|t-2|=t-2 \quad , \quad |t-3|=t-3.$$

Zato je:

$$|t-2|+|t-3|=1 \Rightarrow t-2+t-3=1 \Rightarrow t+t=1+2+3 \Rightarrow 2\cdot t=6 \;/:2 \Rightarrow t=3.$$

To je suprotno pretpostavci t > 3.

Vraćamo se supstituciji:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=t\\ t\in[2,3]\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=t\\ 2\le t\le 3\end{array}\right\} \Rightarrow 2\le\sqrt{x-1}\le 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{kvadriramo}\\ \text{nejednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow 2\le\sqrt{x-1}\le 3 \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\le x-1\le 9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{nejednakostima}\\ \text{pribrojimo broj 1}\end{array}\right] \Rightarrow 4\le x-1\le 9 \;/+1 \Rightarrow 4+1\le x-1+1\le 9+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\le x\le 10 \Rightarrow x\in[5,10].$$

Vježba 026

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{1+\sqrt{x+1}}=1.$

Rezultat: x = – 1.

Zadatak 027 (Andrijana, gimnazija)

Nađi zbroj rješenja jednadžbe: $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3.$

Rješenje 027

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

Vièteove formule

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Dvostrukim kvadriranjem zadane iracionalne jednadžbe dobije se kvadratna jednadžba:

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3 \Rightarrow \sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}\right)^2=3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{4-x}\right)^2+2\cdot\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{5+x}+\left(\sqrt{5+x}\right)^2=9 \Rightarrow 4-x+2\cdot\sqrt{(4-x)\cdot(5+x)}+5+x=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-x+2\cdot\sqrt{(4-x)\cdot(5+x)}+5+x=9 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{(4-x)\cdot(5+x)}=0 \;/:2 \Rightarrow \sqrt{(4-x)\cdot(5+x)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(4-x)\cdot(5+x)}=0 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(4-x)\cdot(5+x)}\right)^2=0 \Rightarrow (4-x)\cdot(5+x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20+4\cdot x-5\cdot x-x^2=0 \Rightarrow -x^2-x+20=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x^2+x-20=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+x-20=0\\ a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-20\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ a=1\ ,\ b=1\end{array}\right\} \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{1}{1} \Rightarrow x_1+x_2=-1.$$

Vježba 027

Nađi umnožak rješenja jednadžbe: $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3.$

Rezultat: – 20.

Zadatak 028 (Dario, tehnička škola)

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1.$

Rješenje 028

Ponovimo!

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \quad , \quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:

Kubiramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kubirati.

1.inačica

$$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{kubiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1\ /^{3} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}\right)^3=1^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3-3\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2-\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^3=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2-3\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2-(x-5)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2-3\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2-x+5=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2-3\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2-x+5=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-3\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+5=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2=1-2-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2=-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2=-6\ /:(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x-5}-\sqrt[3]{x+2}\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2=2 \Rightarrow [\text{izlučivanje}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{x-5}\cdot\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}\right)=2 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{supstitucija}\\ \sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{x-5}\cdot 1=2 \Rightarrow \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{x-5}=2 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{kubiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt[3]{(x+2)\cdot(x-5)}=2\ /^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{(x+2)\cdot(x-5)}\right)^3=2^3 \Rightarrow (x+2)\cdot(x-5)=8 \Rightarrow x^2-5\cdot x+2\cdot x-10=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-3\cdot x-10-8=0 \Rightarrow x^2-3\cdot x-18=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-3\cdot x-18=0 \\ a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-18 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-18 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot(-18)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3+9}{2} \\ x_2=\dfrac{3-9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{12}{2} \\ x_2=-\dfrac{6}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=6 \\ x_2=-3 \end{array}\right\}.$$

Provjera!
Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$$

$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$ $x_1=6$	$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$ $x_2=-3$
$\sqrt[3]{6+2}-\sqrt[3]{6-5}=1$ $\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}=1$ $2-1=1$ $1=1$ x_1 jest rješenje	$\sqrt[3]{-3+2}-\sqrt[3]{-3-5}=1$ $\sqrt[3]{-1}-\sqrt[3]{-8}=1$ $-1-(-2)=1$ $-1+2=1$ $1=1$ x_2 jest rješenje

2.inačica

$$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1 \Rightarrow \sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x-5} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{kubiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x-5}\ /^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3=\left(1+\sqrt[3]{x-5}\right)^3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2=1+3\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+x-5 \Rightarrow x+2=1+3\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+x-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=1+3\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2-5 \Rightarrow 2-1+5=3\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6=3\cdot\sqrt[3]{x-5}+3\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2 \Rightarrow 3\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+3\cdot\sqrt[3]{x-5}=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+3\cdot\sqrt[3]{x-5}-6=0\ /:3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+\sqrt[3]{x-5}-2=0.$$

Uvodimo zamjenu (supstituciju):

$$t=\sqrt[3]{x-5}.$$

Dobije se kvadratna jednadžba koju lako riješimo:

$$\left.\begin{matrix} t=\sqrt[3]{x-5}\\ \left(\sqrt[3]{x-5}\right)^2+\sqrt[3]{x-5}-2=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow t^2+t-2=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} t^2+t-2=0\\ a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-2\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-2\\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\dfrac{-1+3}{2}\\ t_2=\dfrac{-1-3}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=\dfrac{2}{2}\\ t_2=-\dfrac{4}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1=1\\ t_2=-2\end{matrix}\right\}.$$

Vraćamo se na supstituciju.

- $$\left.\begin{matrix} t=\sqrt[3]{x-5}\\ t=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt[3]{x-5}=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{kubiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt[3]{x-5}=1\ /^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x-5}\right)^3 = 1^3 \Rightarrow x-5=1 \Rightarrow x=1+5 \Rightarrow x_1=6.$$

- $\left.\begin{array}{l} t=\sqrt[3]{x-5} \\ t=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{komparacije}\end{array}\right] \Rightarrow \sqrt[3]{x-5}=-2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{kubiramo} \\ \text{jednadžbu}\end{array}\right] \Rightarrow \sqrt[3]{x-5}=-2 \;/^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x-5}\right)^3 = (-2)^3 \Rightarrow x-5=-8 \Rightarrow x=-8+5 \Rightarrow x_2=-3.$$

Provjera!
Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$$

$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$ $x_1=6$	$\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-5}=1$ $x_2=-3$
$\sqrt[3]{6+2}-\sqrt[3]{6-5}=1$ $\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1}=1$ $2-1=1$ $1=1$ x_1 jest rješenje	$\sqrt[3]{-3+2}-\sqrt[3]{-3-5}=1$ $\sqrt[3]{-1}-\sqrt[3]{-8}=1$ $-1-(-2)=1$ $-1+2=1$ $1=1$ x_2 jest rješenje

Vježba 028

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}=2$

Rezultat: 3.

Zadatak 029 (Mirza, elektrotehnička škola)

Riješi iracionalnu nejednadžbu: $\sqrt{x^2+3\cdot x+3}<2\cdot x+1.$

Rješenje 029

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

$$\text{Iracionalna nejednadžba} \quad \sqrt{f(x)}<g(x) \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{l} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<(g(x))^2 \end{array}\right\} \text{ sustav nejednadžbi}$$

Općenito:

$$\text{Iracionalna nejednadžba} \quad \sqrt[2\cdot n]{f(x)}<g(x) \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{l} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<(g(x))^{2\cdot n} \end{array}\right\} \text{ sustav nejednadžbi}$$

Iracionalna nejednadžba je nejednadžba u kojoj se nepoznanica x pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ definirana je na skupu nenegativnih realnih brojeva, $R^+\cup\{0\}$. To znači da negativni realni brojevi ne mogu biti rješenja iracionalne jednadžbe $\sqrt{x}=a.$ To vrijedi za sve korijene parnog

eksponenta.
Postavimo uvjete zadane iracionalne nejednadžbe:

$$\sqrt{x^2+3\cdot x+3}<2\cdot x+1 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} x^2+3\cdot x+3\ge 0 & \text{1. uvjet} \\ 2\cdot x+1>0 & \text{2. uvjet} \\ x^2+3\cdot x+3<(2\cdot x+1)^2 & \text{3. uvjet} \end{array}\right\}.$$

1.uvjet

$$x^2+3\cdot x+3\ge 0.$$

Najprije riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$x^2+3\cdot x+3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+3\cdot x+3=0 \\ a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=3 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-12}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{nema realnih rješenja} \\ \text{nema nultočaka} \end{array}\right\}.$$

Odaberemo bilo koji realan broj x, na primjer x = 0 i uvrstimo ga u $x^2 + 3 \cdot x + 3$:

$$0^2+3\cdot 0+3=0+0+3=3>0.$$

Rezultat je pozitivan, što znači da je $x^2 + 3 \cdot x + 3$ pozitivan na cijelom intervalu $x\in\left\langle -\infty, +\infty\right\rangle$.

2.uvjet

$$2\cdot x+1>0 \Rightarrow 2\cdot x>-1\ /:2 \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \Rightarrow x\in\left\langle -\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle.$$

3.uvjet

$$x^2+3\cdot x+3<(2\cdot x+1)^2 \Rightarrow x^2+3\cdot x+3<4\cdot x^2+4\cdot x+1 \Rightarrow x^2+3\cdot x+3-4\cdot x^2-4\cdot x-1<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot x^2-x+2<0 \Rightarrow -3\cdot x^2-x+2<0\ /\cdot(-1) \Rightarrow 3\cdot x^2+x-2>0.$$

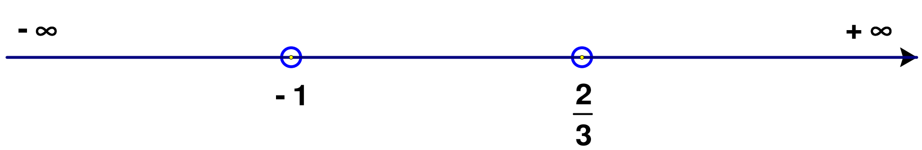
Najprije riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$3\cdot x^2+x-2=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x^2+x-2=0 \\ a=3\ ,\ b=1\ ,\ c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3\ ,\ b=1\ ,\ c=-2 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{6} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{6} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1+5}{6} \\ x_2=\dfrac{-1-5}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{4}{6} \\ x_2=-\dfrac{6}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2}{3} \\ x_2=-1 \end{array}\right\}.$$

Nultočke -1 i $\frac{2}{3}$ ucrtamo na x osi. U točkama -1 i $\frac{2}{3}$ vrijedi jednakost = pa one nisu rješenje naše stroge nejednakosti >. Zato ih nismo popunili (kružići su prazni).

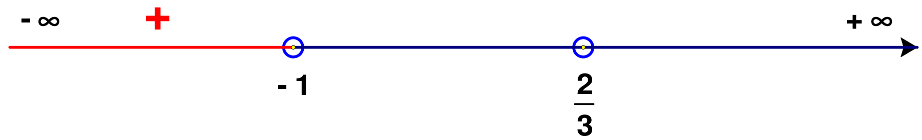


- Odaberemo x između $-\infty$ i -1, na primjer, $x = -2$ i uvrstimo ga u $3 \cdot x^2 + x - 2$:

$$3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 2 = 3 \cdot 4 - 2 - 2 = 12 - 2 - 2 = 8 > 0.$$

Rezultat je pozitivan, što znači da je $3 \cdot x^2 + x - 2$ pozitivan na cijelom intervalu $\langle -\infty, -1 \rangle$.

Upišimo simbol **+** iznad tog intervala.

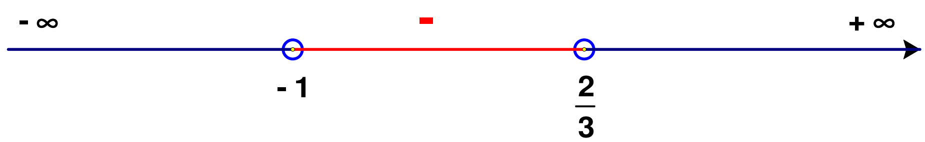


- Odaberemo x veći od – 1, a manji od $\frac{2}{3}$, na primjer, x = 0 i uvrstimo ga u $3 \cdot x^2 + x - 2$:

$$3 \cdot 0^2 + 0 - 2 = 3 \cdot 0 + 0 - 2 = 0 + 0 - 2 = -2 < 0.$$

Rezultat je negativan, što znači da je $3 \cdot x^2 + x - 2$ negativan na cijelom intervalu $\left\langle -1, \frac{2}{3} \right\rangle$.

Upišimo simbol **-** iznad tog intervala.

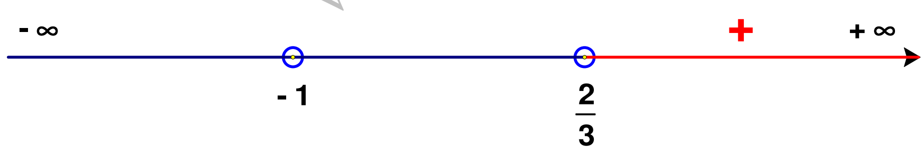


- Odaberemo x veći od $\frac{2}{3}$, na primjer x = 1 i uvrstimo ga u $3 \cdot x^2 + x - 2$:

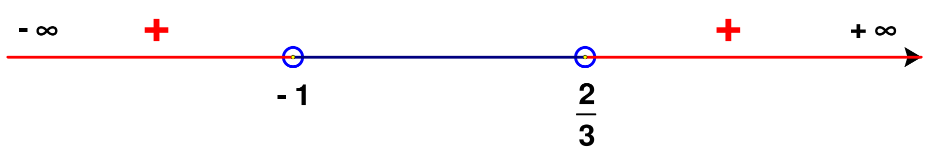
$$3 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 3 \cdot 1 + 1 - 2 = 3 + 1 - 2 = 2 > 0.$$

Rezultat je pozitivan, što znači da je $3 \cdot x^2 + x - 2$ pozitivan na cijelom intervalu $\left\langle \frac{2}{3}, +\infty \right\rangle$.

Upišimo simbol **+** iznad tog intervala.

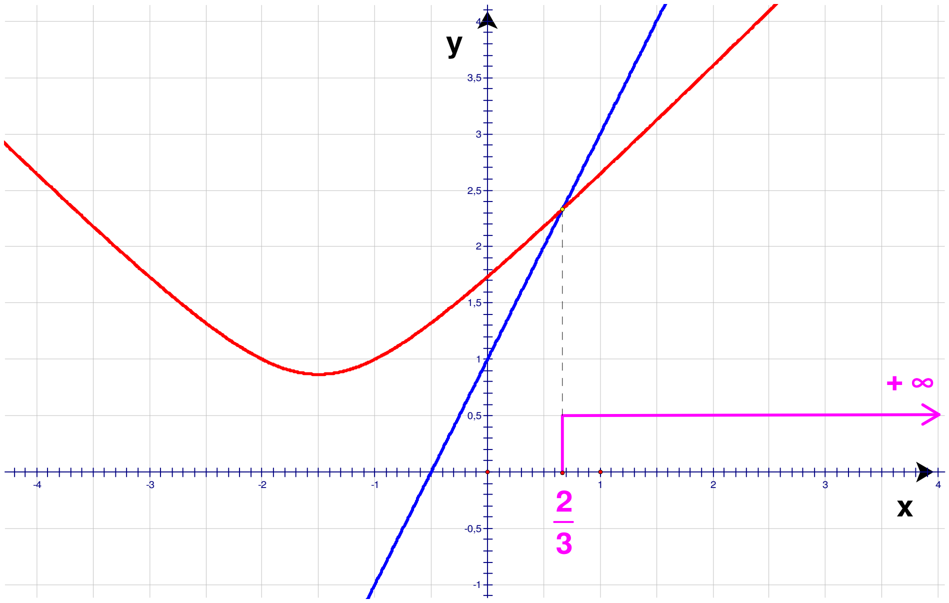


Dakle, nejednadžba $3 \cdot x^2 + x - 2 > 0$ vrijedi za $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}, +\infty \right\rangle$.



Rješenje zadane iracionalne nejednadžbe $\sqrt{x^2 + 3 \cdot x + 3} < 2 \cdot x + 1$ mora ispuniti sva tri uvjeta:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. uvjet } \; x \in \langle -\infty, +\infty \rangle \\ \text{2. uvjet } \; x \in \left\langle -\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle \\ \text{3. uvjet } \; x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}, +\infty \right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek sva tri rješenja,} \\ \text{zajednički dio sva tri uvjeta} \end{array}\right] \Rightarrow x \in \left\langle \frac{2}{3}, +\infty \right\rangle.$$



Vježba 029

Riješi iracionalnu nejednadžbu: $\sqrt{x^2+3\cdot x+3}>2\cdot x+1.$

Rezultat: $x\in\left\langle -\infty,\ \frac{2}{3}\right\rangle.$

Zadatak 030 (Ana, gimnazija)

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3.$

Rješenje 030

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a\ ,\qquad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$$

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=a^3+3\cdot a\cdot b\cdot(a+b)+b^3.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajna metoda rješavanja:

Kubiramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kubirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod trećim korijenom može biti bilo koji realan broj.**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{kubiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3\ /^3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}\right)^3=3^3\ \Rightarrow\ \left(\sqrt[3]{3-x}\right)^3+3\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{6+x}\cdot\left(\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}\right)+\left(\sqrt[3]{6+x}\right)^3=27\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3-x+3\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{6+x}\cdot\underbrace{\left(\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}\right)}_{=3}+6+x=27\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3-x+3\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{6+x}\cdot 3+6+x=27\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3-x+9\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{6+x}+6+x=27\ \Rightarrow\ 3-x+9\cdot\sqrt[3]{3-x}\cdot\sqrt[3]{6+x}+6+x=27\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+9\cdot\sqrt[3]{(3-x)\cdot(6+x)}+6=27 \Rightarrow 9\cdot\sqrt[3]{(3-x)\cdot(6+x)}=27-3-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot\sqrt[3]{(3-x)\cdot(6+x)}=18 \Rightarrow 9\cdot\sqrt[3]{(3-x)\cdot(6+x)}=18 \;/:9 \Rightarrow \sqrt[3]{(3-x)\cdot(6+x)}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{kubiramo}\\ \text{jednadžbu}\end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt[3]{(3-x)\cdot(6+x)}=2 \;/^3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{(3-x)\cdot(6+x)}\right)^3=2^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-x)\cdot(6+x)=8 \Rightarrow 18+3\cdot x-6\cdot x-x^2=8 \Rightarrow -x^2-3\cdot x+18-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2-3\cdot x+10=0 \Rightarrow -x^2-3\cdot x+10=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x^2+3\cdot x-10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+3\cdot x-10=0 \\ a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=-10\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=-10 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm7}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{-3+7}{2} \\ x_2=\dfrac{-3-7}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{4}{2} \\ x_2=\dfrac{-10}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-5\end{matrix}\right\}.$$

Provjera!
Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3$$

$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3$ $x_1=2$	$\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[3]{6+x}=3$ $x_2=-5$
$\sqrt[3]{3-2}+\sqrt[3]{6+2}=3$ $\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{8}=3$ $1+2=3$ $3=3$ x_1 jest rješenje	$\sqrt[3]{3-(-5)}+\sqrt[3]{6+(-5)}=3$ $\sqrt[3]{3+5}+\sqrt[3]{6-5}=3$ $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}=3$ $2+1=3$ $3=3$ x_2 jest rješenje

Vježba 030

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt[3]{24-8\cdot x}+\sqrt[3]{48+8\cdot x}=6.$

Rezultat: $x_1=2\ ,\ x_2=-5.$

Zadatak 031 (Mario, gimnazija)

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{x}=x-2.$

Rješenje 031

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Jednadžba $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ekvivalentna je sustavu $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0. \end{array} \right.$

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.
Zadana je jednadžba

$$\sqrt{x} = x - 2$$

ekvivalentna sustavu:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = x - 2 \\ x - 2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = x - 2 \; /^2 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left(\sqrt{x}\right)^2 = (x-2)^2 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = x^2 - 4 \cdot x + 4 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - x^2 + 4 \cdot x - 4 = 0 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x^2 + 5 \cdot x - 4 = 0 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x^2 + 5 \cdot x - 4 = 0 \; / \cdot (-1) \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 5 \cdot x + 4 = 0 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 5 \cdot x + 4 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -5 \;,\; c = 4 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -5 \;,\; c = 4 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5+3}{2} \\ x_2 = \dfrac{5-3}{2} \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{8}{2} \\ x_2 = \dfrac{2}{2} \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \\ x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4.$$

Provjera!
Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt{x} = x - 2$$

$\sqrt{x} = x - 2$ $x_1 = 4$	$\sqrt{x} = x - 2$ $x_2 = 1$

$\sqrt{4} = 4 - 2$ $2 = 4 - 2$ $2 = 2$ x_1 jest rješenje	$\sqrt{1} = 1 - 2$ $1 = 1 - 2$ $1 = -1$ x_2 nije rješenje

Vježba 031

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{x+2} = x.$

Rezultat: 4.

Zadatak 032 (Ljilja, gimnazija)

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{x+7} = x+1.$

Rješenje 032

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).

Jednadžba $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ekvivalentna je sustavu $\begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.
Zadana je jednadžba

$$\sqrt{x+7} = x+1$$

ekvivalentna sustavu:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x+7} = x+1 \\ x+1 \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x+7} = x+1 \;/^2 \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(\sqrt{x+7}\right)^2 = (x+1)^2 \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+7 = x^2 + 2 \cdot x + 1 \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+7-x^2-2 \cdot x - 1 = 0 \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x^2 - x + 6 = 0 \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x^2 - x + 6 = 0 \;/\cdot(-1) \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + x - 6 = 0 \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + x - 6 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = -6 \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = -6 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \\ x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} \\ x\ge -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2} \\ x\ge -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{-1+5}{2} \\ x_2=\frac{-1-5}{2} \\ x\ge -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{4}{2} \\ x_2=\frac{-6}{2} \\ x\ge -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-3 \\ x\ge -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=2.$$

Provjera!
Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt{x+7}=x+1$$

$\sqrt{x+7}=x+1$ $x_1=2$	$\sqrt{x+7}=x+1$ $x_2=-3$
$\sqrt{2+7}=2+1$ $\sqrt{9}=2+1$ $3=2+1$ $3=3$ x_1 jest rješenje	$\sqrt{-3+7}=-3+1$ $\sqrt{4}=-3+1$ $2=-3+1$ $2\ne -2$ x_2 nije rješenje

Vježba 032

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{x+7}-1=x.$

Rezultat: 2.

Zadatak 033 (Ljilja, gimnazija)

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{1-x}=5+x.$

Rješenje 033

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Jednadžba $\sqrt{f(x)}=g(x)$ ekvivalentna je sustavu $\left\{\begin{matrix} f(x)=\left[g(x)\right]^2 \\ g(x)\ge 0. \end{matrix}\right.$

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.
Zadana je jednadžba

$$\sqrt{1-x}=5+x$$

ekvivalentna sustavu:

$$\left.\begin{matrix} \sqrt{1-x}=5+x \\ 5+x\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \sqrt{1-x}=5+x \ /^2 \\ x\ge -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \left(\sqrt{1-x}\right)^2=(5+x)^2 \\ x\ge -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 1-x=25+10\cdot x+x^2 \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1-x-25-10\cdot x-x^2=0 \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x^2-11\cdot x-24=0 \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -x^2-11\cdot x-24=0 \ /\cdot(-1) \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+11\cdot x+24=0 \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+11\cdot x+24=0 \\ a=1 \ , \ b=11 \ , \ c=24 \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \ , \ b=11 \ , \ c=24 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-4\cdot 1\cdot 24}}{2\cdot 1} \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{2} \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{25}}{2} \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{1,2}=\frac{-11\pm 5}{2} \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{-11+5}{2} \\ x_2=\frac{-11-5}{2} \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{-6}{2} \\ x_2=\frac{-16}{2} \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-3 \\ x_2=-8 \\ x\geq -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=-3.$$

Provjera!
Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt{1-x}=5+x$$

$\sqrt{1-x}=5+x$ $x_1=-3$	$\sqrt{1-x}=5+x$ $x_2=-8$
$\sqrt{1-(-3)}=5+(-3)$ $\sqrt{1+3}=5-3$ $\sqrt{4}=5-3$ $2=5-3$ $2=2$ x_1 jest rješenje	$\sqrt{1-(-8)}=5+(-8)$ $\sqrt{1+8}=5-8$ $\sqrt{9}=5-8$ $3=5-8$ $3=-3$ x_2 nije rješenje

Vježba 033

Riješi iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{1-x}-5=x.$

Rezultat: $-3.$

Zadatak 034 (Ivan, tehnička škola)

Riješi jednadžbu $\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}}=5.$

Rješenje 034

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}}=5 \Rightarrow \sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}}=5 \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}}\right)^2=5^2 \Rightarrow 30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}=25-30 \Rightarrow -\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}=-5 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}=5 \Rightarrow \sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}=5 \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}\right)^2=5^2 \Rightarrow 29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}=25-29 \Rightarrow -\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}=-4 \;/\cdot(-1) \Rightarrow \sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}=4 \Rightarrow \sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}=4 \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}\right)^2=4^2 \Rightarrow 12+\sqrt{3\cdot x+10}=16 \Rightarrow \sqrt{3\cdot x+10}=16-12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3\cdot x+10}=4 \Rightarrow \sqrt{3\cdot x+10}=4 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{3\cdot x+10}\right)^2=4^2 \Rightarrow 3\cdot x+10=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x=16-10 \Rightarrow 3\cdot x=6 \Rightarrow 3\cdot x=6 \;/:2 \Rightarrow x=2.$$

Provjera!

Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}}=5$$

$$\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot 2+10}}}}=5$$

$$\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{6+10}}}}=5$$

$$\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{16}}}}=5$$

$$\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{12+4}}}=5$$

$$\sqrt{30-\sqrt{29-\sqrt{16}}}=5$$

$$\sqrt{30-\sqrt{29-4}}=5$$

$$\sqrt{30-\sqrt{25}}=5$$

$$\sqrt{30-5}=5$$

$$\sqrt{25}=5$$

$$5=5$$

x = 2 je rješenje

Vježba 034

Riješi jednadžbu $\sqrt{29-\sqrt{12+\sqrt{3\cdot x+10}}}=5.$

Rezultat: x = 2.

Zadatak 035 (Malena, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\sqrt{2\cdot x}-x+4=0.$

Rješenje 035

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{2\cdot x}-x+4=0 \Rightarrow \sqrt{2\cdot x}=x-4 \Rightarrow \sqrt{2\cdot x}=x-4 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2\cdot x}\right)^2=(x-4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=x^2-8\cdot x+16 \Rightarrow 2\cdot x-x^2+8\cdot x-16=0 \Rightarrow -x^2+10\cdot x-16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2+10\cdot x-16=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x^2-10\cdot x+16=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-10\cdot x+16=0 \\ a=1 \;,\; b=-10 \;,\; c=16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \;,\; b=-10 \;,\; c=16 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-64}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{36}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{10\pm 6}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{10+6}{2} \\ x_2=\dfrac{10-6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{16}{2} \\ x_2=\dfrac{4}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=8 \\ x_2=2 \end{matrix}\right\}.$$

Provjera!

Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt{2\cdot x}-x+4=0$$

$\sqrt{2\cdot x}-x+4=0$ $x_1 = 8$	$\sqrt{2\cdot x}-x+4=0$ $x_2 = 2$
$\sqrt{2\cdot 8}-8+4=0$ $\sqrt{16}-8+4=0$ $4-8+4=0$ $8-8=0$ $0=0$ x_1 jest rješenje	$\sqrt{2\cdot 2}-2+4=0$ $\sqrt{4}-2+4=0$ $2-2+4=0$ $2-2+4=0$ $4\neq 0$ x_2 nije rješenje

Vježba 035

Riješi jednadžbu $\sqrt{2 \cdot x + 4} = x.$

Rezultat: x = 8.

Zadatak 036 (Malena, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\sqrt{x + \sqrt{x-4}} = 2.$

Rješenje 036

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{x+\sqrt{x-4}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x-4}} = 2 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x+\sqrt{x-4}}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x + \sqrt{x-4} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-4} = 4 - x \Rightarrow \sqrt{x-4} = 4 - x \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-4}\right)^2 = (4-x)^2 \Rightarrow x - 4 = 16 - 8 \cdot x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 4 - 16 + 8 \cdot x = 0 \Rightarrow -x^2 + 9 \cdot x - 20 = 0 \Rightarrow -x^2 + 9 \cdot x - 20 = 0 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 \cdot x + 20 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 9 \cdot x + 20 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -9 \;,\; c = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a = 1 \;,\; b = -9 \;,\; c = 20 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{9+1}{2} \\ x_2 = \dfrac{9-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{10}{2} \\ x_2 = \dfrac{8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 4 \end{array}\right\}.$$

Provjera!

Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt{x+\sqrt{x-4}} = 2$$

$\sqrt{x+\sqrt{x-4}} = 2$ $x_1 = 5$	$\sqrt{x+\sqrt{x-4}} = 2$ $x_2 = 4$

$\sqrt{5+\sqrt{5-4}}=2$	$\sqrt{4+\sqrt{4-4}}=2$
$\sqrt{5+\sqrt{1}}=2$	$\sqrt{4+\sqrt{0}}=2$
$\sqrt{5+1}=2$	$\sqrt{4+0}=2$
$\sqrt{6}\neq 2$	$\sqrt{4}=2$
x_1 nije rješenje	$2=2$
	x_2 jest rješenje

Vježba 036

Riješi jednadžbu $\sqrt{\sqrt{x-4}+x}-2=0.$

Rezultat: x = 4.

Zadatak 037 (Malena, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\sqrt[4]{x}+2\cdot\sqrt{x}=3.$

Rješenje 037

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt[4]{x}+2\cdot\sqrt{x}=3 \Rightarrow \sqrt[4]{x}+2\cdot\sqrt{x}-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ t=\sqrt[4]{x}\\ t^2=\sqrt{x}\end{array}\right] \Rightarrow t+2\cdot t^2-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot t^2+t-3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot t^2+t-3=0\\ a=2\ ,\ b=1\ ,\ c=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=2\ ,\ b=1\ ,\ c=-3\\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{4} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}t_1=\dfrac{-1+5}{4}\\ t_2=\dfrac{-1-5}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}t_1=\dfrac{4}{4}\\ x_2=-\dfrac{6}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}t_1=1\\ t_2=-\dfrac{3}{2}\ \text{nema smisla}\end{array}\right\} \Rightarrow t=1.$$

Vraćamo se supstituciji.

$$\left.\begin{array}{l}t=\sqrt[4]{x}\\ t=1\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[4]{x}=1 \Rightarrow \sqrt[4]{x}=1\ /^4 \Rightarrow \left(\sqrt[4]{x}\right)^4=1^4 \Rightarrow x=1.$$

Provjera!
Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$\sqrt[4]{x}+2\cdot\sqrt{x}=3$$

x = 1

$$\sqrt[4]{1}+2\cdot\sqrt{1}=3$$

$$1+2\cdot 1=3$$

$$1+2=3$$

$$3=3$$

x = 1 je rješenje

Vježba 037

Riješi jednadžbu $\sqrt[4]{x}+3\cdot\sqrt{x}-4=0.$

Rezultat: 1.

Zadatak 038 (Amazonka, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}}+\sqrt{2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}}=3+\sqrt{3}.$

Rješenje 038

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}}+\sqrt{2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}}=3+\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\sqrt{2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}}+\sqrt{2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}}=3+\sqrt{3} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}}+\sqrt{2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}}\right)^2=\left(3+\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}}\right)^2+2\cdot\sqrt{2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}}\cdot\sqrt{2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}}+\left(\sqrt{2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}}\right)^2=$$

$$=9+6\cdot\sqrt{3}+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}+2\cdot\sqrt{\left(2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}\right)\cdot\left(2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}\right)}+2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}=12+6\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}+2\cdot\sqrt{(2\cdot x+7)^2-\left(\sqrt{4\cdot x+11}\right)^2}+2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}=12+6\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+7+2\cdot\sqrt{4\cdot x^2+28\cdot x+49-(4\cdot x+11)}+2\cdot x+7=12+6\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x+14+2\cdot\sqrt{4\cdot x^2+28\cdot x+49-4\cdot x-11}=12+6\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot x+14+2\cdot\sqrt{4\cdot x^{2}+24\cdot x+38}=12+6\cdot\sqrt{3}\ /:2\ \Rightarrow\ 2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x^{2}+24\cdot x+38}=6+3\cdot\sqrt{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{4\cdot x^{2}+24\cdot x+38}=6+3\cdot\sqrt{3}-2\cdot x-7\ \Rightarrow\ \sqrt{4\cdot x^{2}+24\cdot x+38}=3\cdot\sqrt{3}-2\cdot x-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{4\cdot x^{2}+24\cdot x+38}=3\cdot\sqrt{3}-2\cdot x-1\ /^{2}\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{4\cdot x^{2}+24\cdot x+38}\right)^{2}=\left(3\cdot\sqrt{3}-2\cdot x-1\right)^{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot x^{2}+24\cdot x+38=\left(3\cdot\sqrt{3}\right)^{2}+\left(-2\cdot x\right)^{2}+\left(-1\right)^{2}+2\cdot3\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-2\cdot x\right)+2\cdot3\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-1\right)+2\cdot\left(-2\cdot x\right)\cdot\left(-1\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot x^{2}+24\cdot x+38=27+4\cdot x^{2}+1-12\cdot x\cdot\sqrt{3}-6\cdot\sqrt{3}+4\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot x^{2}+24\cdot x+38=27+4\cdot x^{2}+1-12\cdot x\cdot\sqrt{3}-6\cdot\sqrt{3}+4\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 24\cdot x+38=27+1-12\cdot x\cdot\sqrt{3}-6\cdot\sqrt{3}+4\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 24\cdot x+38=28-12\cdot x\cdot\sqrt{3}-6\cdot\sqrt{3}+4\cdot x\ \Rightarrow\ 24\cdot x+12\cdot x\cdot\sqrt{3}-4\cdot x=28-6\cdot\sqrt{3}-38\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 20\cdot x+12\cdot x\cdot\sqrt{3}=-10-6\cdot\sqrt{3}\ \Rightarrow\ 20\cdot x+12\cdot x\cdot\sqrt{3}=-10-6\cdot\sqrt{3}\ /:2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10\cdot x+6\cdot x\cdot\sqrt{3}=-5-3\cdot\sqrt{3}\ \Rightarrow\ 2\cdot x\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)=-5-3\cdot\sqrt{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)=-5-3\cdot\sqrt{3}\ /\cdot\frac{1}{2\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)}\ \Rightarrow\ x=\frac{-5-3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{-1\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)}{2\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)}\ \Rightarrow\ x=\frac{-1\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)}{2\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)}\ \Rightarrow\ x=-\frac{1}{2}.$$

Provjera!
Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$\sqrt{2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}}+\sqrt{2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}}=3+\sqrt{3}$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+7+\sqrt{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+11}}+\sqrt{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+7-\sqrt{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+11}}=3+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-1+7+\sqrt{-2+11}}+\sqrt{-1+7-\sqrt{-2+11}}=3+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{6+\sqrt{9}}+\sqrt{6-\sqrt{9}}=3+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{6+3}+\sqrt{6-3}=3+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{9}+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$$

$$3+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$$

$x=-\frac{1}{2}$ je rješenje

Vježba 038

Riješi jednadžbu: $\sqrt{2\cdot x+7+\sqrt{4\cdot x+11}}-\sqrt{3}=3-\sqrt{2\cdot x+7-\sqrt{4\cdot x+11}}$.

Rezultat: $x=-\frac{1}{2}$

Zadatak 039 (Miro, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x^2-9}+x^2-9=20.$

Rješenje 039

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$\sqrt{x^2-9}+x^2-9=20 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ t=\sqrt{x^2-9}\\ t^2=x^2-9\end{array}\right] \Rightarrow t+t^2=20 \Rightarrow t^2+t-20=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} t^2+t-20=0\\ a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-20\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-20\\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-20)}}{2\cdot1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm9}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} t_1=\dfrac{-1+9}{2}\\ t_2=\dfrac{-1-9}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} t_1=\dfrac{8}{2}\\ t_2=-\dfrac{10}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} t_1=4\\ t_2=-5\end{array}\right\}.$$

Vraćamo se supstituciji (zamjeni).

- $$\left.\begin{array}{c} t=\sqrt{x^2-9}\\ t=4\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x^2-9}=4 \Rightarrow \sqrt{x^2-9}=4\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-9}\right)^2=4^2 \Rightarrow x^2-9=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=16+9 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x^2=25\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{25} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1=5\\ x_2=-5\end{array}\right\}.$$

- $$\left.\begin{array}{c} t=\sqrt{x^2-9}\\ t=-5\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x^2-9}=-5 \text{ nema smisla}.$$

Provjera!

Ovi rezultati moraju se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li oni njezina rješenja.

$$\sqrt{x^2-9}+x^2-9=20$$

$\sqrt{x^2-9}+x^2-9=20$ $x_1 = 5$	$\sqrt{x^2-9}+x^2-9=20$ $x_2 = -5$
$\sqrt{5^2-9}+5^2-9=20$ $\sqrt{25-9}+25-9=20$ $\sqrt{16}+25-9=20$ $4+25-9=20$ $20=20$ x_1 jest rješenje	$\sqrt{(-5)^2-9}+(-5)^2-9=20$ $\sqrt{25-9}+25-9=20$ $\sqrt{16}+25-9=20$ $4+25-9=20$ $20=20$ x_2 jest rješenje

Vježba 039

Riješi jednadžbu: $x^2-2\cdot x+\sqrt{x^2-2\cdot x+6}=6.$

Rezultat: Naputak: promatraj jednadžbu $x^2-2\cdot x+6+\sqrt{x^2-2\cdot x+6}=12,$

supstitucija $t=\sqrt{x^2-2\cdot x+6},$ $x_1=-1$, $x_2=3$.

Zadatak 040 (Miroslav, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $1+\sqrt{x^2-9}=x.$

Rješenje 040

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Uobičajna metoda rješavanja:

Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.

Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**

Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.

$$1+\sqrt{x^2-9}=x \Rightarrow \sqrt{x^2-9}=x-1 \Rightarrow \sqrt{x^2-9}=x-1 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-9}\right)^2=(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-9=x^2-2\cdot x+1 \Rightarrow x^2-9=x^2-2\cdot x+1 \Rightarrow -9=-2\cdot x+1 \Rightarrow 2\cdot x=1+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=10 \Rightarrow 2\cdot x=10 \;/:2 \Rightarrow x=5.$$

Provjera!

Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$1+\sqrt{x^2-9}=x$$

$1+\sqrt{x^2-9}=x$ $x = 5$

$$1+\sqrt{5^2-9}=5$$
$$1+\sqrt{25-9}=5$$
$$1+\sqrt{16}=5$$
$$1+4=5$$
$$5=5$$
x jest rješenje

Vježba 040

Riješi jednadžbu: $1+\sqrt{x^2-1}=x.$

Rezultat: x = 1.