

1.

Zadatak 686 (Tom, gimnazija)

S vrha zgrade ispušten je kamen da slobodno pada. Jednu sekundu kasnije bačena je kugla početnom brzinom v_0 koja je dostigla kamen 3 s nakon njegovog ispuštanja. Kolika je početna brzina kugle? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rješenje 686

$$\Delta t = 1 \text{ s}, \quad t = 3 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v_0 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom $v_0 = 0 \text{ m/s}$ i konstantnom akceleracijom $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2,$$

gdje je h visina pada.

Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici.

Hitac prema dolje je složeno gibanje od jednolikoga gibanja brzinom v_0 i slobodnog pada u istom smjeru, stoga je put (visina) h dan izrazom

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$



Neka je t vrijeme padanja kamena. Tada je $t - \Delta t$ vrijeme padanja kugle. Prijedeni put:

- kamena je

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

- kugle je

$$h_2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2.$$

Budući da kugla dostigne kamen, prijeći će jednake putove.

$$h_1 = h_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot (t - \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - \Delta t)^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot (t - \Delta t)^2 \Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot (t^2 - 2 \cdot t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot t^2 - 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \cdot t^2 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) + g \cdot t^2 - 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow 0 = 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) - 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) - 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t + g \cdot (\Delta t)^2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) = 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot v_0 \cdot (t - \Delta t) = 2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2 \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow v_0 = \frac{2 \cdot g \cdot t \cdot \Delta t - g \cdot (\Delta t)^2}{2 \cdot (t - \Delta t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{g \cdot \Delta t \cdot (2 \cdot t - \Delta t)}{2 \cdot (t - \Delta t)} = \frac{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} \cdot (2 \cdot 3 \text{ s} - 1 \text{ s})}{2 \cdot (3 \text{ s} - 1 \text{ s})} = 12.26 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vježba 686

S vrha zgrade ispušten je kamen da slobodno pada. Jednu sekundu kasnije bačena je kugla početnom brzinom v_0 koja je dostigla kamen 4 s nakon njegovog ispuštanja. Kolika je početna brzina kugle? (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Rezultat: 11.45 m/s.

2.

Zadatak 524 (Dea , tehnička škola)

Pri temperaturi 0 °C na metalnom štapu su urezane dvije tanke crte. Razmak između crta iznosio je 100.00 cm. Kada se štap zagrije do 100 °C, razmak između crta iznosi 100.18 cm. Koliki je koeficijent linearnog rastezanja metala od kojeg je štap napravljen?

Rješenje 524

$$l_0 = 100.00 \text{ cm}, \quad t = 100 \text{ }^\circ\text{C}, \quad l_t = 100.18 \text{ cm}, \quad \beta = ?$$

Kad štapu nekog čvrstog tijela, koji prema dogovoru pri 0 °C ima duljinu l_0 , povisimo temperaturu za t (od 0 °C do t), on će se produžiti za:

$$\Delta l = \beta \cdot l_0 \cdot t,$$

gdje je β koeficijent linearnog rastezanja koji se definira izrazom:

$$\beta = \frac{l_t - l_0}{l_0 \cdot t}.$$

Iz izraza za β slijedi da će nakon zagrijavanja duljina štapa biti jednaka:

$$l_t = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t).$$

Taj izraz vrijedi i za kubično rastezanje tekućine, kao i za šuplja čvrsta tijela.

Temperaturna razlika od 1 K jednaka je temperaturnoj razlici od 1 °C, što izražavamo jednadžbom:

$$\Delta T \text{ (K)} = \Delta t \text{ (}^\circ\text{C)}.$$



$$\beta = \frac{l_t - l_0}{l_0 \cdot t} = \frac{100.18 \text{ cm} - 100.00 \text{ cm}}{100.00 \text{ cm} \cdot 100 \text{ }^\circ\text{C}} = 1.8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} = 1.8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}.$$

Vježba 524

Pri temperaturi 0 °C na metalnom štapu su urezane dvije tanke crte. Razmak između crta iznosio je 200.00 cm. Kada se štap zagrije do 100 °C, razmak između crta iznosi 200.38 cm. Koliki je koeficijent linearnog rastezanja metala od kojeg je štap napravljen?

Rezultat: $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

3.

Zadatak 235 (Luka, gimnazija)

Tijelo prijeđe polovicu puta brzinom v_0 . Preostali dio puta prijeđe brzinom v_1 za polovicu vremena i brzinom v_2 za drugu polovicu vremena. Nadi srednju brzinu na cijelom putu.

Rješenje 235

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad v = ?$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Srednja brzina tijela u vremenskom intervalu Δt jest kvocijent dijela puta Δs , što ga je tijelo prešlo za to vrijeme i vremenskog razmaka Δt :

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Srednja (ili prosječna) brzina tijela (pri nejednolikom gibanju) definira se:

$$\bar{v} = \frac{\text{prijeđeni dio puta}}{\text{pripadni dio vremena}}, \quad \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \bar{v} = \frac{\text{ukupni prijeđeni put}}{\text{ukupno vrijeme gibanja}}, \quad \bar{v} = \frac{s}{t}.$$



Prvu polovicu puta s tijelo prijeđe za vrijeme t_1 brzinom v_0 .

$$\frac{1}{2} \cdot s = v_0 \cdot t_1 \Rightarrow v_0 \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot s \Rightarrow v_0 \cdot t_1 = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{1}{v_0} \Rightarrow t_1 = \frac{s}{2 \cdot v_0}.$$

Drugu polovicu puta tijelo prevale za vrijeme t_2 , ali pola toga vremena giba se brzinom v_1 , a drugu polovicu brzinom v_2 .

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot s &= v_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot t_2 + v_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot s = v_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot t_2 + v_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t_2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s = v_1 \cdot t_2 + v_2 \cdot t_2 \Rightarrow v_1 \cdot t_2 + v_2 \cdot t_2 = s \Rightarrow (v_1 + v_2) \cdot t_2 = s \Rightarrow \\ &\Rightarrow (v_1 + v_2) \cdot t_2 = s \quad / \cdot \frac{1}{v_1 + v_2} \Rightarrow t_2 = \frac{s}{v_1 + v_2}. \end{aligned}$$

Srednja brzina v na cijelom putu s iznosi:

$$\begin{aligned} v = \frac{s}{t_1 + t_2} &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{s}{2 \cdot v_0} \\ t_2 = \frac{s}{v_1 + v_2} \end{array} \right] \Rightarrow v = \frac{s}{\frac{s}{2 \cdot v_0} + \frac{s}{v_1 + v_2}} \Rightarrow v = \frac{s}{s \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot v_0} + \frac{1}{v_1 + v_2} \right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \frac{s}{s \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot v_0} + \frac{1}{v_1 + v_2} \right)} \Rightarrow v = \frac{1}{\frac{1}{2 \cdot v_0} + \frac{1}{v_1 + v_2}} \Rightarrow v = \frac{1}{\frac{v_1 + v_2 + 2 \cdot v_0}{2 \cdot v_0 \cdot (v_1 + v_2)}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v = \frac{1}{\frac{v_1 + v_2 + 2 \cdot v_0}{2 \cdot v_0 \cdot (v_1 + v_2)}} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot v_0 \cdot (v_1 + v_2)}{v_1 + v_2 + 2 \cdot v_0}. \end{aligned}$$

Vježba 235

Odmor!

Rezultat: ...

www.halapa.com

4.

Zadatak 685 (Tonka, gimnazija)

Autobus se giba iza kamiona na razmaku $d = 20$ m. Oba vozila imaju jednaku brzinu $v_0 = 36$ km/h. U trenutku kad autobus ubrza akceleracijom $a_1 = 0.8$ m/s² da bi pretekao kamion, kamion ubrza akceleracijom $a_2 = 0.4$ m/s².

1. Odredi kada će autobus dostići kamion.
2. Koliki će put autobus pritom prevaliti?

Rješenje 685

$$d = 20 \text{ m}, \quad v_0 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad a_1 = 0.8 \text{ m/s}^2, \quad a_2 = 0.4 \text{ m/s}^2,$$

$$t = ?, \quad s = ?$$

Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom v_0 vrijedi formula za put s :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$



1.

Kamion se giba brzinom v_0 i počinje ubrzavati akceleracijom a_2 . Za vrijeme t prijeći će put s_2 .

$$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2.$$

Autobus se giba jednakom brzinom v_0 i počinje ubrzavati akceleracijom a_1 . Za isto vrijeme t prijeći će put s_1 .

$$s_1 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2.$$

Da bi autobus za to vrijeme dostigao kamion mora prijeći razmak d i put kamiona s_2 .

$$s_1 = d + s_2 \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = d + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \Rightarrow v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = d + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = d + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = d + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2 \quad / \cdot 2 \Rightarrow a_1 \cdot t^2 = 2 \cdot d + a_2 \cdot t^2 \Rightarrow$$

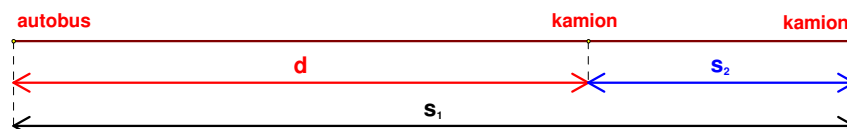
$$\Rightarrow a_1 \cdot t^2 - a_2 \cdot t^2 = 2 \cdot d \Rightarrow (a_1 - a_2) \cdot t^2 = 2 \cdot d \Rightarrow (a_1 - a_2) \cdot t^2 = 2 \cdot d \quad / \cdot \frac{1}{a_1 - a_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot d}{a_1 - a_2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot d}{a_1 - a_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \text{ m}}{0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 10 \text{ s}.$$

2.

Put koji prevali autobus iznosi:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 \text{ s})^2 = 140 \text{ m}.$$

**Vježba 685**

Autobus se giba iza kamiona na razmaku $d = 0.02$ km. Oba vozila imaju jednaku brzinu $v_0 = 36$ km/h. U trenutku kad autobus ubrza akceleracijom $a_1 = 80$ cm/s² da bi pretekao kamion, kamion ubrza akceleracijom $a_2 = 40$ cm/s². Odredi kada će autobus dostići kamion.

Rezultat: 10 s.

5.

Zadatak 471 (Dalibor, gimnazija)

Granata leti brzinom 400 m / s. Pri eksploziji razleti se u dva dijela jednakih masa. Svaki od njih nastavlja gibanje po pravcu koji zatvara kut od 30° u odnosu na početni smjer. Kolike su brzine dijelova granate?

Rješenje 471

$$v = 400 \text{ m / s}, \quad m, \quad m_1 = m_2 = \frac{1}{2} \cdot m, \quad \alpha = 30^\circ, \quad v_1 = ?, \quad v_2 = ?$$

Količinu gibanja definiramo kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Količina gibanja je vektorska veličina.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}, \quad p = m \cdot v \text{ kad računamo iznos.}$$

Zakon održanja količine gibanja

Zbroj količina gibanja dva tijela prije njihova međusobnog djelovanja jednak je zbroju njihovih količina gibanja nakon međusobnog djelovanja. To vrijedi i za više od dva tijela. Zakon održanja količina gibanja dvaju tijela masa m_1 i m_2 , kojima su početne brzine bile v_1 i v_2 , a brzine nakon njihova međusobnog djelovanja v_1' i v_2' , glasi:

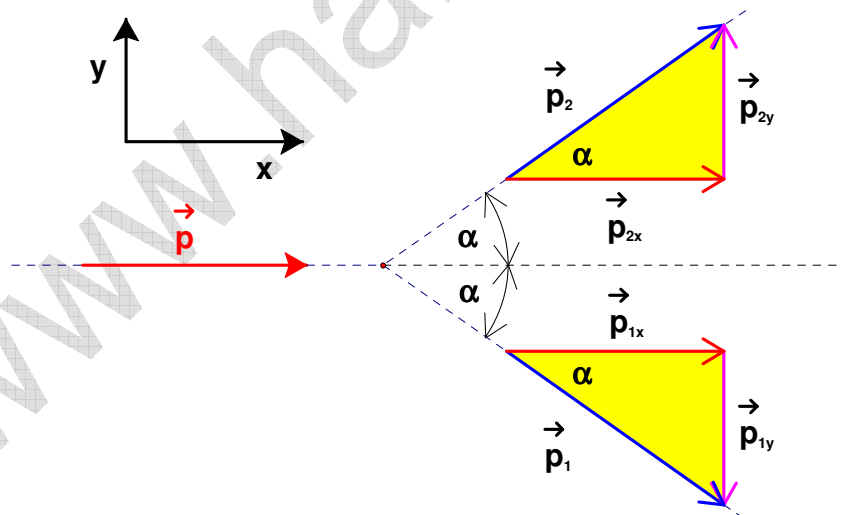
$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



Količina gibanja granate prije eksplozije je

$$p = m \cdot v.$$

Rastaviti zadani vektor na komponente znači napisati ga kao zbroj od nekoliko vektora. Svaki vektor količine gibanja dijelova granate \vec{p}_1 i \vec{p}_2 rastavit ćemo na komponente u smjeru x i y osi. Količine gibanja dijelova granate nakon eksplozije iznose:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = m_1 \cdot v_1 \\ p_2 = m_2 \cdot v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \\ p_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \end{array} \right\}$$

Njihove komponente u smjeru x i y osi glase:

$$\bullet \left. \begin{array}{l} p_{1x} = p_1 \cdot \cos \alpha \\ p_{2x} = p_2 \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_{1x} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \cos \alpha \\ p_{2x} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \cos \alpha \end{array} \right\}$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} p_{1y} = p_1 \cdot \sin \alpha \\ p_{2y} = p_2 \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_{1y} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \sin \alpha \\ p_{2y} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \sin \alpha \end{array} \right\}$$

U skalarnom zapisu zakon očuvanja količine gibanja može se zapisati pomoću dvije jednačbe:

$$p = p_{1x} + p_{2x} \quad (\text{u smjeru } x \text{ osi})$$

$$0 = -p_{1y} + p_{2y} \quad (\text{u smjeru } y \text{ osi}).$$

Iz sustava izračunamo tražene brzine.

$$\left. \begin{array}{l} p = p_{1x} + p_{2x} \\ 0 = -p_{1y} + p_{2y} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \cos \alpha \\ 0 = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot v = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \cos \alpha \quad / \cdot \frac{2}{m \cdot \cos \alpha} \\ 0 = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2 \cdot \sin \alpha \quad / \cdot \frac{2}{m \cdot \sin \alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2 \cdot v}{\cos \alpha} = v_1 + v_2 \\ 0 = -v_1 + v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot v}{\cos \alpha} = 2 \cdot v_2 \Rightarrow 2 \cdot v_2 = \frac{2 \cdot v}{\cos \alpha} \Rightarrow 2 \cdot v_2 = \frac{2 \cdot v}{\cos \alpha} \quad / : 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{v}{\cos \alpha} = \frac{400 \frac{m}{s}}{\cos 30^\circ} = 461.88 \frac{m}{s}$$

Računamo v_1 .

$$0 = -v_1 + v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 = 461.88 \frac{m}{s}$$

Vježba 471

Granata leti brzinom 0.4 km / s. Pri eksploziji razleti se u dva dijela jednakih masa. Svaki od njih nastavlja gibanje po pravcu koji zatvara kut od 60° u odnosu na početni smjer. Kolike su brzine dijelova granate?

Rezultat: $v_1 = v_2 = 800 \frac{m}{s}$

6.

Zadatak 381 (Sandra, gimnazija)

Tijelo se nalazi u tekućini gustoće ρ tako da je $\frac{1}{5}$ volumena tijela iznad površine tekućine.

Kolika je gustoća tijela?

A. $\frac{\rho}{5}$ B. $\frac{\rho}{2}$ C. $\frac{4 \cdot \rho}{5}$ D. ρ

Rješenje 381

$$\rho, \quad V, \quad \rho_1 = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (količnika) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.



Tijelo se nalazi u tekućini tako da je $\frac{1}{5}$ njegova volumena iznad površine tekućine. U tekućini nalazi se $\frac{4}{5}$ volumena.

$$V_1 = V - \frac{1}{5} \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{4}{5} \cdot V.$$

Dakle, uzgon djeluje na $\frac{4}{5}$ volumena. Ako tijelo lebdi u vodi, uzgon je jednak težini.

$$\begin{aligned} F_{uz} = G &\Rightarrow \rho \cdot g \cdot V_1 = m \cdot g \Rightarrow \rho \cdot g \cdot \frac{4}{5} \cdot V = \rho_1 \cdot V \cdot g \Rightarrow \rho \cdot g \cdot \frac{4}{5} \cdot V = \rho_1 \cdot V \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{V \cdot g} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho \cdot \frac{4}{5} = \rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{4 \cdot \rho}{5}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 381

Tijelo se nalazi u tekućini gustoće ρ tako da je $\frac{2}{5}$ volumena tijela iznad površine tekućine.

Kolika je gustoća tijela?

A. $\frac{2 \cdot \rho}{5}$ B. $\frac{3 \cdot \rho}{2}$ C. $\frac{3 \cdot \rho}{5}$ D. $3 \cdot \rho$

Rezultat: C.

www.halapa.com

7.

Zadatak 470 (Tomislav, tehnička škola)

Dizalica stalnom brzinom podiže teret mase 2 t na visinu 4 m. Koliki je uloženi rad dizalice ako je korisnost 40 %? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$).

- A. 20 kJ B. 32 kJ C. 80 kJ D. 200 kJ

Rješenje 470

$$m = 2 \text{ t} = 2000 \text{ kg}, \quad h = 4 \text{ m}, \quad \eta = 40\% = 0.40, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad W_u = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je g akceleracija slobodnog pada, a h vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu.

$$W = \Delta E.$$

Korisnost η stroja ili uređaja je količnik korisnog rada (iskorištene energije ili snage) i uloženog rada (dovedene ili uložene energije ili snage).

$$\eta = \frac{W_i}{W_u}.$$



Razlika gravitacijske potencijalne energije na visini h i na površini zemlje jednaka je obavljenom radu W_i .

$$W_i = m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot 0 \Rightarrow W_i = m \cdot g \cdot h.$$

Računamo uloženi rad W_u .

$$\eta = \frac{W_i}{W_u} \Rightarrow \eta = \frac{W_i}{W_u} \cdot \frac{W_u}{\eta} \Rightarrow W_u = \frac{W_i}{\eta} \Rightarrow W_u = \frac{m \cdot g \cdot h}{\eta} = \frac{2000 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ m}}{0.40} = 200000 \text{ J} = 200 \text{ kJ}.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 470**

Dizalica stalnom brzinom podiže teret mase 1 t na visinu 8 m. Koliki je uloženi rad dizalice ako je korisnost 40 %? (ubrzanje slobodnog pada $g = 10 \text{ m/s}^2$).

- A. 20 kJ B. 32 kJ C. 80 kJ D. 200 kJ

Rezultat: D.

8.

Zadatak 380 (Enka, gimnazija)

Kroz horizontalno položen cjevovod protječe 0.5 litara vode u sekundi. Ploštine poprečnih presjeka na dva promatrana mjesta u cjevovodu su 5 cm^2 i 1 cm^2 . Gustoća vode je 1000 kg / m^3 . Koliki se rad obavi protjecanjem vode između ta dva mjesta u minuti?

Rješenje 380

$$q = 0.5 \text{ L / s} = 0.5 \text{ dm}^3 / \text{s} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}, \quad S_1 = 5 \text{ cm}^2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \\ S_2 = 1 \text{ cm}^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad \rho = 1000 \text{ kg / m}^3, \quad t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}, \quad W = ?$$

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3, \quad 1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3.$$

Protokom volumena V tekućine od mjesta s tlakom p_1 do mjesta s tlakom p_2 obavi se rad:

$$W = (p_1 - p_2) \cdot V.$$

Jakost toka ili volumni protok fluida određuje se izrazom

$$q = \frac{V}{t} \Rightarrow V = q \cdot t,$$

gdje je V volumen koji je protekao površinom presjeka u vremenu t srednjom brzinom.

Gibanje fluida je stacionarno ako kroz bilo koji poprečni presjek cijevi za jednaki vremenski interval prođe jednaki volumen fluida. Tada vrijedi jednačba kontinuiteta

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2,$$

gdje je v_1 brzina fluida kroz presjek S_1 , v_2 brzina fluida kroz presjek S_2 .

Za stacionarni tok idealne tekućine u horizontalnoj cijevi vrijedi zakon u obliku Bernoullijeve jednačbe. Ona kaže da je zbroj statičkog i dinamičkog tlaka stalan.

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2.$$



Budući da je tok stacionaran, vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} q = S_1 \cdot v_1 \\ q = S_2 \cdot v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_1 \cdot v_1 = q \\ S_2 \cdot v_2 = q \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_1 \cdot v_1 = q \text{ } /: S_1 \\ S_2 \cdot v_2 = q \text{ } /: S_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_1 = \frac{q}{S_1} \\ v_2 = \frac{q}{S_2} \end{array} \right\}.$$

Računamo rad W .

$$\left. \begin{array}{l} V = q \cdot t \\ W = (p_1 - p_2) \cdot V \end{array} \right\} \Rightarrow W = (p_1 - p_2) \cdot q \cdot t.$$

Iz Bernoullijeve jednačbe dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \\ W = (p_1 - p_2) \cdot q \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \\ W = (p_1 - p_2) \cdot q \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) \\ W = (p_1 - p_2) \cdot q \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) \cdot q \cdot t \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q \cdot t \cdot (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 = \frac{q}{S_1} \\ v_2 = \frac{q}{S_2} \end{bmatrix} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q \cdot t \cdot \left(\left(\frac{q}{S_2} \right)^2 - \left(\frac{q}{S_1} \right)^2 \right) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q \cdot t \cdot \left(\frac{q^2}{S_2^2} - \frac{q^2}{S_1^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q \cdot t \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q^3 \cdot t \cdot \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q^3 \cdot t \cdot \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 \cdot S_2^2} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q^3 \cdot t \cdot \frac{S_1^2 - S_2^2}{(S_1 \cdot S_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)^3 \cdot 60 \text{ s} \cdot \frac{\left(5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \right)^2 - \left(1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \right)^2}{\left(5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \right)^2} = 360 \text{ J.}$$



Vježba 380

Kroz horizontalno položen cjevovod protječe 5 dl vode u sekundi. Ploštine poprečnih presjeka na dva promatrana mjesta u cjevovodu su 5 cm² i 1 cm². Gustoća vode je 1000 kg / m³. Koliki se rad obavi protjecanjem vode između ta dva mjesta u minuti?

Rezultat: 360 J.

9.

Zadatak 379 (Enka, gimnazija)

Kroz horizontalno položenu cijev koja se sužava protječe voda. Promjer šireg dijela cijevi je 8 cm, a užeg 4 cm. Razlika statičkih tlakova između užeg i šireg dijela cijevi iznosi $2 \cdot 10^4$ Pa. Koliko litara vode prostruji kroz cijev u jednoj sekundi? (gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg / m}^3$)

Rješenje 379

$$2 \cdot r_1 = 8 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}, \quad 2 \cdot r_2 = 4 \text{ cm} \Rightarrow r_2 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m},$$

$$\Delta p = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa}, \quad \rho = 1000 \text{ kg / m}^3, \quad q = ?$$

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3, \quad 1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ dm}^3.$$

Ploština kruga polumjera r dana je formulom

$$S = r^2 \cdot \pi.$$

Količinu tekućine q koja prođe u jedinici vremena s nekim presjekom cijevi površine S zovemo jakost struje. Ona iznosi

$$q = S \cdot v,$$

gdje je v brzina protjecanja.

Gibanje fluida je stacionarno ako kroz bilo koji poprečni presjek cijevi za jednaki vremenski interval prođe jednaki volumen fluida. Tada vrijedi jednadžba kontinuiteta

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2,$$

gdje je v_1 brzina fluida kroz presjek S_1 , v_2 brzina fluida kroz presjek S_2 .

Za stacionarni tok idealne tekućine u horizontalnoj cijevi vrijedi zakon u obliku Bernoullijeve jednadžbe. Ona kaže da je zbroj statičkog i dinamičkog tlaka stalan.

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2.$$



Budući da je tok stacionaran, mora biti:

$$\left. \begin{array}{l} q = S_1 \cdot v_1 \\ q = S_2 \cdot v_2 \\ p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} S_1 \cdot v_1 = q \\ S_2 \cdot v_2 = q \\ p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 \cdot v_1 = q \quad /: S_1 \\ \Rightarrow S_2 \cdot v_2 = q \quad /: S_2 \\ p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_1 = \frac{q}{S_1} \\ v_2 = \frac{q}{S_2} \\ p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow [\Delta p = p_1 - p_2] \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{q}{S_1} \\ \Rightarrow v_2 &= \frac{q}{S_2} \\ \Delta p &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\left(\frac{q}{S_2} \right)^2 - \left(\frac{q}{S_1} \right)^2 \right) \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\frac{q^2}{S_2^2} - \frac{q^2}{S_1^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q^2 \cdot \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 \cdot S_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q^2 \cdot \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 \cdot S_2^2} = \Delta p \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot q^2 \cdot \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 \cdot S_2^2} = \Delta p \cdot \frac{2 \cdot S_1^2 \cdot S_2^2}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{2 \cdot \Delta p \cdot S_1^2 \cdot S_2^2}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)} \Rightarrow q^2 = \frac{2 \cdot \Delta p \cdot S_1^2 \cdot S_2^2}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)} \sqrt{\quad} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p \cdot S_1^2 \cdot S_2^2}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = S_1 \cdot S_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)}} \Rightarrow q = r_1^2 \cdot \pi \cdot r_2^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot \left((r_1^2 \cdot \pi)^2 - (r_2^2 \cdot \pi)^2 \right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = (r_1 \cdot r_2)^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (r_1^4 \cdot \pi^2 - r_2^4 \cdot \pi^2)}} \Rightarrow q = (r_1 \cdot r_2)^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot \pi^2 \cdot (r_1^4 - r_2^4)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = (r_1 \cdot r_2)^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (r_1^4 - r_2^4)}} \Rightarrow q = (r_1 \cdot r_2)^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (r_1^4 - r_2^4)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = (r_1 \cdot r_2)^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (r_1^4 - r_2^4)}} =$$

$$= (0.04 \text{ m} \cdot 0.02 \text{ m})^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ Pa}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot ((0.04 \text{ m})^4 - (0.02 \text{ m})^4)}} =$$

$$= 8.21 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 8.21 \cdot 10^{-3} \frac{10^3 \text{ dm}^3}{\text{s}} = 8.21 \frac{\text{dm}^3}{\text{s}} = 8.21 \frac{\text{L}}{\text{s}}.$$

Vježba 379

Kroz horizontalno položenu cijev koja se sužava protječe voda. Promjer šireg dijela cijevi je 0.8 dm, a užeg 0.4 dm. Razlika statičkih tlakova između užeg i šireg dijela cijevi iznosi 20 kPa. Koliko litara vode prostruji kroz cijev u jednoj sekundi? (gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg / m}^3$)

Rezultat: 8.21 L / s.

10.

Zadatak 378 (Enka, gimnazija)

Homogeno tijelo volumena 100 cm^3 napravljeno je od tvari gustoće 3000 kg / m^3 . Tijelo pustimo u posudu s vodom čija je gustoća 1000 kg / m^3 . Kolika je akceleracija tijela pri padanju kroz vodu? Volumen tijela se ne mijenja i zanemarimo otpor pri padanju. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rješenje 378

$$V = 100 \text{ cm}^3 = 10^{-4} \text{ m}^3, \quad \rho = 3000 \text{ kg / m}^3, \quad \rho_v = 1000 \text{ kg / m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \\ a = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera (kvocijenta) mase tijela i njegova obujma (volumena):

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Uzgon je sila usmjerena prema površini tekućine, a iznos te sile jednak je težini tekućine koju je tijelo istisnulo svojim obujmom. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je ρ_t gustoća tekućine, g ubrzanje sile teže, V obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

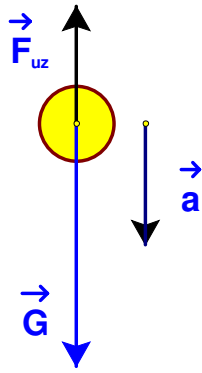
$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$



Budući da je trenje zanemareno, tijelo će se gibati pod djelovanjem rezultantne sile, sile teže G i njoj suprotne sile uzgona F_{uz} .

$$F = G - F_{uz} \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g - \rho_v \cdot g \cdot V \Rightarrow m \cdot a = m \cdot g - \rho_v \cdot g \cdot V \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = g - \frac{\rho_v \cdot g \cdot V}{m} \Rightarrow [m = \rho \cdot V] \Rightarrow a = g - \frac{\rho_v \cdot g \cdot V}{\rho \cdot V} \Rightarrow a = g - \frac{\rho_v \cdot g \cdot V}{\rho \cdot V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = g - \frac{\rho_v \cdot g}{\rho} \Rightarrow a = g \cdot \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho}\right) = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(1 - \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{3000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\right) = 6.54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

**Vježba 378**

Homogeno tijelo volumena 50 cm^3 napravljeno je od tvari gustoće 3000 kg / m^3 . Tijelo pustimo u posudu s vodom čija je gustoća 1000 kg / m^3 . Kolika je akceleracija tijela pri padanju kroz vodu? Volumen tijela se ne mijenja i zanemarimo otpor pri padanju. (ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81 \text{ m / s}^2$)

Rezultat: 6.54 m / s^2 .