

# 1.

## Zadatak 585 (Patrik, tehnička škola)

Kamen mase 0.5 kg pada s vrha nebodera visoka 67 m. U času pada kamen ima brzinu 19 m / s. Kolika je srednja sila otpora zraka? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

### Rješenje 585

$$m = 0.5 \text{ kg}, \quad h = 67 \text{ m}, \quad v = 19 \text{ m / s}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad F_0 = ?$$

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s},$$

gdje je v brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

**Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.**

$$W = \Delta E.$$



1. inačica

Kamen pada s vrha nebodera akceleracijom a jer na nj djeluje resultantna sila

$$m \cdot a = G - F_0,$$

gdje je G sila teža koja djeluje na kamen, a  $F_0$  sila otpora zraka. Akceleraciju dobijemo iz izraza

$$a = \frac{v^2}{2 \cdot h}$$

pa slijedi

$$m \cdot a = G - F_0 \Rightarrow F_0 = G - m \cdot a \Rightarrow F_0 = m \cdot g - m \cdot a \Rightarrow F_0 = m \cdot (g - a) \Rightarrow \left[ a = \frac{v^2}{2 \cdot h} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_o = m \cdot \left( g - \frac{v^2}{2 \cdot h} \right) = 0.5 \text{ kg} \cdot \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{\left( 19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 67 \text{ m}} \right) = 3.56 \text{ N}.$$

2.inačica

Rad sile otpora zraka jednak je razlici gravitacijske potencijalne i kinetičke energije kamena.

$$W = E_{gp} - E_k \Rightarrow F_o \cdot h = m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow F_o \cdot h = m \cdot \left( g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_o \cdot h = m \cdot \left( g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right) / \frac{1}{h} \Rightarrow F_o = \frac{m \cdot \left( g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2 \right)}{h} =$$

$$= \frac{0.5 \text{ kg} \cdot \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 67 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot \left( 19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right)}{67 \text{ m}} = 3.56 \text{ N}.$$

### Vježba 585

Kamen mase 1 kg pada s vrha nebodera visoka 67 m. U času pada kamen ima brzinu 19 m / s. Kolika je srednja sila otpora zraka? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ )

**Rezultat:** 7.12 N.

## 2.

### Zadatak 586 (Patrik, tehnička škola)

Na niti duljine 1 m obješena je kuglica. Koliku horizontalnu brzinu moramo dati kuglici da se otkloni do jednake visine na kojoj se nalazi objesište niti? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $3.91 \frac{m}{s}$       B.  $4.43 \frac{m}{s}$       C.  $4.88 \frac{m}{s}$       D.  $2.96 \frac{m}{s}$

### Rješenje 586

$$h = 1 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase  $m$  ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

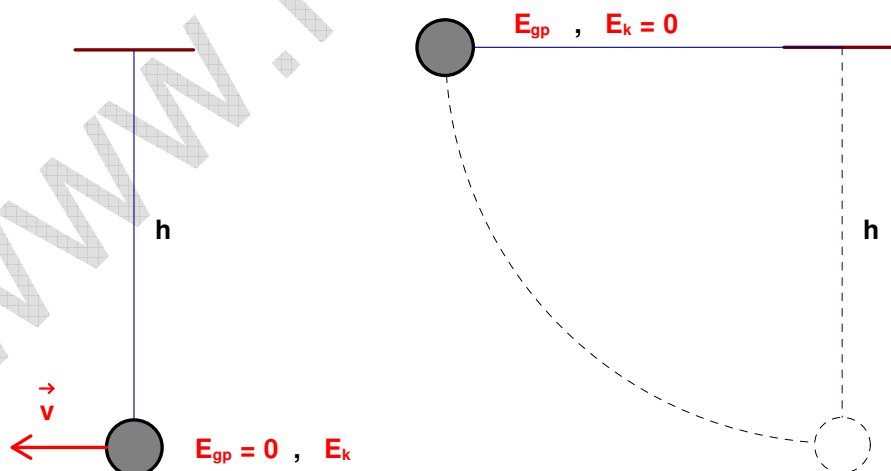
Tijelo mase  $m$  i brzine  $v$  ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Mehanička energija je zbroj potencijalne i kinetičke energije u mehaničkom sustavu, tj. energija koja ovisi o položaju i gibanju tijela zbog djelovanja sile.



Kuglica u položaju ravnoteže ima brzinu  $v$  i maksimalnu kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Na visini  $h$  na kojoj se nalazi objesište niti ona ima gravitacijsku potencijalnu energiju.

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h.$$

Zbog zakona o očuvanju energije vrijedi

$$E_k = E_{gp} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot h \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 m} = 4.43 \frac{m}{s}$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 586

Na niti duljine 2 m obješena je kuglica. Koliku horizontalnu brzinu moramo dati kuglici da se otkloni do jednake visine na kojoj se nalazi objesište niti? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

- A.  $4.92 \frac{m}{s}$       B.  $5.25 \frac{m}{s}$       C.  $6.11 \frac{m}{s}$       D.  $6.26 \frac{m}{s}$

**Rezultat:** D.

## 3.

**Zadatak 452 (Tomislav, tehnička škola)**

Kolika količina vode istječe u jednoj minuti iz spremnika kroz otvor promjera 4 cm koji se nalazi 4.9 m ispod razine vode? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 452**

$$d = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, \quad h = 4.9 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad I = ?$$

Količinu tekućine  $I$  koja prođe u jedinici vremena s nekim presjekom cijevi površine  $S$  zovemo jakost struje. Ona iznosi

$$I = S \cdot v,$$

gdje je  $v$  brzina protjecanja.

Površina kruga promjera  $d$  dana je izrazom

$$S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}.$$

Brzina istjecanja iz posude kroz otvor na dubini  $h$  ispod razine tekućine iznosi:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$



$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \\ v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \end{array} \right\} \Rightarrow [I = S \cdot v] \Rightarrow I = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \frac{(0.04 \text{ m})^2 \cdot \pi}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4.9 \text{ m}} =$$

$$= 0.0123 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0.0123 \frac{\text{m}^3}{\frac{1}{60} \text{ min}} = 0.0123 \cdot 60 \frac{\text{m}^3}{\text{min}} = 0.74 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}.$$

**Vježba 452**

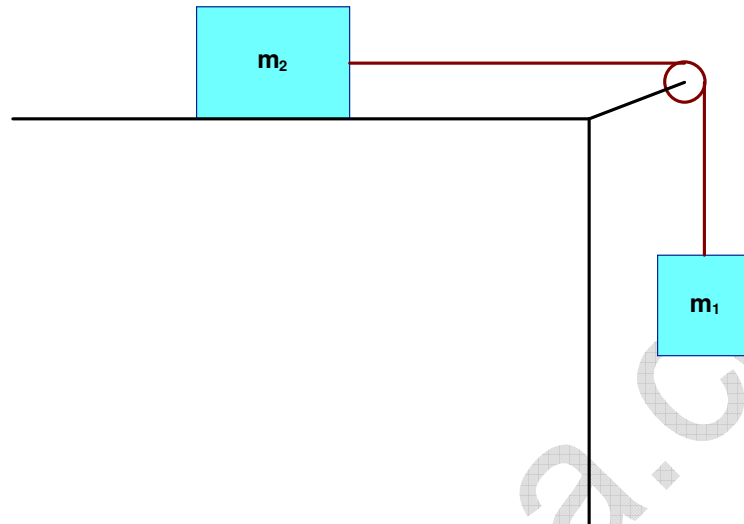
Kolika količina vode istječe u jednoj minuti iz spremnika kroz otvor promjera 5 cm koji se nalazi 5.4 m ispod razine vode? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $1.21 \text{ m}^3 / \text{min}.$

## 4.

**Zadatak 846 (Alisa3, gimnazija)**

Izračunajte ubrzanje tijela u sustavu prikazanom na slici ako je  $m_1 = 1 \text{ kg}$  i  $m_2 = 3 \text{ kg}$ . Zanimarite masu niti i kolotura. Faktor trenja između tijela mase  $m_2$  i stola iznosi 0.04. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )



- A.  $2.16 \frac{m}{s^2}$       B.  $1.96 \frac{m}{s^2}$       C.  $2.32 \frac{m}{s^2}$       D.  $0.92 \frac{m}{s^2}$

**Rješenje 846**

$$m_1 = 1 \text{ kg}, \quad m_2 = 3 \text{ kg}, \quad \mu = 0.04, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Trenje je sila koja se javlja kad se neko tijelo giba površinom nekoga drugog tijela ili kad se tek počinje gibati. Trenje ima smjer suprotan smjeru gibanja i može se izračunati pomoću izraza

$$F_{tr} = \mu \cdot F_N,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $F_N$  veličina okomite komponente sile kojom tijelo djeluje na podlogu po kojoj se giba. Ako se tijelo nalazi na vodoravnoj podlozi, tada trenje iznosi

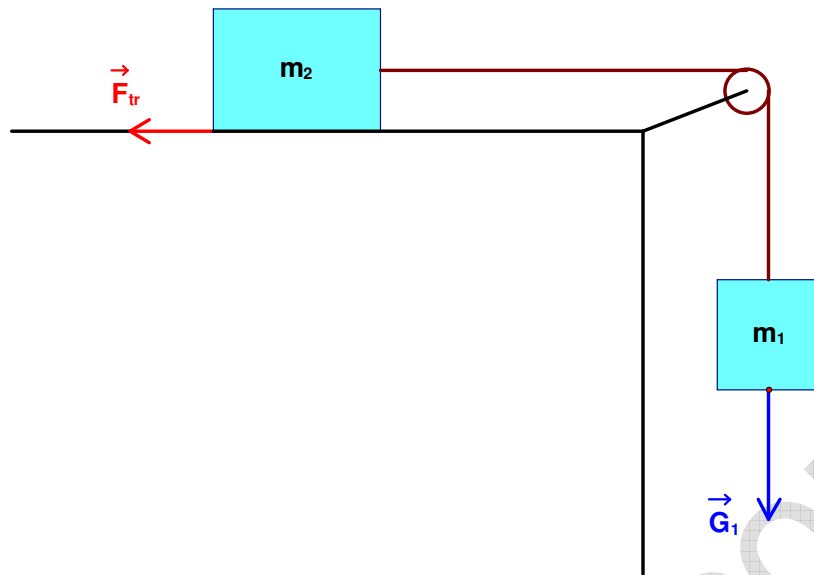
$$F_{tr} = \mu \cdot G \Rightarrow F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g,$$

gdje je  $F_{tr}$  trenje,  $\mu$  faktor trenja,  $m$  masa tijela,  $g$  akceleracija slobodnog pada (ubrzanje sile teže).

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$





Akceleraciju ćemo naći iz osnovnog zakona gibanja:

$$a = \frac{F}{m}$$

Sila koja uzrokuje gibanje jednaka je razlici djelovanja sile teže  $G_1$  na tijelo mase  $m_1$  i sile trenja  $F_{tr}$  koja se javlja zbog gibanja tijela mase  $m_2$  po stolu.

$$F = G_1 - F_{tr} \Rightarrow F = m_1 \cdot g - \mu \cdot m_2 \cdot g \Rightarrow F = (m_1 - \mu \cdot m_2) \cdot g.$$

Budući da sila  $F$  pokreće oba tijela (cijeli sustav), to je masa

$$m = m_1 + m_2.$$

Tako je

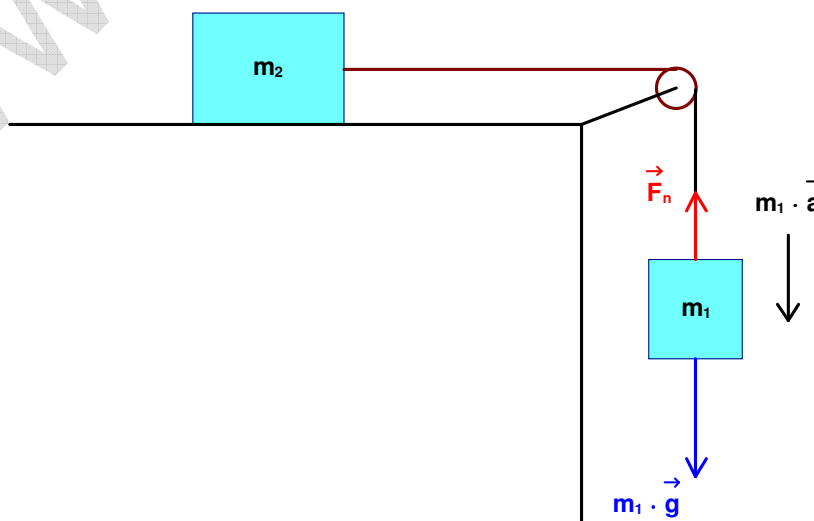
$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{(m_1 - \mu \cdot m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{(1 \text{ kg} - 0.04 \cdot 3 \text{ kg}) \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} = 2.16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

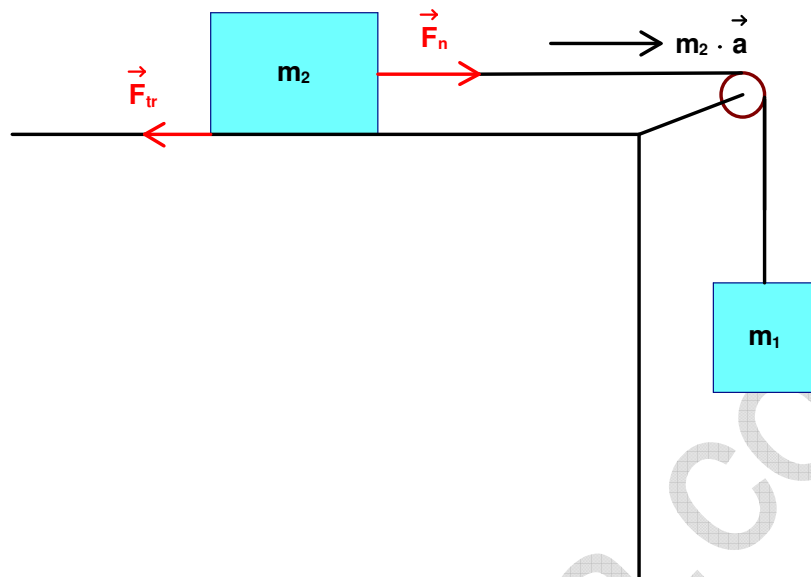
Cijeli sustav (oba tijela) ubrzava se akceleracijom  $a$ . Slovom  $F_n$  označit ćemo silu napetosti niti u sustavu.

- Na tijelo mase  $m_1$  djeluje sila  $m_1 \cdot a$  koja je jednaka razlici sile teže  $m_1 \cdot g$  i napetosti niti  $F_n$ .



$$m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - F_n$$

- Na tijelo mase  $m_2$  djeluje sila  $m_2 \cdot a$  koja je jednaka razlici sile napetosti  $F_n$  i sile trenja  $F_{tr}$  između tijela i podloge.



$$m_2 \cdot a = F_n - \mu \cdot m_2 \cdot g$$

Iz sustava jednačba izračuna se a.

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - F_n \\ m_2 \cdot a = F_n - \mu \cdot m_2 \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednačbe} \end{array} \right] \Rightarrow m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_1 \cdot g - F_n + F_n - \mu \cdot m_2 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_1 \cdot g - F_n + F_n - \mu \cdot m_2 \cdot g \Rightarrow m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = m_1 \cdot g - \mu \cdot m_2 \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = (m_1 - \mu \cdot m_2) \cdot g \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot a = (m_1 - \mu \cdot m_2) \cdot g \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_1 - \mu \cdot m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{(1 \text{ kg} - 0.04 \cdot 3 \text{ kg}) \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} = 2.16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 846

Izračunajte ubrzanje tijela u sustavu prikazanom na slici ako je  $m_1 = 2 \text{ kg}$  i  $m_2 = 6 \text{ kg}$ . Zanemarite masu niti i kolotura. Faktor trenja između tijela mase  $m_2$  i stola iznosi 0.04. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $2.16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$       B.  $1.96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$       C.  $2.32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$       D.  $0.92 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

**Rezultat:** A.

## 5.

**Zadatak 370 (Tonka, gimnazija)**

Kolika je konstanta opruge koja se produlji 10 cm kada na nju objesimo uteg mase 200 g? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

A.  $15.84 \frac{N}{m}$       B.  $18.24 \frac{N}{m}$       C.  $19.02 \frac{N}{m}$       D.  $19.62 \frac{N}{m}$

**Rješenje 370**

$$\Delta x = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad m = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad k = ?$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlji naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

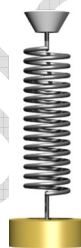
gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Elastična sila je

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x},$$

gdje je  $x$  pomak iz položaja ravnoteže, a  $k$  konstanta opruge. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. Znak minus u tom izrazu možemo izostaviti kada nas zanima samo veličina sile, a ne njezin smjer.

$$F = k \cdot x.$$



Na oprugu djeluje uteg mase  $m$  svojom težinom.

$$G = m \cdot g.$$

Toj sili protusila je elastična sila opruge.

$$F_{el} = k \cdot \Delta x.$$

One su jednake po iznosu, ali imaju suprotne smjerove.

$$F_{el} = G \Rightarrow k \cdot \Delta x = m \cdot g \Rightarrow k \cdot \Delta x = m \cdot g \cdot \frac{1}{\Delta x} \Rightarrow k = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{0.2 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}}{0.1 \text{ m}} = 19.62 \frac{N}{m}.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 370**

Kolika je konstanta opruge koja se produlji 30 cm kada na nju objesimo uteg mase 600 g? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

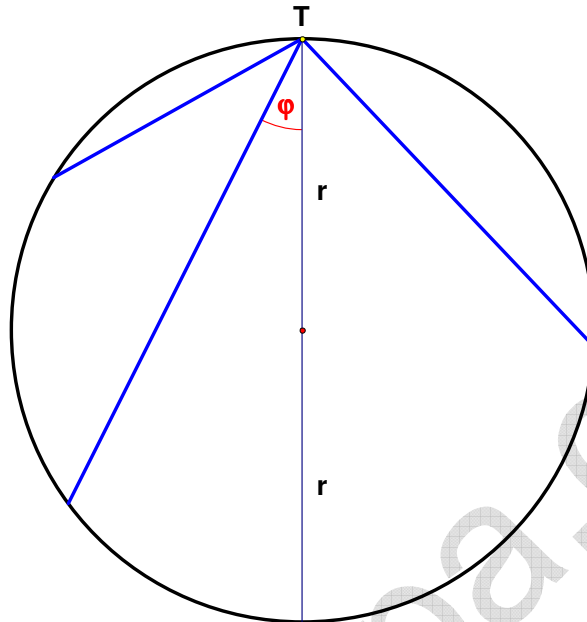
A.  $15.84 \frac{N}{m}$       B.  $18.24 \frac{N}{m}$       C.  $19.02 \frac{N}{m}$       D.  $19.62 \frac{N}{m}$

**Rezultat:** D.

## 6.

**Zadatak 845 (Josip, gimnazija)**

Iz točke T povučene su tetive kao na slici. Koliko traje put tijela (bez trenja) niz kosine što ih čine te tetive? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 845**

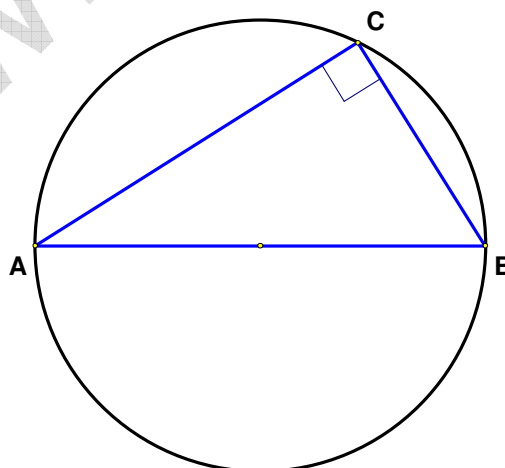
$r$  – polumjer kružnice,  $\varphi$  – kut između tetive i promjera kružnice s vrhom u točki T,  
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $t = ?$

**Trokut** je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

**Pravokutni** trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

**Kosinus** šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

**Talesov poučak** geometrijski je poučak koji kaže ako su A, B i C točke na kružnici, a dužina između točaka A i B promjer kruga, onda je kut  $\angle ACB$  pravi kut (kut od  $90^\circ$ ).



Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}},$$

gdje je  $s$  put za tijelo pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

**Kružnica** je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom  $r$ .

**Promjer** kružnice ili dijametar je dužina koja spaja dvije točke na kružnici i prolazi središtem kružnice.

**Tetiva** je dužina koja spaja dvije točke na kružnici.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

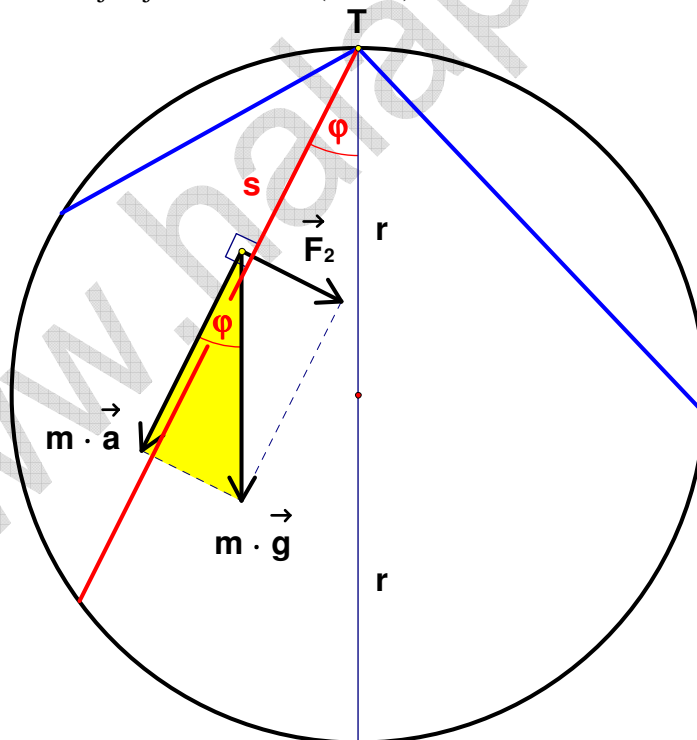
gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$



Kako odrediti ubrzanje tijela duž tetive (kosine)?



Silu  $m \cdot g$  rastavimo na dvije komponente:  $m \cdot a$  u smjeru kosine i  $F_2$  okomito na kosinu.

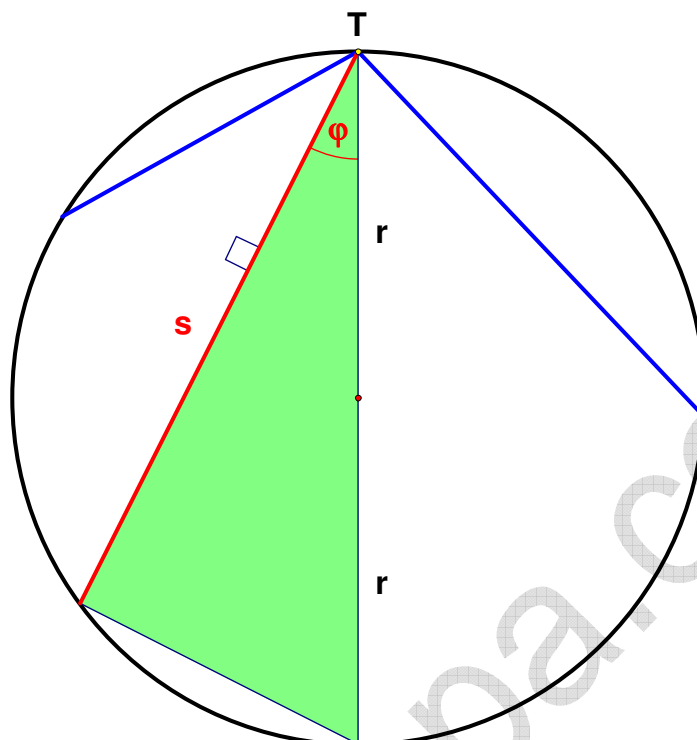
Uočimo pravokutan trokut (žuta boja) i pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos(\varphi) = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{a}{g} \Rightarrow \frac{a}{g} = \cos(\varphi) \Rightarrow \frac{a}{g} = \cos(\varphi) \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g \cdot \cos(\varphi).$$



Kako odrediti put tijela niz kosinu (tetivu)?



Uočimo pravokutan trokut nad promjerom kružnice (zeleno boja) i pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos(\varphi) = \frac{s}{2 \cdot r} \Rightarrow \frac{s}{2 \cdot r} = \cos(\varphi) \Rightarrow \frac{s}{2 \cdot r} = \cos(\varphi) / \cdot 2 \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = 2 \cdot r \cdot \cos(\varphi).$$

Vrijeme gibanja tijela niz tetivu (kosinu) iznosi:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot r \cdot \cos(\varphi)}{g \cdot \cos(\varphi)}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4 \cdot r \cdot \cos(\varphi)}{g \cdot \cos(\varphi)}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4 \cdot r}{g}} \Rightarrow t = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$$

### Rasprava

Vrijeme gibanja tijela ne ovisi o duljini tetive. Put traje jednako bez obzira na duljinu tetive.

### Vježba 845

Odmor!

Rezultat: ...

## 7.

**Zadatak 844 (Tomica, tehnička škola)**

Tijelo se giba pravocrtno stalnom akceleracijom. Za 2 sekunde prijeđe put od 10 m. U iduće 2 sekunde prijeđe put od 22 m. Kolika je akceleracija tijela?

A.  $1 \frac{m}{s^2}$       B.  $4 \frac{m}{s^2}$       C.  $3 \frac{m}{s^2}$       D.  $2 \frac{m}{s^2}$

**Rješenje 844**

$$t_1 = t_2 = t = 2 \text{ s}, \quad s_1 = 10 \text{ m}, \quad s_2 = 22 \text{ m}, \quad a = ?$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijedi formula za konačnu brzinu  $v$ :

$$v = v_0 + a \cdot t.$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijedi formula za put  $s$ :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$



Neka je  $v_0$  početna brzina tijela. Za vrijeme  $t_1$  ono je prešlo put  $s_1$ , ubrzavajući se stalnom akceleracijom  $a$ .

$$s_1 = v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 \Rightarrow s_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Na kraju vremenskog intervala  $t_1$  tijelo ima brzinu

$$v = v_0 + a \cdot t_1 \Rightarrow v = v_0 + a \cdot t.$$

To je početna brzina u idućem vremenskom intervalu  $t_2$  kada je tijelo prešlo put  $s_2$ .

$$s_2 = v \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 \Rightarrow s_2 = (v_0 + a \cdot t) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow s_2 = v_0 \cdot t + a \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Iz sustava dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ s_2 = v_0 \cdot t + a \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_2 = s_1 + a \cdot t^2 \Rightarrow s_1 + a \cdot t^2 = s_2 \Rightarrow a \cdot t^2 = s_2 - s_1 \Rightarrow a \cdot t^2 = s_2 - s_1 \cdot \frac{1}{t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{s_2 - s_1}{t^2} = \frac{22 \text{ m} - 10 \text{ m}}{(2 \text{ s})^2} = 3 \frac{m}{s^2}.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 844**

Tijelo se giba pravocrtno stalnom akceleracijom. Za 2 sekunde prijeđe put od 15 m. U iduće 2 sekunde prijeđe put od 27 m. Kolika je akceleracija tijela?

A.  $1 \frac{m}{s^2}$       B.  $4 \frac{m}{s^2}$       C.  $3 \frac{m}{s^2}$       D.  $2 \frac{m}{s^2}$

**Rezultat:** C.

## 8.

**Zadatak 843 (Ana, gimnazija)**

Sa žlijeba na krovu kuće svakih 0.2 s padne kap vode. Koliko će međusobno biti udaljene prve četiri kapi 2 s pošto je počela padati prva kap? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

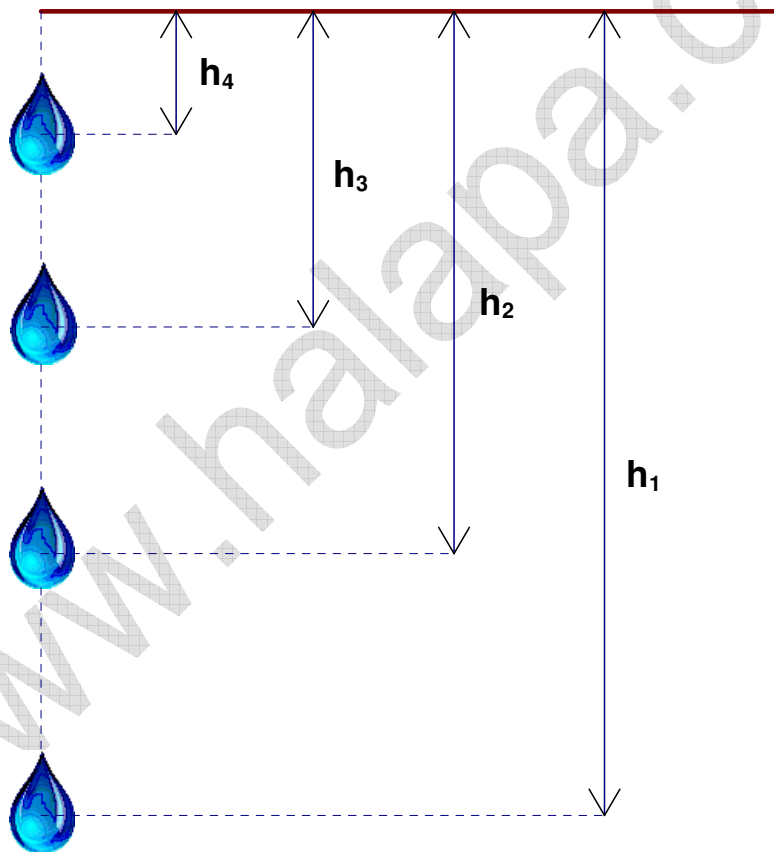
**Rješenje 843**

$$\Delta t = 0.2 \text{ s}, \quad t_1 = 2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \Delta h_{12} = ?, \quad \Delta h_{23} = ?, \quad \Delta h_{34} = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je  $h$  visina pada.

**Prva kap**

Vrijeme padanja prve kapi je  $t_1 = 2 \text{ s}$ .

Nakon tog vremena ona će prijeći put  $h_1$ .

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2 = 19.62 \text{ m}.$$

**Druga kap**

Vrijeme padanja druge kapi je  $t_2 = t_1 - \Delta t = 2 \text{ s} - 0.2 \text{ s} = 1.8 \text{ s}$ .

Nakon tog vremena ona će prijeći put  $h_2$ .

$$h_2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (1.8 s)^2 = 15.89 m.$$

**Treća kap**

Vrijeme padanja treće kapi je  $t_3 = t_1 - 2 \cdot \Delta t = 2 s - 2 \cdot 0.2 s = 1.6 s$ .

Nakon tog vremena ona će prijeći put  $h_3$ .

$$h_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_3^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (1.6 s)^2 = 12.56 m.$$

**Četvrta kap**

Vrijeme padanja četvrte kapi je  $t_4 = t_1 - 3 \cdot \Delta t = 2 s - 3 \cdot 0.2 s = 1.4 s$ .

Nakon tog vremena ona će prijeći put  $h_4$ .

$$h_4 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_4^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot (1.4 s)^2 = 9.61 m.$$

Njihove međusobne udaljenosti redom su:

- $\Delta h_{12} = h_1 - h_2 = 19.62 m - 15.89 m = 3.73 m$
- $\Delta h_{23} = h_2 - h_3 = 15.89 m - 12.56 m = 3.33 m$
- $\Delta h_{34} = h_3 - h_4 = 12.56 m - 9.61 m = 2.95 m.$

**Vježba 843**

Odmor!

**Rezultat:** ...

## 9.

### Zadatak 841 (Felix, gimnazija)

Tijelo pada slobodno s tornja visokoga 150 m. Razdijelite tu visinu u 2 takva dijela tako da za svaki dio tijelu treba jednako vrijeme. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 841

$$h = 150 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h_1 = ?, \quad h_2 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je  $h$  visina pada.

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0 \text{ m/s}$  i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Za slobodni pad vrijedi izraz

$$v = g \cdot t,$$

gdje je  $v$  trenutačna brzina,  $t$  vrijeme pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom  $v_0$  i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina)  $h$  dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$



1. inačica

Najprije odredimo vrijeme za koje tijelo prevali čitav put  $h$ .

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 5.53 \text{ s}.$$

### Prva polovina vremena

U prvoj polovini vremena tijelo prevali put  $h_1$ .

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{5.53 \text{ s}}{2}\right)^2 = 37.5 \text{ m}.$$

### Druga polovina vremena

U drugoj polovini vremena tijelo prevali put  $h_2$ .

$$h_2 = h - h_1 = 150 \text{ m} - 37.5 \text{ m} = 112.5 \text{ m}.$$

2. inačica

Na kraju prve polovine vremena tijelo ima brzinu

$$v_0 = g \cdot \frac{t}{2}.$$

Drugu polovinu vremena ono slobodno pada s početnom brzinom  $v_0$  pa prevaljeni put  $h_2$ , u drugoj polovini vremena, iznosi:

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= g \cdot \frac{t}{2} \\ h_2 &= v_0 \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_2 = g \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 \Rightarrow h_2 = g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow h_2 &= \frac{3}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(\frac{5.53 s}{2}\right)^2 = 112.5 m.$$

**Vježba 841**

Tijelo pada slobodno s tornja visokoga 180 m. Razdijelite tu visinu u 2 takva dijela tako da za svaki dio tijelu treba jednako vrijeme. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 45.03 m, 134.97 m.

## 10.

**Zadatak 842 (Felix, gimnazija)**

Kaskaderski automobil duljine 4 m zalijeće se s visine 3 m preskačući jarak širine 12 m. Kolika je najmanja brzina kojom automobil može preskočiti jarak? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 842**

$$d_1 = 4 \text{ m}, \quad h = 3 \text{ m}, \quad d_2 = 12 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

**Horizontalni hitac** je gibanje koje se sastoji od jednolikoga gibanja u horizontalnom smjeru brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Domet hica  $d$  računa se po formuli

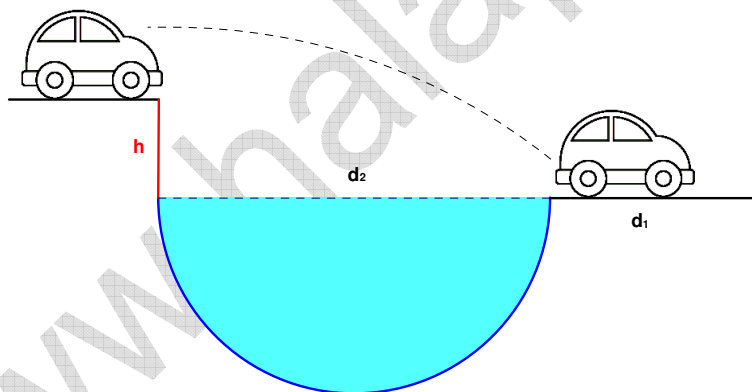
$$d = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je  $g$  ubrzanje slobodnog pada,  $h$  visina s koje je tijelo izbačeno u horizontalnom smjeru brzinom  $v_0$ . Domet je put u horizontalnom smjeru prijeđen za vrijeme padanja tereta.



Preoblikujemo formulu za domet hica.

$$d = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \Rightarrow v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = d \Rightarrow v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = d / \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \Rightarrow v_0 = d \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot h}}.$$



Da bi uspješno preskočio jarak automobil mora preletjeti širinu jarka  $d_2$  uvećanu za svoju duljinu  $d_1$ .

$$d = d_2 + d_1.$$

Tražena brzina iznosi:

$$\begin{aligned} v_0 = d \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot h}} &\Rightarrow [d = d_2 + d_1] \Rightarrow v_0 = (d_2 + d_1) \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot h}} = (12 \text{ m} + 4 \text{ m}) \cdot \sqrt{\frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 3 \text{ m}}} = \\ &= 20.46 \frac{\text{m}}{\text{s}} = [20.46 \cdot 3.6] = 73.66 \frac{\text{km}}{\text{h}}. \end{aligned}$$

**Vježba 842**

Kaskaderski automobil duljine 3.5 m zalijeće se s visine 3 m preskačući jarak širine 14 m. Kolika je najmanja brzina kojom automobil može preskočiti jarak? (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 80.57 km/h.