

## 1.

**Zadatak 706 (Ivan, srednja škola)**

Tijelo slobodno pada i prijeđe za vrijeme  $t$  put  $s$ . Za koje će vrijeme tijelo prijeći četiri puta veći put?

A.  $4 \cdot t$       B.  $2 \cdot t$       C.  $8 \cdot t$       D.  $16 \cdot t$       E.  $\frac{t}{2}$

**Rješenje 706**

$$t, \quad s, \quad s_1 = 4 \cdot s, \quad t_1 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0$  m/s i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je  $h$  visina pada.



1. inačica

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ s_1 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 &= s \\ \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 &= s_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2} = \frac{s}{s_1} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2} = \frac{s}{s_1} \Rightarrow \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{s}{s_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{t_1}{t} \right)^2 = \frac{s_1}{s} \Rightarrow \left( \frac{t_1}{t} \right)^2 = \frac{s_1}{s} / \sqrt{\quad} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{s_1}{s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{s_1}{s}} / t \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{s_1}{s}} \cdot t \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot s}{s}} \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot s}{s}} \cdot t \Rightarrow t_1 = \sqrt{4} \cdot t \Rightarrow t_1 = 2 \cdot t.$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ s_1 &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 &= s \\ \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 &= s_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 &= s / \cdot \frac{2}{g} \\ \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 &= s_1 / \cdot \frac{2}{g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t^2 &= \frac{2 \cdot s}{g} \\ t_1^2 &= \frac{2 \cdot s_1}{g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} t^2 &= \frac{2 \cdot s}{g} / \sqrt{\quad} \\ t_1^2 &= \frac{2 \cdot s_1}{g} / \sqrt{\quad} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}} \\ t_1 &= \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{g}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{t}{t_1} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}}{\sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{g}}} \Rightarrow \frac{t}{t_1} = \sqrt{\frac{g}{2 \cdot s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{g}}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{2 \cdot s_1}{g}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{s_1}{s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{4 \cdot s}{s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{\frac{4 \cdot s}{s}} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = \sqrt{4} \Rightarrow \frac{t_1}{t} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{t} = 2 / \cdot t \Rightarrow t_1 = 2 \cdot t.$$

Odgovor je pod B.

3. inačica

Primijetimo kada tijelo slobodno pada vrijeme pada razmjerno je (proporcionalno) s kvadratnim

korijenom puta.

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = s \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = s / \cdot \frac{2}{g} \Rightarrow t^2 = \frac{2}{g} \cdot s \Rightarrow t^2 = \frac{2}{g} \cdot s / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot s} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \sim \sqrt{s}.$$

Za 4 puta veći put treba 2 puta više vremena,  $\sqrt{4} = 2$ .

Odgovor je pod B.

### Vježba 706

Tijelo slobodno pada i prijeđe za vrijeme  $t$  put  $s$ . Za koje će vrijeme tijelo prijeći šesnaest puta veći put?

- A.  $4 \cdot t$       B.  $2 \cdot t$       C.  $8 \cdot t$       D.  $16 \cdot t$       E.  $\frac{t}{2}$

**Rezultat:** A.

## 2.

**Zadatak 239 (Ivan, tehnička škola)**

Kružni vodič (prsten), polumjera 2 m, napravljen je od bakrene žice. Poprečni presjek je  $4 \text{ mm}^2$ . Priklučen je na izvor elektromotornog napona 2 V i unutarnjeg otpora  $0.1 \ \Omega$ . Kolika je magnetska indukcija u središtu vodiča? (električna otpornost bakra  $\rho = 0.0172 \cdot 10^{-6} \ \Omega \cdot \text{m}$ , permeabilnost praznine  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \ (\text{T} \cdot \text{m}) / \text{A}$ )

**Rješenje 239**

$$a = 2 \text{ m}, \quad S = 4 \text{ mm}^2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2, \quad \varepsilon = 2 \text{ V}, \quad R_u = 0.1 \ \Omega, \quad \rho = 0.0172 \cdot 10^{-6} \ \Omega \cdot \text{m}, \\ \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \ (\text{T} \cdot \text{m}) / \text{A}, \quad B = ?$$

**Ohmov zakon za cijeli strujni krug**

Kada je izvor elektromotornog napona  $\varepsilon$  priključen u strujni krug, njegov se napon raspodjeljuje na pad napona na unutarnjem otporu  $R_u$  izvora ( $I \cdot R_u$ ) i pad napona ( $I \cdot R_v$ ) u vanjskom krugu.

$$\varepsilon = I \cdot (R_u + R_v) \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_u + R_v}.$$

Električni otpor  $R$  vodiča ovisi o duljini  $l$  vodiča, njegovu presjeku  $S$  i električnoj otpornosti  $\rho$ :

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}.$$

Magnetsko polje u središtu prstena, polumjera  $a$ , kojim prolazi struja jakosti  $I$  iznosi u vakuumu:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot a}.$$

**Kružnica** je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom  $r$ .

Opseg kružnice polumjera  $r$  iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi.$$



Jakost struje kroz vodič je:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_u + R_v} \Rightarrow \left[ R_v = \rho \cdot \frac{l}{S} \right] \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_u + \rho \cdot \frac{l}{S}} \Rightarrow [l = 2 \cdot a \cdot \pi] \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_u + \rho \cdot \frac{2 \cdot a \cdot \pi}{S}} = \\ \Rightarrow I = \frac{2 \text{ V}}{0.1 \ \Omega + 0.0172 \cdot 10^{-6} \ \Omega \cdot \text{m} \cdot \frac{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \pi}{4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}} = 12.98 \text{ A}.$$

Tada magnetska indukcija iznosi:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot a} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} \cdot \frac{12.98 \text{ A}}{2 \cdot 2 \text{ m}} = 4.08 \cdot 10^{-6} \text{ T} \approx 4 \ \mu\text{T}.$$

**Vježba 239**

Kružni vodič, polumjera 20 dm, napravljen je od bakrene žice. Poprečni presjek je  $4 \text{ mm}^2$ . Priklučen je na izvor elektromotornog napona 2 V i unutarnjeg otpora  $0.1 \ \Omega$ . Kolika je magnetska indukcija u središtu vodiča? (električna otpornost bakra  $\rho = 0.0172 \cdot 10^{-6} \ \Omega \cdot \text{m}$ , permeabilnost praznine  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \ (\text{T} \cdot \text{m}) / \text{A}$ )

**Rezultat:**  $4 \ \mu\text{T}$ .

## 3.

**Zadatak 705 (MaturantPN, gimnazija)**

Pustimo li tijelo da slobodno pada, ono će pri udaru o tlo imati neku brzinu  $v$ . Koliko puta treba povećati visinu  $s$  koje tijelo slobodno pada da bi brzina pri udaru o tlo bila tri puta veća?

- A. 3 puta      B. 6 puta      C. 9 puta      D. 2 puta

**Rješenje 705**

$$h_1, \quad v_1, \quad v_2 = 3 \cdot v_1, \quad h_2 = ?$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0$  m/s i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Za slobodni pad vrijedi izraz:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $h$  visina pada.



$$\left. \begin{array}{l} v_1^2 = 2 \cdot g \cdot h_1 \\ v_2^2 = 2 \cdot g \cdot h_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot g \cdot h_1 = v_1^2 \\ 2 \cdot g \cdot h_2 = v_2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{2 \cdot g \cdot h_2}{2 \cdot g \cdot h_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow \frac{2 \cdot g \cdot h_2}{2 \cdot g \cdot h_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow h_2 = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow h_2 = \left( \frac{3 \cdot v_1}{v_1} \right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \left( \frac{3 \cdot v_1}{v_1} \right)^2 \cdot h_1 \Rightarrow h_2 = 3^2 \cdot h_1 \Rightarrow h_2 = 9 \cdot h_1.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 705**

Pustimo li tijelo da slobodno pada, ono će pri udaru o tlo imati neku brzinu  $v$ . Koliko puta treba povećati visinu  $s$  koje tijelo slobodno pada da bi brzina pri udaru o tlo bila dva puta veća?

- A. 4 puta      B. 8 puta      C. 3 puta      D. 2 puta

**Rezultat:** A.

## 4.

**Zadatak 704 (Nynns, gimnazija)**

Dva automobila međusobno su udaljena 300 m i istodobno krenu jedan drugom u susret. Prvi automobil ima početnu brzinu 72 km/h i giba se jednoliko usporeno akceleracijom  $2 \text{ m/s}^2$ . Drugi ima početnu brzinu 36 km/h i giba se stalnom akceleracijom  $2 \text{ m/s}^2$ . Za koje će se vrijeme automobili mimoići?

**Rješenje 704**

$$s = 300 \text{ m}, \quad v_1 = 72 \text{ km/h} = [72 : 3.6] = 20 \text{ m/s}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad v_2 = 36 \text{ km/h} = [36 : 3.6] = 10 \text{ m/s}, \quad a = 2 \text{ m/s}^2, \quad t = ?$$

Za jednoliko **ubrzano** pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijedi formula za put  $s$ :

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Za jednoliko **usporeno** pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0$  vrijedi formula za put  $s$ :

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$



Za vrijeme  $t$ :

- prvi automobil koji usporava akceleracijom  $a$  prijeći će put

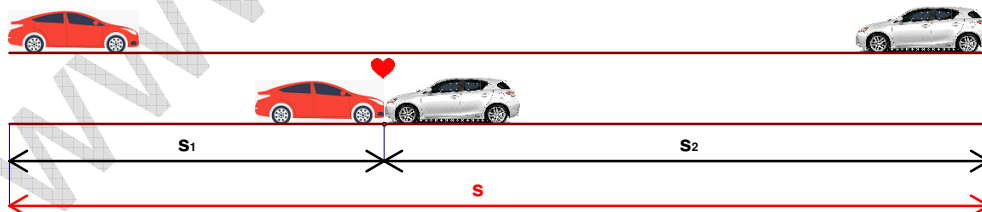
$$s_1 = v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

- drugi automobil koji ubrzava akceleracijom  $a$  prijeći će put

$$s_2 = v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Trenutak susreta određen je uvjetom.

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 = s &\Rightarrow v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s \Rightarrow v_1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = s \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = s \Rightarrow (v_1 + v_2) \cdot t = s \Rightarrow (v_1 + v_2) \cdot t = s \cdot \frac{1}{v_1 + v_2} \Rightarrow t = \frac{s}{v_1 + v_2} = \\ &= \frac{300 \text{ m}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 10 \text{ s}. \end{aligned}$$

**Vježba 704**

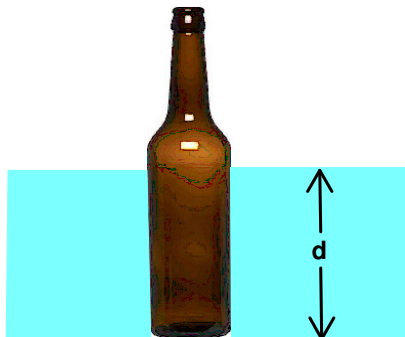
Dva automobila međusobno su udaljena 600 m i istodobno krenu jedan drugom u susret. Prvi automobil ima početnu brzinu 144 km/h i giba se jednoliko usporeno akceleracijom  $5 \text{ m/s}^2$ . Drugi ima početnu brzinu 72 km/h i giba se stalnom akceleracijom  $5 \text{ m/s}^2$ . Za koje će se vrijeme automobili mimoići?

**Rezultat:** 10 s.

## 5.

**Zadatak 299 (Ivan, gimnazija)**

Boca djelomično napunjena vodom ukupne mase 1.4 kg pliva uronjena  $d = 15$  cm ispod površine vode. Boca je izvedena iz položaja ravnoteže potiskivanjem prema dolje. Zanimajući trenje odredi periodu titranja boce. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81$  m / s<sup>2</sup>)

**Rješenje 299**

$$m = 1.4 \text{ kg}, \quad d = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m / s}^2, \quad T = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija  $g$  kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Sila koja djeluje na tijelo mase  $m$  i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je  $k$  konstanta elastičnosti,  $x$  pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta  $k$  zove se konstanta elastičnosti opruge.

Pomoću konstante elastičnosti  $k$  možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je  $\rho_t$  gustoća tekućine,  $g$  ubrzanje sile teže,  $V$  obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Upravni i kosi valjak istog polumjera baze visine  $h$  imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

$$V = S \cdot h,$$

gdje je  $S$  ploština baze.



Boca koja pliva, uronjena za  $d$  ispod površine vode, bit će potiskivanjem prema dolje za  $x$  izložena dodatnom uzgonu. Sila  $F$  koja je vraća u položaj ravnoteže jednaka je dodatnom uzgonu.

$$F = \rho_v \cdot g \cdot \Delta V \Rightarrow F = \rho_v \cdot g \cdot S \cdot x,$$

gdje je  $\rho_v$  gustoća vode, S površina poprečnog presjeka boce.

Kada boca sama pliva u vodi uronjena za d ispod površine, uzgon je jednak težini.

$$F_{uz} = G \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot S \cdot d = m \cdot g \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot S \cdot d = m \cdot g \cdot \frac{1}{g \cdot S \cdot d} \Rightarrow \rho_v = \frac{m \cdot g}{g \cdot S \cdot d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_v = \frac{m \cdot g}{g \cdot S \cdot d} \Rightarrow \rho_v = \frac{m}{S \cdot d}.$$

Sada je sila F jednaka

$$\left. \begin{array}{l} \rho_v = \frac{m}{S \cdot d} \\ F = \rho_v \cdot g \cdot S \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow F = \frac{m}{S \cdot d} \cdot g \cdot S \cdot x \Rightarrow F = \frac{m}{S \cdot d} \cdot g \cdot S \cdot x \Rightarrow F = \frac{m}{d} \cdot g \cdot x.$$

Sila F je elastična sila koja uzrokuje titranje boce pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F = k \cdot x \\ F = \frac{m}{d} \cdot g \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow k \cdot x = \frac{m}{d} \cdot g \cdot x \Rightarrow k \cdot x = \frac{m}{d} \cdot g \cdot x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow k = \frac{m}{d} \cdot g.$$

Računamo periodu T.

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{m}{d} \cdot g \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{array} \right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m}{d} \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m}{d} \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{d}{g}} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0.15 \text{ m}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.78 \text{ s.}$$

### Vježba 299

Boca djelomično napunjena vodom ukupne mase 0.8 kg pliva uronjena  $d = 1.5 \text{ dm}$  ispod površine vode. Boca je izvedena iz položaja ravnoteže potiskivanjem prema dolje. Zanemarujući trenje odredi periodu titranja boce. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

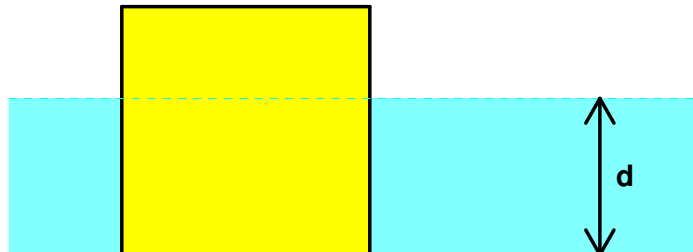


**Rezultat:** 0.78 s.

## 6.

**Zadatak 300 (Martha, srednja škola)**

Kocka stranice  $a = 10 \text{ cm}$ , načinjena od drveta gustoće  $400 \text{ kg / m}^3$ , pliva na vodi. Ako je potisnemo dublje u vodu i pustimo, ona će početi titrati. Izračunajte periodu i frekvenciju kojom titra kocka. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ , gustoća vode  $\rho_v = 1000 \text{ kg / m}^3$ )

**Rješenje 300**

$a = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$ ,  $\rho = 400 \text{ kg / m}^3$ ,  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ ,  $\rho_v = 1000 \text{ kg / m}^3$ ,  $T = ?$ ,  
 $v = ?$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija  $g$  kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracija slobodnog pada.

$$G = m \cdot g.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Sila koja djeluje na tijelo mase  $m$  i pod djelovanjem koje tijelo harmonički titra jednaka je

$$F = -k \cdot x,$$

gdje je  $k$  konstanta elastičnosti,  $x$  pomak, elongacija ili udaljenost od položaja ravnoteže. Predznak minus pokazuje da je harmonička sila suprotnog smjera od elongacije. U numeričkim izračunima dopušteno je zanemariti minus. Kada je riječ o opruzi, konstanta  $k$  zove se konstanta elastičnosti opruge.

Pomoću konstante elastičnosti  $k$  možemo izraziti periodu titranja

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Budući da tlak u tekućini ovisi o dubini, na tijelo uronjeno u tekućinu djeluje tekućina odozdo većom silom nego odozgo, tj. na tijelo djeluje uzgon. Za uzgon vrijedi Arhimedov zakon:

$$F_{uz} = \rho_t \cdot g \cdot V,$$

gdje je  $\rho_t$  gustoća tekućine,  $g$  ubrzanje sile teže,  $V$  obujam uronjenog dijela tijela. Tijelo uronjeno u tekućinu postaje lakše za iznos težine tekućine koju je istisnulo svojim obujmom. Težina tijela uronjenog u fluid manja je za silu uzgona od težine tijela u vakuumu.

Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite. Površina kvadrata duljine stranice  $a$  izračunava se po formuli

$$S = a^2.$$

Kocka (heksedar) spada u pravilne poliedre. Omeđena je sa šest sukladnih strana koje su kvadrati, ima 8 vrhova i 12 bridova.

Obujam kocke računa se po formuli

$$V = a^3, \quad V = a^2 \cdot a,$$

pri čemu je  $a$  duljina brida kocke.

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:



$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Frekvencija  $\nu$  je broj ophoda (titraja) u jedinici vremena (u 1 sekundi). Perioda  $T$  je vrijeme jednog ophoda (titraja). Između frekvencije  $\nu$  i periode  $T$  postoji sveza:

$$T \cdot \nu = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}.$$



Kocka koja pliva, uronjena za  $d$  ispod površine vode, bit će potiskivanjem prema dolje za  $x$  izložena dodatnom uzgonu. Sila  $F$  koja je vraća u položaj ravnoteže jednaka je dodatnom uzgonu.

$$F = \rho_v \cdot g \cdot \Delta V \Rightarrow F = \rho_v \cdot g \cdot S \cdot x,$$

gdje je  $\rho_v$  gustoća vode,  $S$  površina kvadrata.

Kada kocka sama pliva u vodi uronjena za  $d$  ispod površine, uzgon je jednak težini.

$$\begin{aligned} F_{uz} = G &\Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot S \cdot d = m \cdot g \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot S \cdot d = m \cdot g \cdot \frac{1}{g \cdot S \cdot d} \Rightarrow \rho_v = \frac{m \cdot g}{g \cdot S \cdot d} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_v = \frac{m \cdot g}{g \cdot S \cdot d} \Rightarrow \rho_v = \frac{m}{S \cdot d}. \end{aligned}$$

Sila  $F$  jednaka je

$$\left. \begin{aligned} \rho_v \cdot S &= \frac{m}{d} \\ F &= \rho_v \cdot g \cdot S \cdot x \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = \frac{m}{d} \cdot g \cdot x.$$

Sila  $F$  je elastična sila koja uzrokuje titranje kocke pa vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} F &= k \cdot x \\ F &= \frac{m}{d} \cdot g \cdot x \end{aligned} \right\} \Rightarrow k \cdot x = \frac{m}{d} \cdot g \cdot x \Rightarrow k \cdot x = \frac{m}{d} \cdot g \cdot x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow k = \frac{m}{d} \cdot g.$$

Sada nađemo  $d$ .

Kada kocka sama pliva u vodi uronjena za  $d$  ispod površine, uzgon je jednak težini.

$$\begin{aligned} F_{uz} = G &\Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot S \cdot d = m \cdot g \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot a^2 \cdot d = \rho \cdot V \cdot g \Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot a^2 \cdot d = \rho \cdot a^3 \cdot g \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_v \cdot g \cdot a^2 \cdot d = \rho \cdot a^3 \cdot g \cdot \frac{1}{\rho_v \cdot g \cdot a^2} \Rightarrow d = \frac{\rho \cdot a}{\rho_v}. \end{aligned}$$

Računamo periodu  $T$ .

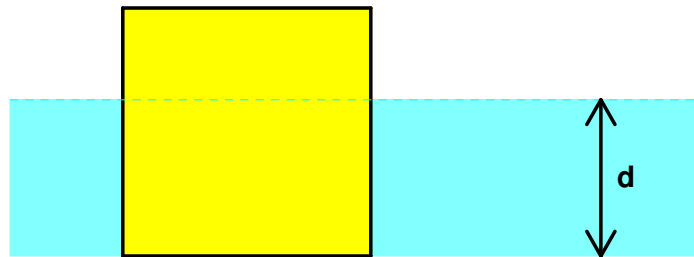
$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} k &= \frac{m}{d} \cdot g \\ T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m}{d} \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{\frac{m}{d} \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{d}{g}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[ d = \frac{\rho \cdot a}{\rho_v} \right] \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot a}{\rho_v \cdot g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot a}{\rho_v \cdot g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.10 \text{ m}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0.40 \text{ s}. \end{aligned}$$

Frekvencija iznosi:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.40 \text{ s}} = 2.5 \text{ Hz}.$$

### Vježba 300

Kocka stranice  $a = 1 \text{ dm}$ , načinjena od drveta gustoće  $400 \text{ kg / m}^3$ , pliva na vodi. Ako je potisnemo dublje u vodu i pustimo, ona će početi titrati. Izračunajte periodu kojom titra kocka. (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m / s}^2$ , gustoća vode  $\rho_v = 1000 \text{ kg / m}^3$ )



**Rezultat:** 0.40 s.

www.halapa.com

## 7.

**Zadatak 274 (Asterix, gimnazija)**

Mala plastična kuglica mase  $m$  nabijena nabojem  $Q$  lebdi između horizontalno postavljenih ploča koje su priključene na napon od 500 V. Kuglica se nadomjesti drugom dvostruko veće mase  $2 \cdot m$  pa se napon između ploča poveća na 2000 V. Uzgon zanemarite. Koliki je naboj kuglice ako i ona lebdi?

A.  $Q$       B.  $2 \cdot Q$       C.  $\frac{Q}{2}$       D.  $\frac{Q}{4}$

**Rješenje 274**

$$m, \quad Q, \quad U = 500 \text{ V}, \quad m_1 = 2 \cdot m, \quad U_1 = 2000 \text{ V}, \quad Q_1 = ?$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovu poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

Ako se u polju jakosti  $E$  nalazi naboj  $Q$ , silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

Polje između dviju nabijenih paralelnih ploča udaljenosti  $d$  između kojih je napon  $U$  ima svuda jednaku jakost i paralelne silnice, a naziva se **homogeno** polje.

$$E = \frac{U}{d}.$$



Sila  $F$ , kojom na kuglicu mase  $m$  i naboja  $Q$  djeluje električno polje  $E$ , uravnotežava težinu  $G$  kuglice.

$$F = G \Rightarrow Q \cdot E = m \cdot g \Rightarrow Q \cdot \frac{U}{d} = m \cdot g \Rightarrow Q \cdot \frac{U}{d} = m \cdot g \quad / \cdot d \Rightarrow Q \cdot U = m \cdot g \cdot d.$$

Sila  $F_1$ , kojom na kuglicu mase  $m_1$  i naboja  $Q_1$  djeluje električno polje  $E_1$ , uravnotežava težinu  $G_1$  kuglice.

$$F_1 = G_1 \Rightarrow Q_1 \cdot E_1 = m_1 \cdot g \Rightarrow Q_1 \cdot \frac{U_1}{d} = 2 \cdot m \cdot g \Rightarrow Q_1 \cdot \frac{U_1}{d} = 2 \cdot m \cdot g \quad / \cdot d \Rightarrow Q_1 \cdot U_1 = 2 \cdot m \cdot g \cdot d.$$

Iz sustava dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} Q \cdot U = m \cdot g \cdot d \\ Q_1 \cdot U_1 = 2 \cdot m \cdot g \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{Q_1 \cdot U_1}{Q \cdot U} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot d}{m \cdot g \cdot d} \Rightarrow \frac{Q_1 \cdot U_1}{Q \cdot U} = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot d}{m \cdot g \cdot d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1 \cdot U_1}{Q \cdot U} = 2 \Rightarrow \frac{Q_1 \cdot U_1}{Q \cdot U} = 2 \quad / \cdot \frac{Q \cdot U}{U_1} \Rightarrow Q_1 = 2 \cdot \frac{Q \cdot U}{U_1} \Rightarrow Q_1 = 2 \cdot \frac{Q \cdot 500 \text{ V}}{2000 \text{ V}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{Q \cdot 1000 \text{ V}}{2000 \text{ V}} \Rightarrow Q_1 = \frac{Q \cdot 1000 \text{ V}}{2000 \text{ V}} \Rightarrow Q_1 = \frac{Q}{2}.$$

Odgovor je pod C.

### Vježba 274

Mala plastična kuglica mase  $m$  nabijena nabojem  $Q$  lebdi između horizontalno postavljenih ploča koje su priključene na napon od 1000 V. Kuglica se nadomjesti drugom dvostruko veće mase  $2 \cdot m$  pa se napon između ploča poveća na 4000 V. Uzgon zanemarite. Koliki je naboj kuglice ako i ona lebdi?

- A.  $Q$       B.  $2 \cdot Q$       C.  $\frac{Q}{2}$       D.  $\frac{Q}{4}$

**Rezultat:** C.

www.halapa.com

## 8.

**Zadatak 703 (Josipa, gimnazija)**

Tijelo A bačeno je vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0$ . Tijelo B pada po istom pravcu s visine  $d$  početnom brzinom 0. Nađi funkciju koja prikazuje ovisnost udaljenosti  $y$  između tijela A i B u ovisnosti o vremenu  $t$  ako pretpostavimo da su se tijela počela gibati istodobno.

**Rješenje 703**

$$v_0, \quad g, \quad y = ?$$

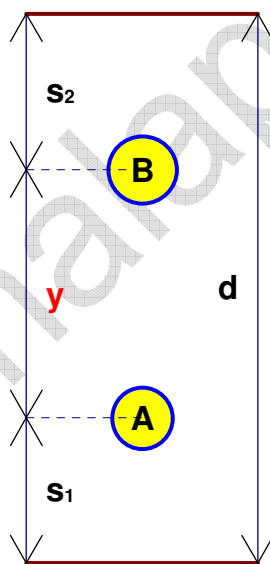
Složena gibanja pri kojima jednu komponentu gibanja uzrokuje djelovanje sile teže zovu se hici. Vertikalni hitac prema gore sastoji se od jednolikoga gibanja prema gore brzinom  $v_0$  i slobodnog pada. Zato je put  $h$  u času kad je prošlo vrijeme  $t$  dan ovim izrazom:

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Slobodni pad je jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje sa početnom brzinom  $v_0 = 0$  m/s i konstantnom akceleracijom  $a = g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. Za slobodni pad vrijede izrazi:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}},$$

gdje je  $h$  visina pada.



Za vrijeme  $t$ :

- tijelo A, koje je bačeno vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0$ , prijeđe put

$$s_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

- tijelo B, koje slobodno pada s visine  $d$ , prijeđe put

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Udaljenost između oba tijela jest  $y$ :

$$\begin{aligned} s_1 + y + s_2 &= d \Rightarrow y = d - s_1 - s_2 \Rightarrow y = d - \left( v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= d - v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow y = d - v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow y = d - v_0 \cdot t. \end{aligned}$$

**Vježba 703**

Odmor!

**Rezultat:** ...

www.halapa.com

## 9.

**Zadatak 233 (Asterix, gimnazija)**

Kada elektromagnetsko zračenje valne duljine 350 nm obasjava površinu natrija, emitirani fotoelektroni imaju maksimalnu kinetičku energiju 1.31 eV. Koliki je izlazni rad za natrij? (Planckova konstanta  $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , brzina svjetlosti u praznini  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ )

**Rješenje 233**

$$\lambda = 350 \text{ nm} = 3.50 \cdot 10^{-7} \text{ m}, \quad E_{k\max} = 1.31 \text{ eV} = [1.31 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}] = 2.10 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad W = ?$$

Elektronvolt (eV) je jedinica za energiju. Energiju 1 eV dobije čestica nabijena istim električnim nabojem kao što ga ima elektron ( $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ) kad prođe električnim poljem razlike potencijala 1 V:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Fotoelektrični učinak pojava je izbijanja elektrona pomoću svjetlosti (elektromagnetskog zračenja) iz kovina. Kad fotoni energije

$$E_f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

padnu na neku kovinu, oni uz određene uvjete izbijaju elektrone iz kovine. To je fotoelektrični efekt. Pritom se energija fotona utroši dijelom na izbijanje elektrona iz kovine, a dijelom ta energija prelazi u kinetičku energiju elektrona pa vrijedi:

$$E_f = W + E_{k,\max}$$

gdje je  $E_{k,\max}$  kinetička energija izbijenog elektrona, a  $W$  izlazni rad. Formula se može i ovako napisati:

$$h \cdot \nu = E_k + W, \quad h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_k + W,$$

gdje je  $h$  Planckova konstanta,  $\nu$  frekvencija,  $E_k$  kinetička energija izbijenog elektrona,  $W$  izlazni rad,  $c$  brzina svjetlosti,  $\lambda$  valna duljina.

Računamo izlazni rad  $W$ .



$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_k + W \Rightarrow E_k + W = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow W = h \cdot \frac{c}{\lambda} - E_k =$$

$$= 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3.50 \cdot 10^{-7} \text{ m}} - 2.10 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3.58 \cdot 10^{-19} \text{ J} =$$

$$= [3.58 \cdot 10^{-19} : 1.602 \cdot 10^{-19}] = 2.23 \text{ eV}.$$

**Vježba 233**

Odmor!

**Rezultat:** ...

## 10.

**Zadatak 238 (Zvonimir, tehnička škola)**

Pri temperaturi 20 °C i naponu 60 V zavojnicom teče struja 5 A. Nakon što se namotaji zagriju, uz isti napon teče struja 4.8 A. Temperaturni koeficijent za bakar iznosi  $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Kolika je radna temperatura?

**Rješenje 238**

$$t_1 = 20 \text{ °C}, \quad U = 60 \text{ V}, \quad I_1 = 5 \text{ A}, \quad I_2 = 4.8 \text{ A}, \quad \alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}, \quad t_2 = ?$$

Ako je otpor vodiča uz stalnu temperaturu stalan, kažemo da za vodič vrijedi Ohmov zakon:

$$I = \frac{U}{R} \Rightarrow R = \frac{U}{I}.$$

Električni otpor vodiča mijenja se s temperaturom prema zakonu

$$R_t = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t),$$

gdje je  $R_0$  otpor pri 0 °C,  $R_t$  otpor pri temperaturi  $t$  i  $\alpha$  temperaturni (termički) koeficijent otpora pri 0 °C za vodič.

Otpor vodiča raste s temperaturom za približno  $\alpha \cdot R_1$  za svaki stupanj. Ako je  $R_1$  otpor na temperaturi  $t_1$  onda je otpor na temperaturi  $t_2 = t_1 + \Delta t$ :

$$R_2 = R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t).$$

Temperaturna razlika od 1 K jednaka je temperaturnoj razlici od 1 °C, što izražavamo jednadžbom:

$$\Delta T (\text{K}) = \Delta t (\text{°C}).$$



1. inačica

Najprije odredimo otpore u zavojnici kada njome, uz isti napon  $U$ , teku struje  $I_1$  i  $I_2$ .

$$R_1 = \frac{U}{I_1}, \quad R_2 = \frac{U}{I_2}.$$

Računamo povećanje temperature  $\Delta t$ .

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \Rightarrow R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) = R_2 \Rightarrow R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) = R_2 \cdot \frac{1}{R_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + \alpha \cdot \Delta t = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \alpha \cdot \Delta t = \frac{R_2}{R_1} - 1 \Rightarrow \alpha \cdot \Delta t = \frac{R_2}{R_1} - 1 \cdot \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Radna temperatura  $t_2$  iznosi:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t \Rightarrow t_2 = \Delta t + t_1 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) + t_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} R_2 = \frac{U}{I_2} \\ R_1 = \frac{U}{I_1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{\frac{U}{I_2}}{\frac{U}{I_1}} - 1 \right) + t_1 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) + t_1 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{I_1}{I_2} - 1 \right) + t_1 =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}} \cdot \left( \frac{5 \text{ A}}{4.8 \text{ A}} - 1 \right) + 20 \text{ °C} = 30.42 \text{ °C}.$$



## 2. inačica

Najprije odredimo otpore u zavojnici kada njome, uz isti napon  $U$ , teku struje  $I_1$  i  $I_2$ .

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{60 \text{ V}}{5 \text{ A}} = 12 \Omega \quad , \quad R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{60 \text{ V}}{4.8 \text{ A}} = 12.5 \Omega.$$

Računamo povećanje temperature  $\Delta t$ .

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \Rightarrow R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) = R_2 \Rightarrow R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) = R_2 \cdot \frac{1}{R_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + \alpha \cdot \Delta t &= \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \alpha \cdot \Delta t = \frac{R_2}{R_1} - 1 \Rightarrow \alpha \cdot \Delta t = \frac{R_2}{R_1} - 1 \cdot \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \left( \frac{R_2}{R_1} - 1 \right) = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}} \cdot \left( \frac{12.5 \text{ A}}{12 \text{ A}} - 1 \right) = 10.42 \text{ }^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Radna temperatura  $t_2$  iznosi:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 - t_1 = \Delta t \Rightarrow t_2 = \Delta t + t_1 = 10.42 \text{ }^\circ\text{C} + 20 \text{ }^\circ\text{C} = 30.42 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**Vježba 238**

Pri temperaturi  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  i naponu  $120 \text{ V}$  zavojnicom teče struja  $10 \text{ A}$ . Nakon što se namotaji zagriju, uz isti napon teče struja  $9.6 \text{ A}$ . Temperaturni koeficijent za bakar iznosi  $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Kolika je radna temperatura?

**Rezultat:**  $30.42 \text{ }^\circ\text{C}$ .