

### Zadatak 241 (Amira, gimnazija)

Dvije jednake kuglice, svaka mase 30 mg, vise u zraku na tankim nitima duljine 1 m. Niti slobodnim krajevima objesimo na istu točku i kuglice ostanu međusobno udaljene 7.5 cm. Odredite naboj na kuglicama (pod pretpostavkom da su međusobno jednaki). (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 241

$$m_1 = m_2 = m = 30 \text{ mg} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ kg}, \quad l = 1 \text{ m}, \quad a = 7.5 \text{ cm} = 0.075 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \\ Q_1 = Q_2 = Q = ?$$

Električna sila između dvaju točkastih naboja (Coulombov zakon) dana je relacijom:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje su  $Q_1$  i  $Q_2$  naboji,  $r$  njihova međusobna udaljenost,  $k$  konstanta u vakuumu (a praktično i u zraku). Ako su  $a$  i  $b$  brojevi, kažemo da je kvocijent  $a : b$ ,  $b \neq 0$  omjer brojeva  $a$  i  $b$ .

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad \text{i} \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera  $a$  i  $d$  jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera  $b$  i  $c$ .

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

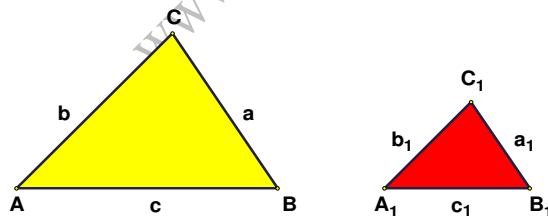
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

#### Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1, \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta  $k$  zovemo koeficijent sličnosti.



Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od  $90^\circ$ ). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

#### Pitagorin poučak

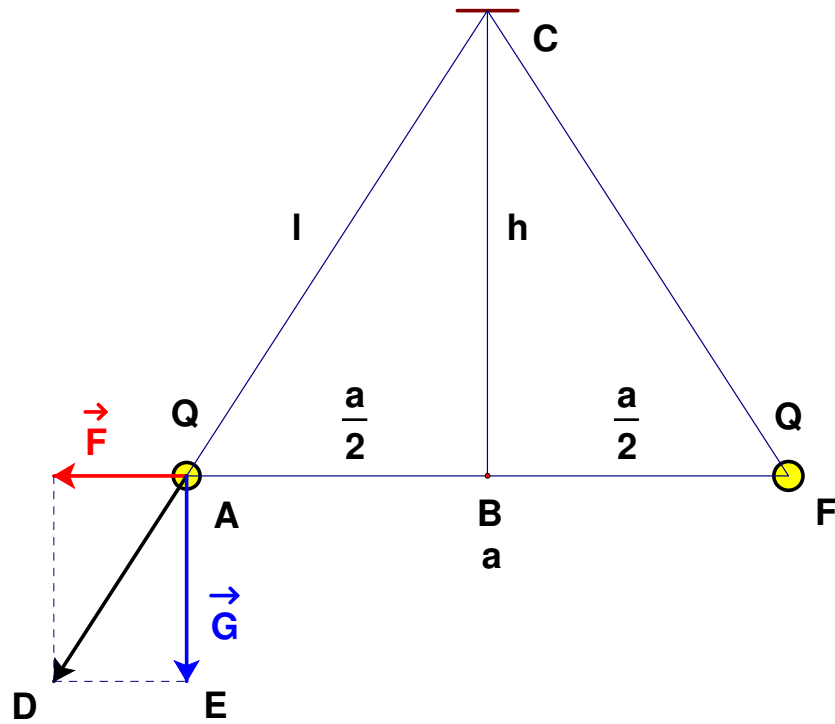
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

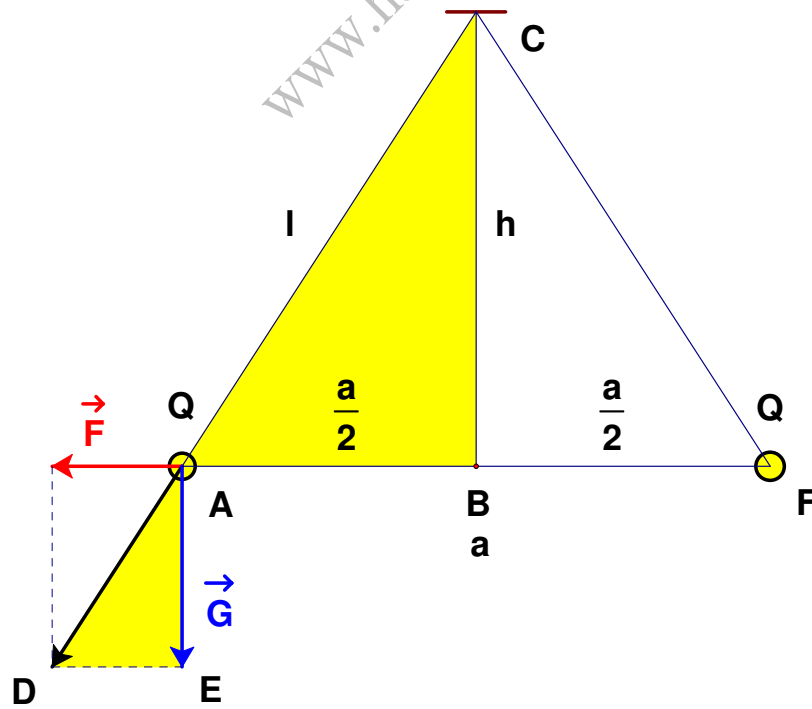
gdje je  $G$  sila teža,  $m$  masa tijela i  $g$  akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.



Sa slike vidi se:

$$|AF| = a, \quad |AB| = \frac{a}{2}, \quad |AC| = l, \quad |BC| = h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$|DE| = F, \quad |AE| = G$$



Iz sličnosti pravokutnih trokuta  $\triangle DEA$  i  $\triangle ABC$  slijedi razmjer:

$$|DE| : |AE| = |AB| : |BC| \Rightarrow F : G = \frac{a}{2} : h \Rightarrow F : G = \frac{a}{2} : \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = G \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow F \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = m \cdot g \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow F \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{m \cdot g \cdot a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{m \cdot g \cdot a}{2} / \cdot \frac{1}{\sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}} \Rightarrow F = \frac{m \cdot g \cdot a}{2 \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}}$$

Budući da je F Coulombova sila, slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{a^2} \\ F = \frac{m \cdot g \cdot a}{2 \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = k \cdot \frac{Q^2}{a^2} \\ F = \frac{m \cdot g \cdot a}{2 \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}} \end{array} \right\} \Rightarrow k \cdot \frac{Q^2}{a^2} = \frac{m \cdot g \cdot a}{2 \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot \frac{Q^2}{a^2} = \frac{m \cdot g \cdot a}{2 \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}} / \cdot \frac{a^2}{k} \Rightarrow Q^2 = \frac{m \cdot g \cdot a^3}{2 \cdot k \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{m \cdot g \cdot a^3}{2 \cdot k \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}} / \sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot a^3}{2 \cdot k \cdot \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0.075 \text{ m})^3}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \sqrt{(1 \text{ m})^2 - \frac{(0.075 \text{ m})^2}{4}}}} = 2.63 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

### Vježba 241

Dvije jednake kuglice, svaka mase 30 mg, vise u zraku na tankim nitima duljine 10 dm. Niti slobodnim krajevima objesimo na istu točku i kuglice ostanu međusobno udaljene 75 mm. Odredite naboj na kuglicama (pod pretpostavkom da su međusobno jednaki). (ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $2.63 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ .

### Zadatak 242 (Amra, gimnazija)

Dvije metalne kuglice postavljene su na udaljenosti 1 m jedna od druge. Jedna kuglica ima višak dvije milijarde elektrona, a druga manjak tri milijarde. Kolikom silom će kuglice djelovati jedna na drugu, ako ih stavimo u mlijeko,  $\epsilon_r = 66$ ? (elementarni naboj  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ )

### Rješenje 242

$$r = 1 \text{ m}, \quad n_1 = 2 \cdot 10^9, \quad n_2 = 3 \cdot 10^9, \quad \epsilon_r = 66, \quad e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad F = ?$$

### Coulombov zakon

Električna sila između dvaju točkastih naboja (Coulombov zakon) u vakuumu dana je relacijom:

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje su  $Q_1$  i  $Q_2$  naboji,  $r$  njihova međusobna udaljenost, konstanta  $k$  za vakuum

$$k = 8.99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

U sredstvu relativne permitivnosti  $\epsilon_r$  Coulombov zakon glasi

$$F = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

gdje je  $\epsilon_r$  relativna permitivnost (relativna dielektrična konstanta) koja ovisi o sredstvu u kojem se nalaze naboji. To je broj bez dimenzije koji pokazuje koliko puta je manja sila  $F$  ako se naboji nalaze u sredstvu od one u vakuumu.

**Elektron** je negativno nabijena subatomska (izgrađuje atom) čestica. Elektroni se nalaze u elektronskom omotaču atoma. Naboj jedne čestice elektrona iznosi  $-1.602 \cdot 10^{-19} C$ .

**Proton** je subatomska (izgrađuje atom) nukleonska (sastavni dio jezgre atoma) pozitivna čestica, naboja  $+1.602 \cdot 10^{-19} C$ .

Električni naboj elektrona i protona ima isti iznos:  $1.602 \cdot 10^{-19} C$ . To je najmanja količina naboja koju su fizičari dosad otkrili pokusima i zove se **elementarni naboj**. Utvrđeno je da se električni naboji javljaju samo u cjelobrojnim višekratnicima tog elementarnog naboja. Kažemo da je naboj **kvantiziran**, sastavljen od osnovnih kvanta elektriciteta

$$Q = n \cdot e,$$

gdje je  $n$  cijeli broj,  $e$  elementarni naboj.

Električni naboj jedna je od osnovnih osobina elementarnih čestica. Jedinica za električni naboj je coulomb (C). Najmanja količina električnog naboja, elementarni naboj, iznosi:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$$

Dakle, ukupni naboj bilo kojeg tijela jednak je cijelom broju pomnoženome s elementarnim nabojem. Prva kuglica ima višak  $n_1$  elektrona. Njezin je naboj negativan.

$$Q_1 = n_1 \cdot (-e) \Rightarrow Q_1 = -n_1 \cdot e.$$

Druga kuglica ima manjak  $n_2$  elektrona. Njezin je naboj pozitivan.

$$Q_2 = n_2 \cdot (+e) \Rightarrow Q_2 = n_2 \cdot e.$$

Sila kojom kuglice međusobno djeluju iznosi:

$$\begin{aligned} F &= \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \Rightarrow F = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{-n_1 \cdot e \cdot n_2 \cdot e}{r^2} \Rightarrow F = -\frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2 \cdot e^2}{r^2} \Rightarrow F = -\frac{k}{\epsilon_r} \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot \left(\frac{e}{r}\right)^2 = \\ &= -\frac{9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}}{66} \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{1.602 \cdot 10^{-19} C}{1 m}\right)^2 = -2.10 \cdot 10^{-11} N. \end{aligned}$$

Predznak sile je minus (-) jer je negativna, tj. privlačna.

### Vježba 242

Dvije metalne kuglice postavljene su na udaljenosti 10 dm jedna od druge. Jedna kuglica ima manjak dvije milijarde elektrona, a druga višak tri milijarde. Kolikom silom će kuglice djelovati jedna na drugu, ako ih stavimo u mlijeko,  $\epsilon_r = 66$ ? (elementarni naboj  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$ )

**Rezultat:**  $-2.10 \cdot 10^{-11} N$ .

### Zadatak 243 (Asterix, gimnazija)

Naboj 9 nC u glicerinu, relativne permitivnosti 39, stvara električno polje. Kolika je razlika potencijala između točaka koje su od naboja udaljene za 3 cm i za 12 cm? Koliki će rad polje obaviti ako premjestimo naboj 5 nC iz jedne točke u drugu?

### Rješenje 243

$$Q = 9 \text{ nC} = 9 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad \epsilon_r = 39, \quad r_1 = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}, \quad r_2 = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}, \\ Q_1 = 5 \text{ nC} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}, \quad U = ?, \quad W = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja  $Q$  ili nabijena kugla, onda je potencijal u točki na udaljenosti  $r$  od naboja, odnosno središta kugle, za vakuum jednak

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r},$$

gdje je

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2},$$

a u sredstvu

$$\varphi = \frac{k \cdot Q}{\epsilon_r \cdot r},$$

gdje je  $\epsilon_r$  relativna permitivnost sredstva (relativna dielektrična konstanta).

Razlika potencijala ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) naziva se naponom  $U$  i možemo ga izračunati kao

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Rad što se utroši pri prijelazu naboja  $Q$  iz točke potencijala  $\varphi_1$  u točku potencijala  $\varphi_2$  jednak je promjeni potencijalne energije naboja, tj.

$$W = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow W = Q \cdot U.$$

Računamo razliku potencijala  $U$  između točaka.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{k \cdot Q}{\epsilon_r \cdot r_1} \\ \varphi_2 = \frac{k \cdot Q}{\epsilon_r \cdot r_2} \end{array} \right\} \Rightarrow [U = \varphi_1 - \varphi_2] \Rightarrow U = \frac{k \cdot Q}{\epsilon_r \cdot r_1} - \frac{k \cdot Q}{\epsilon_r \cdot r_2} \Rightarrow U = \frac{k \cdot Q}{\epsilon_r} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \\ = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 9 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{39} \cdot \left( \frac{1}{0.03 \text{ m}} - \frac{1}{0.12 \text{ m}} \right) = 51.92 \text{ V}.$$

Rad koji će polje obaviti kada premjestimo naboj  $Q_1$  iz jedne točke u drugu iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} U = \frac{k \cdot Q}{\epsilon_r} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ W = Q_1 \cdot U \end{array} \right\} \Rightarrow W = Q_1 \cdot \frac{k \cdot Q}{\epsilon_r} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \Rightarrow W = \frac{k \cdot Q \cdot Q_1}{\epsilon_r} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \\ = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 9 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{39} \cdot \left( \frac{1}{0.03 \text{ m}} - \frac{1}{0.12 \text{ m}} \right) = 2.596 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

### Vježba 243

Naboj  $9 \text{ nC}$  u glicerinu, relativne permitivnosti  $39$ , stvara električno polje. Kolika je razlika potencijala između točaka koje su od naboja udaljene za  $30 \text{ mm}$  i za  $120 \text{ mm}$ ? Koliki će rad polje obaviti ako premjestimo naboj  $5 \text{ nC}$  iz jedne točke u drugu?

**Rezultat:**  $51.92 \text{ V}, 2.596 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$

### Zadatak 244 (Amra, gimnazija)

Metalna kugla promjera 2 cm nabijena je negativno do potencijala 1 kV. Izračunati masu svih elektrona kojima je kugla nabijena. (naboj elektrona  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  C, masa elektrona  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg)

#### Rješenje 244

$$2 \cdot r = 2 \text{ cm} \Rightarrow r = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}, \quad \varphi = 1 \text{ kV} = 1000 \text{ V}, \quad e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad m = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja  $Q$  ili nabijena kugla, onda je potencijal u točki na udaljenosti  $r$  od naboja, odnosno središta kugle, za vakuum jednak

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r},$$

gdje je

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$

Električni naboj elektrona i protona ima isti iznos:  $1.602 \cdot 10^{-19}$  C. To je najmanja količina naboja koju su fizičari dosad otkrili pokusima i zove se **elementarni naboj**. Utvrđeno je da se električni naboji javljaju samo u cjelobrojnim višekratnicima tog elementarnog naboja. Kažemo da je naboj **kvantiziran**, sastavljen od osnovnih kvantata elektriciteta

$$Q = n \cdot e,$$

gdje je  $n$  cijeli broj,  $e$  elementarni naboj.

Električni naboj jedna je od osnovnih osobina elementarnih čestica. Jedinica za električni naboj je coulomb (C). Najmanja količina električnog naboja, elementarni naboj, iznosi:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Dakle, ukupni naboj bilo kojeg tijela jednak je cijelom broju pomnoženome s elementarnim nabojem. Najprije odredimo broj svih elektrona  $n$  kojima je kugla nabijena.

$$\left. \begin{array}{l} Q = n \cdot e \\ \varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = n \cdot e \\ k \cdot \frac{Q}{r} = \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = n \cdot e \\ k \cdot \frac{Q}{r} = \varphi \cdot \frac{r}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = n \cdot e \\ Q = \varphi \cdot \frac{r}{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow n \cdot e = \varphi \cdot \frac{r}{k} \Rightarrow n \cdot e = \varphi \cdot \frac{r}{k} \cdot \frac{1}{e} \Rightarrow n = \frac{\varphi \cdot r}{k \cdot e}.$$

Masa svih  $n$  elektrona iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} n = \frac{\varphi \cdot r}{k \cdot e} \\ m = n \cdot m_e \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{\varphi \cdot r}{k \cdot e} \cdot m_e = \frac{1000 \text{ V} \cdot 0.01 \text{ m}}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 6.32 \cdot 10^{-21} \text{ kg}.$$

#### Vježba 244

Metalna kugla promjera 20 mm nabijena je negativno do potencijala 1 kV. Izračunati masu svih elektrona kojima je kugla nabijena. (naboj elektrona  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  C, masa elektrona  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg)

**Rezultat:**  $6.32 \cdot 10^{-21} \text{ kg}$ .

### Zadatak 245 (Tonka, gimnazija)

Dva naboja  $Q_1 = 1.5 \cdot 10^{-8}$  C i  $Q_2 = 3 \cdot 10^{-7}$  C, nalaze se u zraku i udaljeni su međusobno  $r = 60$  cm. Kolika je jakost električnog polja u sredini između njih?

#### Rješenje 245

$$Q_1 = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad Q_2 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \quad r = 60 \text{ cm} = 0.60 \text{ m},$$

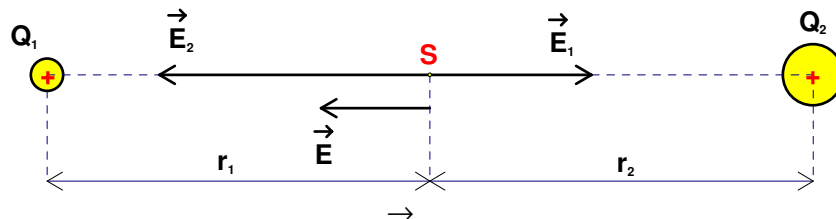
$$r_1 = r_2 = R = \frac{1}{2} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 0.60 \text{ m} = 0.30 \text{ m}, \quad E = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja  $Q$  smještena u praznini, onda je jakost električnog polja u nekoj točki polja na udaljenosti  $r$  od naboja dana (prema Coulombovu zakonu) izrazom

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2},$$

gdje je

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$



Budući da je naboj  $Q_1$  pozitivan, smjer vektora  $\vec{E}_1$  radijalno je od naboja  $Q_1$ . Budući da je naboj  $Q_2$  pozitivan, smjer vektora  $\vec{E}_2$  radijalno je od naboja  $Q_2$ . Rezultantni vektor  $\vec{E}$  jednak je razlici vektora  $\vec{E}_2$  i  $\vec{E}_1$ .

$$\vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1.$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \\ E_2 = k \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{R^2} \\ E_2 = k \cdot \frac{Q_2}{R^2} \end{array} \right\} \Rightarrow [E = E_2 - E_1] \Rightarrow E = k \cdot \frac{Q_2}{R^2} - k \cdot \frac{Q_1}{R^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \frac{k}{R^2} \cdot (Q_2 - Q_1) = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}{(0.30 \text{ m})^2} \cdot (3 \cdot 10^{-7} \text{ C} - 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ C}) = \\ &= 2.85 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ u smjeru prema naboju } Q_1. \end{aligned}$$

### Vježba 245

Dva naboja  $Q_1 = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$  i  $Q_2 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ , nalaze se u zraku i udaljeni su međusobno  $r = 6 \text{ dm}$ . Kolika je jakost električnog polja u sredini između njih?

**Rezultat:**  $2.85 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$  u smjeru prema naboju  $Q_1$ .

### Zadatak 246 (Jakov, gimnazija)

Točkasti naboj  $200 \text{ nC}$  udaljen je  $10 \text{ cm}$  od naboja  $-50 \text{ nC}$ . Koliko je električno polje na polovici njihove spojnice? Kolika je jakost polja kada bi oba naboja imala jednak predznak?

### Rješenje 246

$$Q_1 = 200 \text{ nC} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \quad r = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}, \quad Q_2 = -50 \text{ nC} = -5 \cdot 10^{-8} \text{ C},$$

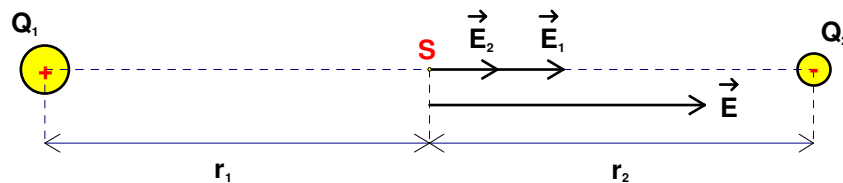
$$r_1 = r_2 = R = \frac{1}{2} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 0.10 \text{ m} = 0.05 \text{ m}, \quad E_3 = ? \quad E_4 = ? \quad E_5 = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja  $Q$  smještena u praznini, onda je jakost električnog polja u nekoj točki polja na udaljenosti  $r$  od naboja dana (prema Coulombovu zakonu) izrazom

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2},$$

gdje je

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$



Budući da je naboj  $Q_1$  pozitivan, smjer vektora  $\vec{E}_1$  radijalno je od naboja  $Q_1$ . Budući da je naboj  $Q_2$  negativan, smjer vektora  $\vec{E}_2$  radijalno je prema naboju  $Q_2$ . Rezultantni vektor  $\vec{E}$  jednak je zbroju vektora  $\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$ .

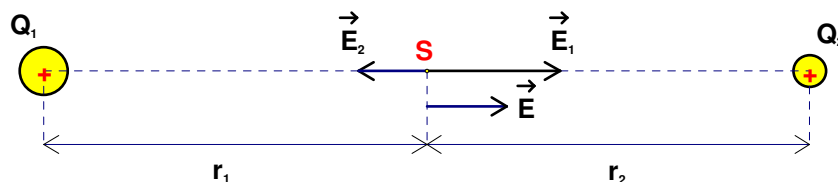
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \\ E_2 = k \cdot \frac{|Q_2|}{r_2^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{R^2} \\ E_2 = k \cdot \frac{|Q_2|}{R^2} \end{array} \right\} \Rightarrow [E = E_1 + E_2] \Rightarrow E = k \cdot \frac{Q_1}{R^2} + k \cdot \frac{|Q_2|}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{k}{R^2} \cdot (Q_1 + |Q_2|) = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}{(0.05 \text{ m})^2} \cdot (2 \cdot 10^{-7} \text{ C} + 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}) =$$

$$= 9 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ u smjeru prema naboju } Q_2.$$

Računamo jakost polja u točki S kada su oba naboja pozitivna.



Budući da je naboj  $Q_1$  pozitivan, smjer vektora  $\vec{E}_1$  radijalno je od naboja  $Q_1$ . Budući da je naboj  $Q_2$  pozitivan, smjer vektora  $\vec{E}_2$  radijalno je od naboja  $Q_2$ . Rezultantni vektor  $\vec{E}$  jednak je razlici vektora



$\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$ .

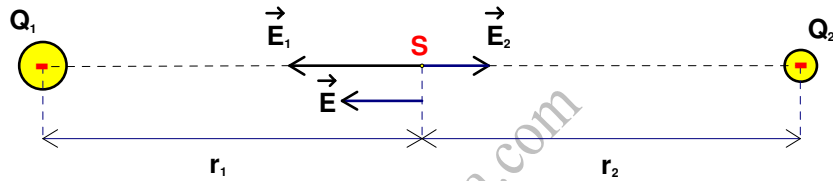
$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \\ E_2 = k \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{R^2} \\ E_2 = k \cdot \frac{Q_2}{R^2} \end{array} \right\} \Rightarrow [E = E_1 - E_2] \Rightarrow E = k \cdot \frac{Q_1}{R^2} - k \cdot \frac{Q_2}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{k}{R^2} \cdot (Q_1 - Q_2) = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}}{(0.05 \text{ m})^2} \cdot (2 \cdot 10^{-7} \text{ C} - 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}) =$$

$$= 5.4 \cdot 10^5 \frac{N}{C} \text{ u smjeru prema naboju } Q_2.$$

Računamo jakost polja u točki S kada su oba naboja negativna.



Budući da je naboj  $Q_1$  negativan, smjer vektora  $\vec{E}_1$  radijalno je prema naboju  $Q_1$ . Budući da je naboj

$Q_2$  negativan smjer vektora  $\vec{E}_2$  radijalno je prema naboju  $Q_2$ . Rezultantni vektor  $\vec{E}$  jednak je razlici

vektora  $\vec{E}_1$  i  $\vec{E}_2$ .

$$\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2.$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} \\ E_2 = k \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_1 = k \cdot \frac{Q_1}{R^2} \\ E_2 = k \cdot \frac{Q_2}{R^2} \end{array} \right\} \Rightarrow [E = E_1 - E_2] \Rightarrow E = k \cdot \frac{Q_1}{R^2} - k \cdot \frac{Q_2}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{k}{R^2} \cdot (Q_1 - Q_2) = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}}{(0.05 \text{ m})^2} \cdot (2 \cdot 10^{-7} \text{ C} - 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}) =$$

$$= 5.4 \cdot 10^5 \frac{N}{C} \text{ u smjeru prema naboju } Q_1.$$

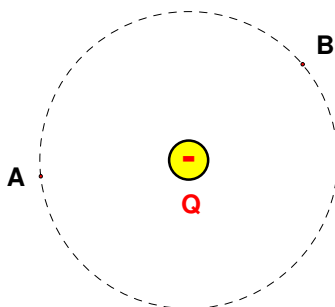
### Vježba 246

Točkasti naboj 200 nC udaljen je 1 dm od naboja – 50 nC. Koliko je električno polje na polovici njihove spojnice?

**Rezultat:**  $9 \cdot 10^5 \frac{N}{C}$  u smjeru prema naboju  $Q_2$ .

### Zadatak 247 (Ivan, gimnazija)

Je li u točkama A i B jakost električnog polja jednaka? Nacrtati vektore električnog polja u tim točkama.

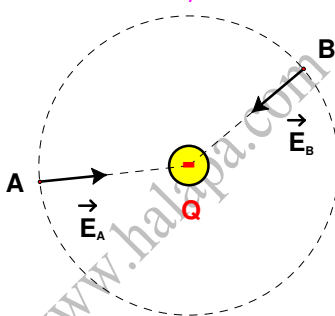


### Rješenje 247

Q,  $E_A$ ,  $E_B$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q smještena u praznini, onda je jakost električnog polja u nekoj točki polja na udaljenosti r od naboja dana (prema Coulombovu zakonu) izrazom

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$$



Budući da su točke A i B jednako udaljene od naboja Q, jakosti električnog polja jednake su po iznosu.

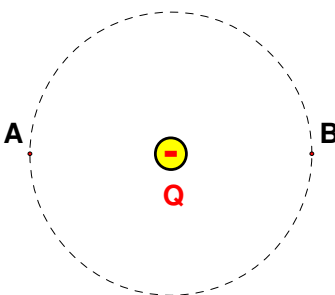
$$\left| \vec{E}_A \right| = \left| \vec{E}_B \right| \text{ ili } E_A = E_B.$$

Vektori  $\vec{E}_A$  i  $\vec{E}_B$  razlikuju se po smjeru i iznosu pa vrijedi

$$\vec{E}_A \neq \vec{E}_B.$$

### Vježba 247

Je li u točkama A i B jakost električnog polja jednaka?



**Rezultat:**  $E_A = E_B$ ,  $\vec{E}_A \neq \vec{E}_B$ .

**Zadatak 248 (Ivan, gimnazija)**

Koliki je potencijal metalne kugle obujma  $33.5 \text{ dm}^3$  koja ima naboj  $0.1 \text{ }\mu\text{C}$ ? Kugla se nalazi u vakuumu.

**Rješenje 248**

$$V = 33.5 \text{ dm}^3 = 3.35 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3, \quad Q = 0.1 \text{ }\mu\text{C} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \quad \varphi = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja  $Q$  ili nabijena kugla, onda je potencijal u točki na udaljenosti  $r$  od naboja, odnosno središta kugle, za vakuum jednak

$$\varphi = k \cdot \frac{Q}{r},$$

gdje je

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}.$$

**Obujam kugle**

Obujam (volumen) kugle polumjera  $r$  iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

$$\left. \begin{array}{l} V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \\ \varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = V \\ \varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = V \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \\ \varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r^3 = \frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} \\ \varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} r^3 = \frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi} \\ \varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} \\ \varphi = k \cdot \frac{Q}{r} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi = k \cdot \frac{Q}{\sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}} \Rightarrow \varphi = k \cdot Q \cdot \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \pi}{3 \cdot V}} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 1 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \pi}{3 \cdot 3.35 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}} = 4500.46 \text{ V} \approx 4.5 \cdot 10^3 \text{ V} = 4.5 \text{ kV}.$$

**Vježba 248**

Koliki je potencijal metalne kugle obujma  $33500 \text{ cm}^3$  koja ima naboj  $0.1 \text{ }\mu\text{C}$ ? Kugla se nalazi u vakuumu.

**Rezultat:** 4.5 kV.

**Zadatak 249 (Ivan, gimnazija)**

U šuplju kuglu, polumjera 30 cm, unesena je kuglica naboja  $0.1 \text{ }\mu\text{C}$ . Kolika je jakost električnog polja u kugli, a kolika na njezinoj površini?

**Rješenje 249**

$$r = 30 \text{ cm} = 0.30 \text{ m}, \quad Q = 0.1 \text{ }\mu\text{C} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ C}, \quad E_1 = ?, \quad E_2 = ?$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja  $Q$  smještena u praznini, onda je jakost električnog polja u nekoj točki polja na udaljenosti  $r$  od naboja dana (prema Coulombovu zakonu) izrazom

$$E = k \cdot \frac{Q}{r^2},$$

gdje je

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}.$$

U elektrostatičkim uvjetima naboj je tako raspoređen na površini kugle da je unutar nje električno polje jednako nuli. Kada bi polje bilo različito od nule potekla bi električna struja. Dakle, jakost električnog polja u šupljoj kugli jednaka je nuli.

$$E_1 = 0 \frac{N}{C}.$$

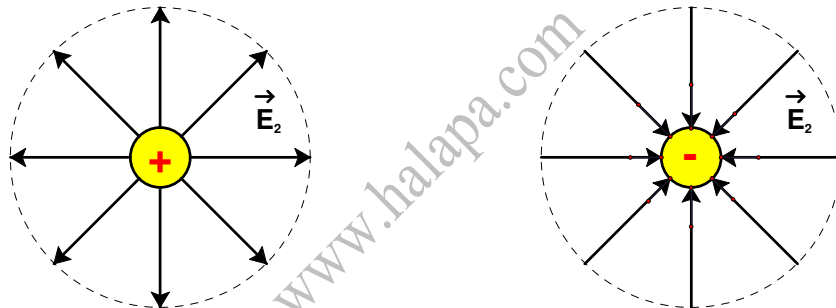
Ako u šuplju kuglu unesemo naboj Q vanjska površina kugle bit će nabijena pa jakost polja na njoj iznosi:

$$E_2 = k \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-7} C}{(0.30 m)^2} = 10000 \frac{N}{C} = 10^4 \frac{N}{C} = 10 \frac{kN}{C}.$$

Vektor polja  $\vec{E}_2$  je radijalan (okomit je na površinu kugle). Njegova orijentacija ovisi od predznaka naboja.

Ako je naboj Q pozitivan orijentacija vektora  $\vec{E}_2$  je radijalna od naboja.

Ako je naboj Q negativan orijentacija vektora  $\vec{E}_2$  je radijalna prema naboju.



### Vježba 249

U šuplju kuglu, polumjera 3 dm, unesena je kuglica naboja 0.1  $\mu C$ . Kolika je jakost električnog polja na njezinoj površini?

**Rezultat:** 10 kN / C.

### Zadatak 250 (ID, gimnazija)

Koliko ćemo puta povećati kapacitet pločastog kondenzatora ako donju polovicu njegovih ploča uronimo u vodu, a gornju polovicu ostavimo u zraku? Relativna permitivnost vode je 81. (Uputa: Uranjanjem ploča do polovice u vodu, dobivamo sustav dvaju paralelno spojenih kondenzatora kojima su površine ploča  $S / 2$ .)

### Rješenje 250

$$\epsilon_v = 81 \text{ relativna permitivnost vode}, \quad S_1 = S_2 = \frac{S}{2}, \quad n = ?$$

Pločasti kondenzator sastoji se od dviju paralelnih metalnih ploča između kojih je izolator. Ako je između ploča vakuum kapacitet pločastog kondenzatora računa se formulom

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d},$$

gdje je  $\epsilon_0$  dielektričnost (permitivnost) vakuuma, S površina svake od ploča, d razmak među pločama. Ako je između ploča neko sredstvo kapacitet pločastog kondenzatora računa se formulom

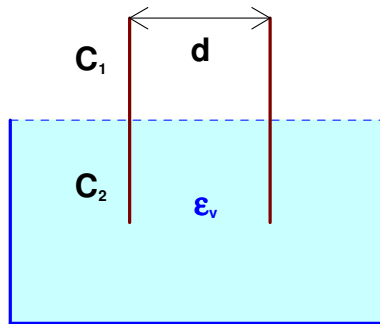
$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d},$$

gdje je  $\epsilon_0$  dielektričnost (permitivnost) vakuuma,  $\epsilon_r$  relativna dielektričnost sredstva,  $S$  površina svake od ploča,  $d$  razmak među pločama.

Ukupni kapacitet od  $n$  usporedno (paralelno) spojenih kondenzatora možemo naći iz izraza

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Vrijednost kapaciteta ekvivalentnog kondenzatora jednaka je zbroju vrijednosti kapaciteta svakog pojedinog kondenzatora.



Kapacitet dijela kondenzatora ostavljenog u zraku iznosi:

$$C_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{S_1}{d} \Rightarrow C_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{\frac{S}{2}}{d} \Rightarrow C_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{2 \cdot d}.$$

Kapacitet dijela kondenzatora uronjenog u vodu iznosi:

$$C_2 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_v \cdot \frac{S_2}{d} \Rightarrow C_2 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_v \cdot \frac{\frac{S}{2}}{d} \Rightarrow C_2 = \epsilon_0 \cdot 81 \cdot \frac{S}{2 \cdot d} \Rightarrow C_2 = 81 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{2 \cdot d}.$$

Kada je kondenzator uronjen u vodu, dijeli se na dva kondenzatora koji čine paralelnu kombinaciju. Tada je ukupni kapacitet:

$$\begin{aligned} C_u = C_1 + C_2 &\Rightarrow C_u = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{2 \cdot d} + 81 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{2 \cdot d} \Rightarrow C_u = 82 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{2 \cdot d} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_u = 82 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{2 \cdot d} \Rightarrow C_u = 41 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}. \end{aligned}$$

Kada je cijeli kondenzator u zraku njegov je kapacitet

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}.$$

Računamo koliko ćemo puta povećati kapacitet pločastog kondenzatora ako donju polovicu njegovih ploča uronimo u vodu, a gornju polovicu ostavimo u zraku.

$$n = \frac{C_u}{C} \Rightarrow n = \frac{41 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}}{\epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}} \Rightarrow n = \frac{41 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}}{\epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}} \Rightarrow n = 41.$$

### Vježba 250

Koliko ćemo puta povećati kapacitet pločastog kondenzatora ako donju polovicu njegovih ploča uronimo u vodu, a gornju polovicu ostavimo u zraku? Relativna permitivnost glicerina je 56.2. (Uputa: Uranjanjem ploča do polovice u vodu, dobivamo sustav dvaju paralelno spojenih kondenzatora kojima su površine ploča  $S/2$ .)

**Rezultat:** 28.6.

### Zadatak 251 (ID, gimnazija)

Elektron je postigao brzinu  $10^6$  m/s pošto je prešao put od jedne nabijene metalne ploče do druge. Razmak između ploča je 5.3 mm. Kolika je bila jakost električnog polja u kojem se gibao elektron? (naboj elektrona  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  C, masa elektrona  $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg)

#### Rješenje 251

$$v = 10^6 \text{ m/s}, \quad s = 5.3 \text{ mm} = 5.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad Q = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad E = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta  $s$  jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot s \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot s},$$

gdje je  $v$  brzina tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom  $a$  za vrijeme  $t$ .

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Ako se u polju jakosti  $E$  nalazi naboj  $Q$ , silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

Sila koja ubrzava elektron je električna sila pa akceleraciju  $a$  dobijemo iz

$$m \cdot a = Q \cdot E \Rightarrow m \cdot a = e \cdot E \Rightarrow m \cdot a = e \cdot E \quad / : m \Rightarrow a = \frac{e \cdot E}{m}.$$

Budući da se elektron giba stalnom akceleracijom, uporabom formule za brzinu jednolikog ubrzanog gibanja, izračunamo  $E$ .

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{e \cdot E}{m} \\ a = \frac{v^2}{2 \cdot s} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{e \cdot E}{m} = \frac{v^2}{2 \cdot s} \Rightarrow \frac{e \cdot E}{m} = \frac{v^2}{2 \cdot s} \quad / \cdot \frac{m}{e} \Rightarrow E = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot s \cdot e} = \\ = \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 5.3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 536.48 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

### Vježba 251

Elektron je postigao brzinu  $10^3$  km/s pošto je prešao put od jedne nabijene metalne ploče do druge. Razmak između ploča je 0.53 cm. Kolika je bila jakost električnog polja u kojem se gibao elektron? (naboj elektrona  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  C, masa elektrona  $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg)

**Rezultat:** 536.48 V/m.

### Zadatak 252 (Ana, gimnazija)

Jakost homogenoga električnog polja iznosi 4000 V/m. Nađi razliku potencijala između dvije točke koje su smještene (na istoj silnici) na udaljenosti 3 cm.

#### Rješenje 252

$$E = 4000 \text{ V/m}, \quad r_1 = r, \quad \Delta r = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}, \quad r_2 = r + \Delta r, \quad U = ?$$

Razlika potencijala ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) naziva se naponom  $U$  i možemo ga izračunati kao

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja  $Q$  smještena u praznini (vakuumu), onda je jakost električnog polja u nekoj točki polja na udaljenosti  $r$  od naboja dana (prema Coulombovu

zakonu) izrazom

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

Ako je izvor električnog polja točkasta množina naboja Q ili nabijena kugla, onda je potencijal u točki na udaljenosti r od naboja, odnosno središta kugle, za vakuum (prazninu) jednak

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}, \quad \varphi = r \cdot E.$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 = r_1 \cdot E \\ \varphi_2 = r_2 \cdot E \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = r_2 \cdot E - r_1 \cdot E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = (r + \Delta r) \cdot E - r \cdot E \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = r \cdot E + \Delta r \cdot E - r \cdot E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = r \cdot E + \Delta r \cdot E - r \cdot E \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta r \cdot E \Rightarrow \left[ \varphi_2 - \varphi_1 = U \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \Delta r \cdot E = 0.03 \text{ m} \cdot 4000 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 120 \text{ V}.$$

### Vježba 252

Jakost homogenoga električnog polja iznosi 2000 V / m. Nađi razliku potencijala između dvije točke koje su smještene (na istoj silnici) na udaljenosti 6 cm.

**Rezultat:** 120 V.

### Zadatak 253 (Maturant, gimnazija)

Na izvor napona 150 V priključen je kondenzator kapaciteta 2 nF, a na izvor napona 250 V kondenzator kapaciteta 3 nF. Kondenzatori se odspoje i zatim međusobno spoje paralelno. Koliki je zajednički napon na kondenzatorima nakon spajanja?

### Rješenje 253

$$U_1 = 150 \text{ V}, \quad C_1 = 2 \text{ nF} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ F}, \quad U_2 = 250 \text{ V}, \quad C_2 = 3 \text{ nF} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ F}, \quad U = ?$$

Kapacitet pločastog kondenzatora iskazujemo jednadžbom:

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow Q = C \cdot U \Rightarrow U = \frac{Q}{C},$$

gdje je Q naboj na ploči, U napon između ploča.

Ukupni kapacitet od n usporedno (paralelno) spojenih kondenzatora možemo naći iz izraza

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n.$$

Kod paralelnog spoja svi kondenzatori imaju jednak napon, a ukupni naboj je:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n.$$

Na svakom kondenzatoru prije spajanja pohranjena je količina naboja

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1, \quad Q_2 = C_2 \cdot U_2.$$

Kada se kondenzatori međusobno paralelno spoje ukupni je naboj

$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q = C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2,$$

a ekvivalentni kapacitet

$$C = C_1 + C_2.$$

Zajednički napon U tada iznosi:

$$U = \frac{Q}{C} \Rightarrow U = \frac{C_1 \cdot U_1 + C_2 \cdot U_2}{C_1 + C_2} = \frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 150 \text{ V} + 3 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 250 \text{ V}}{2 \cdot 10^{-9} \text{ F} + 3 \cdot 10^{-9} \text{ F}} = 210 \text{ V}.$$

### Vježba 253

Na izvor napona 150 V priključen je kondenzator kapaciteta 4 nF, a na izvor napona 250 V kondenzator kapaciteta 6 nF. Kondenzatori se odspoje i zatim međusobno spoje paralelno. Koliki je zajednički napon na kondenzatorima nakon spajanja?

**Rezultat:** 210 V.

### Zadatak 254 (Josipa, medicinska škola)

U homogenom električnom polju jakosti 2 kV / cm giba se točkasti naboj iznosa 6 μC. Treba odrediti rad ako se naboj giba na putu 3 cm u smjeru polja.

#### Rješenje 254

$$E = 2 \text{ kV / cm} = 2 \cdot 10^5 \text{ V / m}, \quad Q = 6 \text{ μC} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C}, \quad s = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}, \quad W = ?$$

Ako se u polju jakosti E nalazi naboj Q, silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

Tijelo obavlja rad W ako djeluje nekom silom F na putu s na drugo tijelo. Ako sila djeluje u smjeru gibanja tijela, vrijedi

$$W = F \cdot s.$$

$$\left. \begin{array}{l} F = Q \cdot E \\ W = F \cdot s \end{array} \right\} \Rightarrow W = Q \cdot E \cdot s = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 0.03 \text{ m} = 0.036 \text{ J}.$$

### Vježba 254

U homogenom električnom polju jakosti 4 kV / cm giba se točkasti naboj iznosa 3 μC. Treba odrediti rad ako se naboj giba na putu 3 cm u smjeru polja.

**Rezultat:** 0.036 J.

### Zadatak 255 (Mario, gimnazija)

Dva su točkasta naboja dovedena iz velike međusobne udaljenosti na udaljenost 1 m i pritom je obavljen rad 10 J. Koliki je rad potrebno utrošiti da se ta dva naboja dovedu od međusobne udaljenosti 1 m na 0.2 m?

- A. 5 J      B. 50 J      C. 10 J      D. 40 J

#### Rješenje 255

$$r_1 = 1 \text{ m}, \quad W_1 = 10 \text{ J}, \quad r_2 = 0.2 \text{ m}, \quad W = ?$$

Kada promatramo električno polje koje stvara naboj Q tada je električna potencijalna energija točkastog naboja q koji se nalazi na udaljenosti r dana izrazom

$$E_p = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r},$$

gdje je konstanta  $k = 8.99 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$ . Ako se točkasti naboj  $Q_1$  pomiče u električnom polju

naboja  $Q_2$  pod djelovanjem vanjskih sila, onda je njihov rad

$$W = k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

gdje je  $r_1$  početna udaljenost, a  $r_2$  konačna udaljenost između naboja.

Kada se dva točkasta naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  dovedu iz velike međusobne udaljenosti na udaljenost  $r_1$  obavljen je rad

$$W_1 = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_1}.$$

Kada se dva točkasta naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  dovedu iz velike međusobne udaljenosti na udaljenost  $r_2$  obavljen



je rad

$$W_2 = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_2}$$

Rad potreban da se ta dva naboja dovedu od međusobne udaljenosti  $r_1$  na  $r_2$  iznosi:

$$\begin{aligned} W = W_2 - W_1 &\Rightarrow W = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_2} - k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_1} \Rightarrow W = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_1} \cdot \left( \frac{r_1}{r_2} - 1 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow W = W_1 \cdot \left( \frac{r_1}{r_2} - 1 \right) = 10 \text{ J} \cdot \left( \frac{1 \text{ m}}{0.2 \text{ m}} - 1 \right) = 40 \text{ J}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

### Vježba 255

Dva su točkasta naboja dovedena iz velike međusobne udaljenosti na udaljenost 1 m i pritom je obavljen rad 5 J. Koliki je rad potrebno utrošiti da se ta dva naboja dovedu od međusobne udaljenosti 1 m na 0.2 m?

- A. 5 J      B. 50 J      C. 10 J      D. 40 J

**Rezultat:** C.

### Zadatak 256 (BMX, gimnazija)

Djelovanjem konstantnog električnog polja jakosti 1 V/m elektron je pokrenut iz stanja mirovanja te je prešao put 1 m. Za koje vrijeme je elektron prevalio taj put? (naboj elektrona  $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  C, masa elektrona  $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg)

- A.  $8.61 \cdot 10^{-3}$  s      B.  $3.37 \cdot 10^{-6}$  s      C. 3.33 s      D. 0.11 s

### Rješenje 256

$$E = 1 \text{ V/m}, \quad s = 1 \text{ m}, \quad Q = e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad t = ?$$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegovog gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Ako se u polju jakosti E nalazi naboj Q, silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

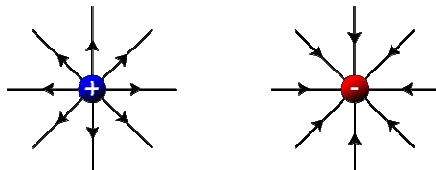
Sila koja ubrzava elektron je električna sila pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ F = Q \cdot E \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ F = e \cdot E \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot a = e \cdot E \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m \cdot a = e \cdot E \cdot \frac{1}{m} \\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} a &= \frac{e \cdot E}{m} \\ s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot E}{m} \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot E}{m} \cdot t^2 \cdot 2 \cdot m \Rightarrow 2 \cdot m \cdot s = e \cdot E \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e \cdot E \cdot t^2 = 2 \cdot m \cdot s \Rightarrow e \cdot E \cdot t^2 = 2 \cdot m \cdot s \cdot \frac{1}{e \cdot E} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot m \cdot s}{e \cdot E} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot m \cdot s}{e \cdot E} \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot s}{e \cdot E}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}}{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}}} = 3.37 \cdot 10^{-6} \text{ s.}$$



Odgovor je pod B

### Vježba 256

Djelovanjem konstantnog električnog polja jakosti  $1 \text{ V/m}$  elektron je pokrenut iz stanja mirovanja te je prešao put  $100 \text{ cm}$ . Za koje vrijeme je elektron prevalio taj put? (naboj elektrona  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , masa elektrona  $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ )

- A.  $8.61 \cdot 10^{-3} \text{ s}$       B.  $3.37 \cdot 10^{-6} \text{ s}$       C.  $3.33 \text{ s}$       D.  $0.11 \text{ s}$

**Rezultat:** B.

### Zadatak 257 (Luka, tehnička škola)

Naboj metalne kugle iznosi  $-8 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Koja je od navedenih tvrdnja točna? (naboj elektrona  $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ )

- A. Metalna kugla ima 5 elektrona više nego protona.  
 B. Metalna kugla ima 5 elektrona manje nego protona.  
 C. Metalna kugla ima 8 elektrona više nego protona.  
 D. Metalna kugla ima 8 elektrona manje nego protona.

### Rješenje 257

$$Q = -8 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad n = ?$$

Kvantizacija naboja

Električni naboj jedna je od osnovnih osobina elementarnih čestica. Jedinica za električni naboj je coulomb (C). Najmanja količina električnog naboja, elementarni naboj, iznosi:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

Naboj nekog tijela može biti samo mnogokratnik tog elementarnog naboja

$$Q = n \cdot e,$$

gdje je  $n$  cijeli broj. Dakle, ukupni naboj bilo kojeg tijela jednak je cijelom broju pomnoženome s elementarnim nabojem  $e$ . Kažemo da je naboj kvantiziran, sastavljen od osnovnih kvantata elektriciteta.

Atom se sastoji od jezgre (protona i neutrona) i elektronskog omotača (elektrona). Električni naboji elektrona i protona najmanje su količine elektriciteta u prirodi. Zovu se elementarni električni naboji. Ti naboji sadrže jednako veliku količinu elektriciteta suprotnog predznaka.

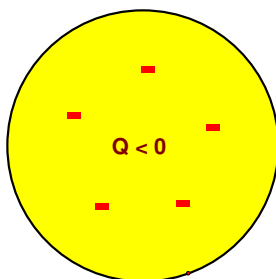
- naboj elektrona  $e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- naboj protona  $p = +1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Naboj je elektrona negativan ( - ), dok je naboj protona pozitivan (+). Atom je električki neutralan jer ima istu količinu pozitivnog i negativnog naboja. Kad atom izgubi jedan ili više elektrona postaje električki pozitivan, a atom s viškom elektrona postaje električki negativan. Ako neutralnom tijelu (ima jednaku količinu negativnog i pozitivnog naboja) oduzmemo određeni broj elektrona (negativan naboj), tijelo postaje električki pozitivno. **Ako neutralnom tijelu (ima jednaku količinu negativnog i pozitivnog naboja) dodamo određeni broj elektrona (negativan naboj), tijelo postaje električki negativno.**

Metalna kugla je električki negativna. To znači da ima više elektrona od protona. Višak elektrona iznosi:

$$Q = n \cdot e \Rightarrow n \cdot e = Q \Rightarrow n \cdot e = Q / \frac{1}{e} \Rightarrow n = \frac{Q}{e} = \frac{-8 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{-1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 5.$$

Odgovor je pod A.



### Vježba 257

Naboj metalne kugle iznosi  $8 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Koja je od navedenih tvrdnja točna? (naboj elektrona  $e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ )

- A. Metalna kugla ima 5 elektrona više nego protona.
- B. Metalna kugla ima 5 elektrona manje nego protona.
- C. Metalna kugla ima 8 elektrona više nego protona.
- D. Metalna kugla ima 8 elektrona manje nego protona.

**Rezultat:** B.

### Zadatak 258 (Lorena, srednja škola)

Odredite vrijeme za koje kroz žarulju od 40 W, priključenu na napon 220 V, prođe  $3 \cdot 10^{19}$  elektrona. (naboj elektrona  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ )

- A. 10.56 s      B. 26.4 s      C. 52.8 s      D. 13.8 s

### Rješenje 258

$$P = 40 \text{ W}, \quad U = 220 \text{ V}, \quad N = 3 \cdot 10^{19}, \quad e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \quad t = ?$$

Kvantizacija naboja

Električni naboj jedna je od osnovnih osobina elementarnih čestica. Jedinica za električni naboj je coulomb (C). Najmanja količina električnog naboja, elementarni naboj, iznosi:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Naboj nekog tijela može biti samo mnogokratnik tog elementarnog naboja

$$Q = N \cdot e,$$

gdje je N cijeli broj. Dakle, ukupni naboj bilo kojeg tijela jednak je cijelom broju pomnoženome s elementarnim nabojem e. Kažemo da je naboj kvantiziran, sastavljen od osnovnih kvantata elektriciteta.

Jakost električne struje I kvocijent je električnog naboja Q i vremenskog intervala t u kojemu taj naboj prođe određenim presjekom vodiča.

$$I = \frac{Q}{t}.$$

Snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije je

$$P = U \cdot I,$$

gdje je U napon između krajeva promatranog trošila, I struja.

$$\left. \begin{array}{l} Q = N \cdot e \\ I = \frac{Q}{t} \\ P = U \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I = \frac{N \cdot e}{t} \\ P = U \cdot I \end{array} \right\} \Rightarrow P = U \cdot \frac{N \cdot e}{t} \Rightarrow P = U \cdot \frac{N \cdot e}{t} \cdot \frac{t}{P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{U \cdot N \cdot e}{P} = \frac{220 \text{ V} \cdot 3 \cdot 10^{19} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{40 \text{ W}} = 26.4 \text{ s}.$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 258

Odredite vrijeme za koje kroz žarulju od 80 W, priključenu na napon 220 V, prođe  $6 \cdot 10^{19}$  elektrona. (naboj elektrona  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ )

- A. 10.56 s      B. 26.4 s      C. 52.8 s      D. 13.8 s

**Rezultat:** B.

### Zadatak 259 (Vesna, medicinska škola)

Razmak između ploča pločastog kondenzatora iznosi  $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ . Ako se kondenzator stavi u ulje, njegov se kapacitet promijeni. Međutim, kada se razmak ploča poveća na  $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , kondenzator ima i u ulju prijašnji zračni kapacitet. Kolika je relativna dielektrična konstanta?

- A. 3      B. 1.2      C. 3.6      D. 1.6      E. 2.4

### Rješenje 259

$$d_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad d_2 = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \epsilon_r = ?$$

Kapacitet pločastog kondenzatora u zraku upravo je razmjernan površini S jedne ploče, a obrnuto razmjernan udaljenosti d između ploča:

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d},$$

gdje je dielektričnost praznine  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$ .

Kapacitet pločastog kondenzatora površine ploča S, koje su razmaknute za d i u kojem je dielektrik relativne permitivnosti  $\epsilon_r$  iznosi:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}.$$

Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d_1} \\ C_2 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d_2} \end{array} \right\} \Rightarrow [C_2 = C_1] \Rightarrow \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d_2} = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d_2} = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d_1} \cdot \frac{d_2}{\epsilon_0 \cdot S} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{d_2}{d_1} = \frac{1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 2.4.$$

Odgovor je pod E.

### Vježba 259

Razmak između ploča pločastog kondenzatora iznosi  $10^{-3}$  m. Ako se kondenzator stavi u ulje, njegov se kapacitet promijeni. Međutim, kada se razmak ploča poveća na  $2.4 \cdot 10^{-3}$  m, kondenzator ima i u ulju prijašnji zračni kapacitet. Kolika je relativna dielektrična konstanta?

- A. 3      B. 1.2      C. 3.6      D. 1.6      E. 2.4

**Rezultat:** E.

### Zadatak 260 (Vesna, medicinska škola)

Pločasti kondenzator nabijen je na 1000 V. Razmak ploča je 1 cm, masa elektrona je  $9.11 \cdot 10^{-31}$  kg, naboj elektrona je  $1.602 \cdot 10^{-19}$  C. Vrijeme potrebno da elektron prijeđe put od negativne do pozitivne ploče, ako mu je početna brzina nula, iznosi:

- A.  $10^{-9}$  s      B.  $10^{-10}$  s      C. 3 ns      D. 1 s      E. 1  $\mu$ s

### Rješenje 260

$U = 1000$  V,       $d = 1$  cm = 0.01 m,       $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg,       $Q = e = 1.602 \cdot 10^{-19}$  C,  
 $t = ?$

Jednoliko ubrzano gibanje duž puta s jest gibanje za koje vrijedi izraz

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

gdje je s put tijela pošto se pokrenulo iz mirovanja i gibalo jednoliko ubrzano akceleracijom a za vrijeme t.

**Drugi Newtonov poučak:** Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila.

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Ako se u polju jakosti E nalazi naboj Q, silu kojom polje djeluje na naboj možemo izračunati iz izraza

$$F = Q \cdot E.$$

Polje između dviju nabijenih paralelnih ploča udaljenih d između kojih je napon U ima svuda jednaku jakost i paralelne silnice, a naziva se homogeno polje.

$$E = \frac{U}{d}.$$

Električna sila  $F_{el}$  ubrzava elektron pa prema drugom Newtonovu poučku vrijedi:

$$\begin{aligned} F = F_{el} \Rightarrow m \cdot a = Q \cdot E &\Rightarrow \left[ E = \frac{U}{d} \right] \Rightarrow m \cdot a = Q \cdot \frac{U}{d} \Rightarrow m \cdot a = Q \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = \frac{Q \cdot U}{m \cdot d} \Rightarrow [Q = e] \Rightarrow a = \frac{e \cdot U}{m \cdot d}. \end{aligned}$$

Budući da je sila električnog polja na elektron stalna, elektron se giba jednoliko ubrzano akceleracijom a pa za prevaljeni put d vrijedi:

$$d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se t.

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \\ d &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t^2 = d \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U}{m \cdot d} \cdot t^2 = d \cdot \frac{2 \cdot m \cdot d}{e \cdot U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot m \cdot d^2}{e \cdot U} \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot m \cdot d^2}{e \cdot U} \sqrt{\quad} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot d^2}{e \cdot U}} \Rightarrow t = d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m}{e \cdot U}} =$$

$$= 0.01 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1000 \text{ V}}} = 1.07 \cdot 10^{-9} \text{ s} \approx 10^{-9} \text{ s}.$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 260

Pločasti kondenzator nabijen je na 1 kV. Razmak ploča je 1 cm, masa elektrona je  $9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , naboj elektrona je  $1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Vrijeme potrebno da elektron prijeđe put od negativne do pozitivne ploče, ako mu je početna brzina nula, iznosi:

- A.  $10^{-9} \text{ s}$       B.  $10^{-10} \text{ s}$       C.  $3 \text{ ns}$       D.  $1 \text{ s}$       E.  $1 \mu\text{s}$

**Rezultat:** A.

www.halapa.com