

# Zadnjih deset zadataka

## I.

### Zadatak 158 (Ana, gimnazija)

Kako se mijenja kutna akceleracija kružne ploče na koju djeluje stalni zakretni moment ako pri istoj masi povećamo njezin polumjer dva puta?

### Rješenje 158

$$M = \text{konst.}, \quad m = \text{konst.}, \quad r_2 = 2 \cdot r_1, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile  $M$ , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}.$$

Moment sile  $M$  koji okreće tijelo jednak je umnošku momenta tromosti  $I$  tijela i kutne akceleracije  $\alpha$ . Moment tromosti (ustrajnosti) kružne ploče mase  $m$  i polumjera  $r$ , s obzirom na os koja prolazi okomito njezinim središtem iznosi:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

Neka je  $\alpha_1$  kutna akceleracija kružne ploče prije povećanja njezinog polumjera, a  $\alpha_2$  kutna akceleracija kružne ploče poslije povećanja njezinog polumjera dva puta.

Računamo omjer kutnih akceleracija:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} &= \frac{\frac{M}{I_2}}{\frac{M}{I_1}} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{I_1}{I_2} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{I_1}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r_2^2} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r_1^2}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r_2^2} \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \left(\frac{r_1}{2 \cdot r_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{4} \cdot \alpha_1. \end{aligned}$$

Kutna akceleracija postaje četiri puta manja.

### Vježba 158

Kako se mijenja kutna akceleracija kružne ploče na koju djeluje stalni zakretni moment ako pri istoj masi povećamo njezin polumjer tri puta?

**Rezultat:** Kutna akceleracija postaje devet puta manja.

## II.

### Zadatak 159 (Ana, gimnazija)

Niz kosinu kotrljaju se kugla, valjak i обруч.

a) Nađi linijsko ubrzanje središta tih tijela.

b) Kolika je akceleracija ako se tijela skližu niz kosinu bez trenja?

Kut nagiba kosine je  $30^\circ$ , a početna brzina tijela 0. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 159

$$\alpha = 30^\circ, \quad v_0 = 0 \text{ m/s}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s,$$

gdje je  $v$  brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Između obodne (linearne) brzine  $v$  i kutne brzine  $\omega$  neke čestice pri rotaciji po kružnici polumjera  $r$  vrijedi odnos

$$v = r \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_{kr} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je  $I$  moment ustrajnosti (tromosti),  $\omega$  kutna brzina.

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Moment ustrajnosti (tromosti) kugle mase  $m$  i polumjera  $r$ , s obzirom na os koja prolazi njezinim središtem, iznosi:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase  $m$  i polumjera baze  $r$ , s obzirom na os koja prolazi kroz središte mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Moment ustrajnosti (tromosti) za обруч mase  $m$  i polumjera  $r$ , s obzirom na os koja prolazi okomito središtem je:

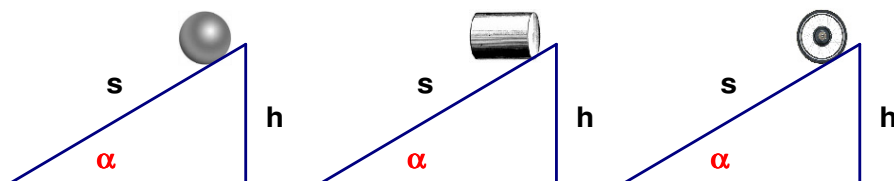
$$I = m \cdot r^2.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.



Sa slika vidi se:

$$\sin \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow h = s \cdot \sin \alpha.$$

Iz zakona o očuvanju energije dobije se linijsko ubrzanje središta zadanih tijela. Gravitacijska potencijalna energija tijela na vrhu kosine jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i rotacije tijela na dnu kosine pa slijedi:

$$\begin{aligned} E_{gp} = E_k + E_{kr} &\Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot a \cdot s + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot a \cdot s + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{2 \cdot a \cdot s}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{2 \cdot a \cdot s}{r^2} \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + I \cdot \frac{a \cdot s}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s + I \cdot \frac{a \cdot s}{r^2} / \frac{1}{s} \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha = m \cdot a + I \cdot \frac{a}{r^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \cdot g \cdot \sin \alpha = a \cdot \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}}. \end{aligned}$$

Za zadana tijela proizlazi redom.

**Kugla**

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ a &= \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{\frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2}{r^2}} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{2}{5} \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\frac{7}{5} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\frac{7}{5} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{5 \cdot g \cdot \sin \alpha}{7} = \frac{5 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ}{7} = 3.57 \frac{m}{s^2}.$$

### Valjak

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ a &= \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2}{r^2}} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2}{r^2}} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{1}{2} \cdot m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\frac{3}{2} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{\frac{3}{2} \cdot m} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot g \cdot \sin \alpha}{3} = \frac{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ}{3} = 3.33 \frac{m}{s^2}.$$

### Obruč

$$\left. \begin{aligned} I &= m \cdot r^2 \\ a &= \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{m \cdot r^2}{r^2}} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + \frac{m \cdot r^2}{r^2}} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m + m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot m} \Rightarrow a = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{2 \cdot m} \Rightarrow a = \frac{g \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{10 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ}{2} = 2.5 \frac{m}{s^2}.$$

Ako se tijela skližu niz kosinu bez trenja, gravitacijska potencijalna energija na vrhu kosine bit će jednaka kinetičkoj energiji koju tijela imaju pri dnu kosine (zakon o očuvanju energije) pa vrijedi:

$$E_{gp} = E_k \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s \Rightarrow m \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha = m \cdot a \cdot s \quad / \cdot \frac{1}{m \cdot s} \Rightarrow a = g \cdot \sin \alpha.$$

Za sva tri tijela vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Kugla} \\ &\text{Valjak} \\ &\text{Obruč} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = g \cdot \sin \alpha = 10 \frac{m}{s^2} \cdot \sin 30^\circ = 5 \frac{m}{s^2}.$$

### Vježba 159

Niz kosinu kotrljaju se kugla, valjak i obruč. Kolika je akceleracija ako se tijela skližu niz kosinu bez trenja? Kut nagiba kosine je  $60^\circ$ , a početna brzina tijela 0. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $8.66 \text{ m/s}^2$ .

### III.

#### Zadatak 156 (Mira, gimnazija)

Na zamašnjak polumjera 1 m djeluje zakretni moment  $392 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju  $0.4 \text{ rad/s}^2$ ? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

#### Rješenje 156

$$r = 1 \text{ m}, \quad M = 392 \text{ N} \cdot \text{m}, \quad \alpha = 0.4 \text{ rad/s}^2, \quad m = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile  $M$ , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile  $M$  koji okreće tijelo jednak je umnošku momenta tromosti  $I$  tijela i kutne akceleracije  $\alpha$ .

Moment tromosti (ustrajnosti)  $I$  zamašnjaka kojemu je masa  $m$  raspoređena po njegovu obodu na udaljenosti  $r$  od osi vrtnje iznosi:

$$I = m \cdot r^2.$$

Masa  $m$  zamašnjaka na koji djeluje zakretni moment  $M$  iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ I = m \cdot r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow M = \alpha \cdot m \cdot r^2 \Rightarrow m = \frac{392 \text{ N} \cdot \text{m}}{0.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot (1 \text{ m})^2} = 980 \text{ kg}.$$

#### Vježba 156

Na zamašnjak polumjera 1 m djeluje zakretni moment  $196 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Koliku masu mora imati zamašnjak da bi uz zadani moment dobio kutnu akceleraciju  $0.2 \text{ rad/s}^2$ ? Masa zamašnjaka raspoređena je po njegovu obodu.

**Rezultat:** 980 kg.

## IV.

### Zadatak 157 (Mira, gimnazija)

Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 0.3 m, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa  $2 \cdot 10^3$  kg i učini 200 ophoda u minuti.

### Rješenje 157

$$d = 2 \cdot r = 0.3 \text{ m} \Rightarrow r = 0.15 \text{ m}, \quad m = 2 \cdot 10^3 \text{ kg}, \quad n = 200 \text{ okr}, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s},$$
$$E_k = ?$$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kutna brzina  $\omega$  iznosi:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu,$$

gdje je  $\nu$  frekvencija (učestalost, broj okreta u jedinici vremena)

$$\nu = \frac{n}{t} \Rightarrow \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t}.$$

Kinetička energija tijela koje rotira kutnom brzinom  $\omega$  je:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2,$$

gdje je  $I$  moment ustrajnosti (tromosti). Moment ustrajnosti (tromosti) za puni valjak mase  $m$  i polumjera baze  $r$ , s obzirom na os koja prolazi kroz centar mase okomito na bazu valjka je:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2.$$

Kinetička energija valjka koji se vrti oko svoje osi iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \\ \omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot 4 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 \Rightarrow E_k = m \cdot r^2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{n}{t} \right)^2 = 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (0.15 \text{ m})^2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{200 \text{ okr}}{60 \text{ s}} \right)^2 = 4934.8 \text{ J}.$$

### Vježba 157

Izračunaj kinetičku energiju valjka promjera 0.3 m, koji se vrti oko svoje osi, ako mu je masa 2 t i učini 100 ophoda u pola minute.

**Rezultat:** 4934.8 J.



### Zadatak 153 (Ivica, gimnazija)

Oko nepomične koloture polumjera 20 cm namotana je nit na kojoj visi uteg. Utug najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom  $2 \text{ cm/s}^2$  pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 100 cm.

### Rješenje 153

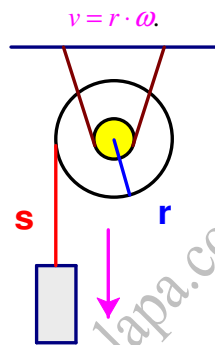
$$r = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad a = 2 \text{ cm/s}^2 = 0.02 \text{ m/s}^2, \quad s = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}, \quad \omega = ?$$

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijede izrazi

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2, \quad v = a \cdot t,$$

gdje su  $s$  i  $v$  put, odnosno brzina za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

Između obodne (linearne) brzine  $v$  i kutne brzine  $\omega$  neke čestice pri rotaciji po kružnici polumjera  $r$  vrijedi odnos



Kutna brzina  $\omega$  koloture u času kad je uteg prešao put  $s$  iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ v = a \cdot t \\ v = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad / \cdot 2 \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot s = a \cdot t^2 \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 = \frac{2 \cdot s}{a} \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 = \frac{2 \cdot s}{a} \quad / \sqrt{\phantom{x}} \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} \\ a \cdot t = \omega \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} \\ \omega = \frac{a \cdot t}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{a \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}}{r} \Rightarrow \omega = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \frac{0.02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0.2 \text{ m}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{0.02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

### Vježba 153

Oko nepomične koloture polumjera 2 dm namotana je nit na kojoj visi uteg. Utug najprije miruje, a onda počinje padati akceleracijom  $20 \text{ mm/s}^2$  pri čemu se nit odmotava. Nađi kutnu brzinu koloture u času kad je uteg prešao put 10 dm.

**Rezultat:** 1 rad/s.

## VI.

### Zadatak 154 (Ivica, gimnazija)

Koliki je moment tromosti Zemljine kugle ako uzmemo da su srednji polumjer Zemlje 6400 km i srednja gustoća  $5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ?

### Rješenje 154

$$r = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad \rho = 5.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad I = ?$$

Moment tromosti kugle polumjera  $r$  s obzirom na os koja prolazi središtem je:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2.$$

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Obujam (volumen) kugle polumjera  $r$  iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Moment tromosti  $I$  Zemljine kugle je:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ \rho = \frac{m}{V} \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ m = \rho \cdot V \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \\ m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow I = \frac{2}{5} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow I = \frac{8}{15} \cdot \rho \cdot r^5 \cdot \pi = \frac{8}{15} \cdot 5.5 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^5 \cdot \pi = 9.895 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

### Vježba 154

Koliki je moment tromosti Zemljine kugle ako uzmemo da su srednji polumjer Zemlje 6400 km i srednja gustoća  $5.5 \text{ t/m}^3$ ?

**Rezultat:**  $9.895 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$

## VII.

### Zadatak 155 (Ivica, gimnazija)

Na učvršćenu koloturu polumjera 0.5 m omotana je nit na kraju koje je učvršćen uteg mase 10 kg. Nađi moment tromosti koloture ako uteg pada akceleracijom  $2.04 \text{ m/s}^2$ . ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 155

$$r = 0.5 \text{ m}, \quad m = 10 \text{ kg}, \quad a = 2.04 \text{ m/s}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad I = ?$$

Tijelo će rotirati jednoliko ubrzano ako na njega djeluje stalan moment sile  $M$ , koji još zovemo zakretnim momentom. Osnovni zakon rotacije pišemo:

$$M = \alpha \cdot I.$$

Moment sile  $M$  koji okreće kotač jednak je umnošku momenta tromosti  $I$  kotača i kutne akceleracije  $\alpha$ . Moment  $M$  sile  $F$  u odnosu prema osi rotacije jest umnožak sile  $F$  i udaljenosti  $r$  pravca sile od te osi:

$$M = F \cdot r.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Sila koja djeluje na uteg je sila teža:

$$\left. \begin{array}{l} F = G \\ G = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow F = m \cdot g.$$

Moment tromosti  $I$  koloture, ako uteg pada akceleracijom  $a$ , iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ a = \alpha \cdot r \\ M = r \cdot F \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = \alpha \cdot I \\ \alpha = \frac{a}{r} \\ M = r \cdot m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = \frac{a}{r} \cdot I \\ M = r \cdot m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{r} \cdot I = r \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{r}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{r^2 \cdot m \cdot g}{a} = \frac{(0.5 \text{ m})^2 \cdot 10 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2.04 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 12.022 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

### Vježba 155

Na učvršćenu koloturu polumjera 50 cm omotana je nit na kraju koje je učvršćen uteg mase 0.01 t. Nađi moment tromosti koloture ako uteg pada akceleracijom  $204 \text{ cm/s}^2$ .

**Rezultat:**  $12.022 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

## VIII.

### Zadatak 090 (Franjo, srednja škola)

Električni motor priključen je na akumulator napona 6 V. Ako je jakost struje 0.5 A, koliki je rad motora kroz 5 minuta? Kolika je snaga motora?

### Rješenje 090

$$U = 6 \text{ V}, \quad I = 0.5 \text{ A}, \quad t = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}, \quad W = ?, \quad P = ?$$

Napon između dvije točke električnog polja jednak je radu  $W$  što ga treba utrošiti pri prenošenju naboja  $Q$  iz jedne točke u drugu.

$$U = \frac{W}{Q} \Rightarrow W = Q \cdot U.$$

Brzinu rada izražavamo snagom. Snaga  $P$  jednaka je omjeru rada  $W$  i vremena  $t$  za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t}.$$

Električna je struja usmjereno gibanje električnog naboja. Ako za vrijeme  $\Delta t$  presjekom vodiča prođe električni naboj  $\Delta Q$ , tada je jakost električne struje

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Za stalnu struju vrijedi

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = I \cdot t.$$

Rad motora iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W = Q \cdot U \\ Q = I \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow W = I \cdot t \cdot U = 0.5 \text{ A} \cdot 300 \text{ s} \cdot 6 \text{ V} = 900 \text{ J}.$$

Računamo snagu motora:

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{W}{t} \\ W = I \cdot t \cdot U \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow P = \frac{I \cdot t \cdot U}{t} \Rightarrow P = \frac{I \cdot t \cdot U}{t} \Rightarrow P = I \cdot U = 0.5 \text{ A} \cdot 6 \text{ V} = 3 \text{ W}.$$

### Vježba 090

Električni motor priključen je na akumulator napona 3 V. Ako je jakost struje 1 A, koliki je rad motora kroz 5 minuta?

**Rezultat:** 900 J.

# IX.

## Zadatak 135 (Josip, srednja škola)

Dva tijela, jednakih masa,  $m = 10$  g, naelektrizirana su tako da Coulombova sila poništava djelovanje gravitacijske sile među njima. Koliki su naboji tijela i kakvog su predznaka, ako se tijela nalaze u zraku? ( $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ ,  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ )

### Rješenje 135

$$m_1 = m_2 = m = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \quad k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}, \\ Q_1 = Q_2 = Q = ?$$

#### Coulombov zakon

Električna sila kojom uzajamno djeluju dva točkasta naboja upravno je razmjerna s umnoškom naboja  $Q_1$  i  $Q_2$ , a obrnuto razmjerna s kvadratom njihove međusobne udaljenosti  $r$ :

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje konstanta  $k$  za vakuum (i zrak) ima vrijednost

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$

#### Opći zakon gravitacije

Dva tijela koja možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

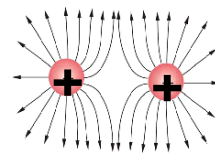
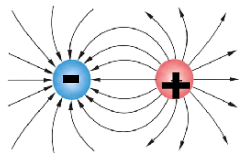
$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

gdje su  $m_1$  i  $m_2$  mase materijalnih točaka,  $r$  udaljenost između njih, a  $G$  gravitacijska konstanta koja je eksperimentalno određena i iznosi

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$$

Električna i gravitacijska sila djeluju na daljinu, odnosno na tijela koja nisu u dodiru. Gravitacijska sila je uvijek privlačna, a električna može biti i privlačna i odbojna.

Budući da je gravitacijska sila uvijek privlačna, Coulombova sila između dva tijela naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  mora biti odbojna. Znači da naboji moraju imati iste predznake (jer se istoimeni naboji odbijaju).



Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$F = F_g \Rightarrow k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow k \cdot \frac{Q^2}{r^2} = G \cdot \frac{m^2}{r^2} \Rightarrow k \cdot \frac{Q^2}{r^2} = G \cdot \frac{m^2}{r^2} / \cdot \frac{r^2}{k} \Rightarrow \\ \Rightarrow Q^2 = G \cdot \frac{m^2}{k} \Rightarrow Q^2 = G \cdot \frac{m^2}{k} / \sqrt{\quad} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm \sqrt{G \cdot \frac{m^2}{k}} \Rightarrow Q_{1,2} = \pm m \cdot \sqrt{\frac{G}{k}} = \\ = \pm 0.01 \text{ kg} \cdot \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}} = \pm 8.609 \cdot 10^{-13} \text{ C} = \pm 8.609 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-12} \text{ C} = \pm 0.8609 \text{ pC}.$$

1. slučaj

Oba su naboja pozitivna:

$$Q_1 = Q_2 = 0.8609 \text{ pC.}$$

2. slučaj

Oba su naboja negativna:

$$Q_1 = Q_2 = -0.8609 \text{ pC.}$$

### Vježba 135

Dva tijela, jednakih masa,  $m = 1 \text{ dag}$ , naelektrizirana su tako da Coulombova sila poništava djelovanje gravitacijske sile među njima. Koliki su naboji tijela i kakvog su predznaka, ako se tijela nalaze u zraku? ( $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ ,  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ )

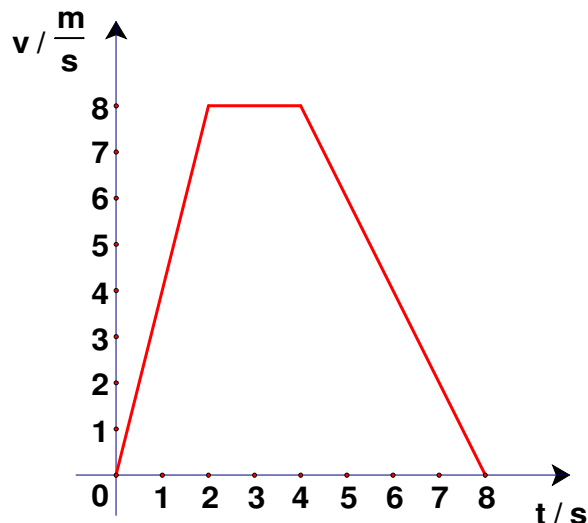
**Rezultat:**  $\pm 0.8609 \text{ pC.}$

www.halapa.com



### Zadatak 109 (Frenky, gimnazija)

Na slici je  $v, t$  – graf gibanja automobila. Izračunaj srednju brzinu automobila.



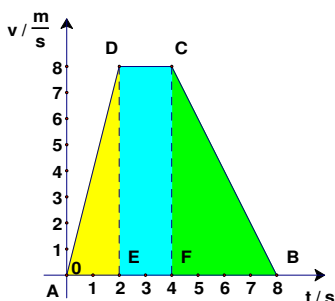
### Rješenje 109

Srednja brzina  $v$  tijela u vremenskom intervalu  $t$  jest kvocijent dijela puta  $s$ , što ga je tijelo prešlo za to vrijeme, i vremenskog razmaka  $t$ :

$$v = \frac{s}{t}$$

Pri rješavanju zadatka tog tipa moramo najprije pogledati koje su veličine naznačene za koordinatne osi. Vidjet ćemo da je riječ o vremenu  $t$  iskazanom sekundama  $t/s$  i brzini  $v$  iskazanoj metrom u sekundi  $v/ms^{-1}$ . To znači da grafikon prikazuje promjenu brzine nekoga gibanja. Prijedeni put odgovara površini ispod krivulje.

1. inačica



Na prvom dijelu puta, od nulte do druge sekunde, put ćemo izračunati iz izraza za površinu pravokutnog trokuta AED:

$$s_1 = \frac{|AE| \cdot |ED|}{2}$$

Na drugom dijelu puta, od druge do četvrte sekunde, put ćemo izračunati iz izraza za površinu pravokutnika EFCD:

$$s_2 = |EF| \cdot |ED|$$

Na trećem dijelu puta, od četvrte do osme sekunde, put ćemo izračunati iz izraza za površinu pravokutnog trokuta FBC:

$$s_3 = \frac{|FB| \cdot |FC|}{2}$$

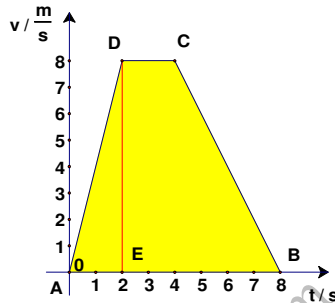
Prijeđeni put iznosi:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 \Rightarrow s = \frac{|AE| \cdot |ED|}{2} + |EF| \cdot |ED| + \frac{|FB| \cdot |FC|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{2 \text{ s} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} + 2 \text{ s} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{4 \text{ s} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} \Rightarrow s = 8 \text{ m} + 16 \text{ m} + 16 \text{ m} \Rightarrow s = 40 \text{ m}.$$

Srednja brzina automobila je:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{40 \text{ m}}{8 \text{ s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



2. inačica

Prijeđeni put  $s$  od nulte do osme sekunde odgovara površini ispod krivulje (trapeza) na slici.

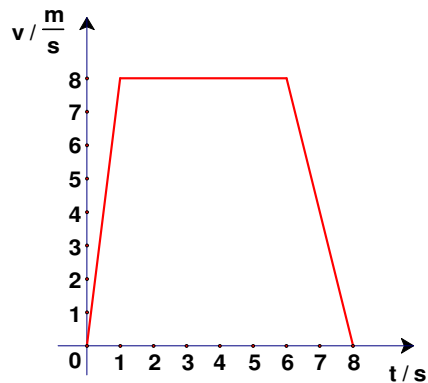
$$s = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |ED| \Rightarrow s = \frac{8 \text{ s} + 2 \text{ s}}{2} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow s = \frac{10 \text{ s}}{2} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow s = 5 \text{ s} \cdot 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow s = 40 \text{ m}.$$

Srednja brzina automobila je:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{40 \text{ m}}{8 \text{ s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Vježba 109

Na slici je  $v, t$  – graf gibanja automobila. Izračunaj srednju brzinu automobila.



**Rezultat:** 6.5 m/s.