

**Zadatak 481 (Marina, gimnazija)**

Odredite obujam 12 g dušika pri tlaku  $15 \cdot 10^5$  Pa i temperaturi  $0^\circ\text{C}$ . (molna masa dušika  $M = 28.02$  g / mol)

**Rješenje 481**

$$m = 12 \text{ g} = 0.012 \text{ kg}, \quad p = 15 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad t = 0^\circ\text{C} \Rightarrow T = 273.15 + t = (273.15 + 0) \text{ K} = 273.15 \text{ K},$$

$$M = 28.02 \text{ g / mol} = 0.02802 \text{ kg / mol}, \quad V = ?$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3.$$

Uzajamna funkcionalna sveza između tlaka  $p$ , obujma  $V$ , mase plina  $m$ , molne mase  $M$  naziva se jednačba stanja plina:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

gdje je  $R$  plinska konstanta, a njezina vrijednost iznosi:

$$R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

Obujam ćemo naći iz opće jednačbe stanja plina

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \frac{1}{p} \Rightarrow V = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot p} =$$

$$= \frac{0.012 \text{ kg} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 273.15 \text{ K}}{0.02802 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 15 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 6.48 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 0.648 \text{ dm}^3 \approx 0.65 \text{ dm}^3.$$

**Vježba 481**

Odredite obujam 1.2 dag dušika pri tlaku 1500 kPa i temperaturi  $0^\circ\text{C}$ . (molna masa dušika  $M = 28.02$  g / mol)

**Rezultat:**  $0.65 \text{ dm}^3$ .

**Zadatak 482 (Marina, gimnazija)**

Brzina čestice plina je  $400 \text{ m / s}$ . Odredite masu te čestice ako znate da je temperatura  $27^\circ\text{C}$ .

**Rješenje 482**

$$v = 400 \text{ m / s}, \quad t = 27^\circ\text{C} \Rightarrow T = 273 + t = (273.15 + 27) \text{ K} = 300.15 \text{ K}, \quad m = ?$$

Srednja kinetička energija za česticu mase  $m$  je

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2,$$

gdje je  $v$  efektivna brzina (srednja kvadratna brzina).

Srednja kinetička energija jedne čestice proporcionalna je apsolutnoj temperaturi  $T$

$$E_k = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T,$$

gdje je  $k_B$  Boltzmanova konstanta

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \\ E_k = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T \cdot \frac{2}{v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{3 \cdot k_B \cdot T}{v^2} = \frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 300.15 K}{\left(400 \frac{m}{s}\right)^2} = 7.77 \cdot 10^{-26} \text{ kg.}$$

### Vježba 482

Brzina čestice plina je 0.4 km / s. Odredite masu te čestice ako znate da je temperatura 27°C.

**Rezultat:**  $7.77 \cdot 10^{-26}$  kg.

### Zadatak 483 (Luka, tehnička škola)

Posuda obujma 10 litara sadrži jednoatomni plin pod tlakom 2000 hPa. Kolika je ukupna kinetička energija tih čestica plina?

#### Rješenje 483

$$V = 10 \text{ L} = 10 \text{ dm}^3 = 10^{-2} \text{ m}^3, \quad p = 2000 \text{ hPa} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad U = ?$$

Za jednoatomne plinove možemo za unutarnju energiju napisati jednadžbu

$$U = \frac{3}{2} \cdot p \cdot V,$$

gdje je p tlak plina, V obujam plina.

$$U = \frac{3}{2} \cdot p \cdot V = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 3 \cdot 10^3 \text{ J} = 3 \text{ kJ.}$$

### Vježba 483

Posuda obujma 20 litara sadrži jednoatomni plin pod tlakom 1000 hPa. Kolika je ukupna kinetička energija tih čestica plina?

**Rezultat:** 3 kJ.

### Zadatak 484 (Maro, elektrotrojaarska škola)

Za koliko će vremena grijač snage 500 W zagrijati 400 g vode od 15 °C do 98 °C? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ )

#### Rješenje 484

$$P = 500 \text{ W}, \quad m = 400 \text{ g} = 0.4 \text{ kg}, \quad t_1 = 15 \text{ °C}, \quad t_2 = 98 \text{ °C}, \quad c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K}),$$

$$t = ?$$

Kelvinova i Celzijeva ljestvica su dvije različite temperaturne ljestvice.

Međunarodni sustav mjernih jedinica (SI) za temperaturu propisuje jedinicu kelvin (K). Tu temperaturu zovemo termodinamička temperatura (T).

Temperaturna razlika od 1 K jednaka je temperaturnoj razlici od 1 °C, što izražavamo jednadžbom:

$$\Delta T (\text{K}) = \Delta t (\text{°C}).$$

Toplina Q je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

**Zakon očuvanja energije:**

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Kad tijelo obavlja rad, mijenja mu se energija. Promjena energije tijela jednaka je utrošenom radu. Snaga P jednaka je omjeru rada W i vremena t za koje je rad obavljen, tj.

$$P = \frac{W}{t} \Rightarrow W = P \cdot t.$$

Za zagrijavanje vode utrošena je električna energija

$$W = P \cdot t.$$

Unutarnja energija vode povećala se za

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1).$$

Pretpostavimo li da je sva električna energija utrošena na zagrijavanje vode,

$$\begin{aligned} W = Q &\Rightarrow P \cdot t = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow P \cdot t = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow P \cdot t = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{P} &\Rightarrow t = \frac{m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)}{P} = \frac{0.4 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (98 - 15) \text{ K}}{500 \text{ W}} = 278.88 \text{ s.} \end{aligned}$$

### Vježba 484

Za koliko će vremena grijač snage 1000 W zagrijati 800 g vode od 15 °C do 98 °C? (specifični toplinski kapacitet vode c = 4200 J / (kg · K))

**Rezultat:** 278.88 s.

### Zadatak 485 (XY, gimnazija)

Izračunajte početnu temperaturu plina koji se nalazi u zatvorenoj posudi ako mu se temperatura poveća za 2 °C, a tlak za 0.5 %.

### Rješenje 485

$$T_1 = T, \quad T_2 = T + 2, \quad p_1 = p, \quad p_2 = p + \frac{0.5}{100} \cdot p = 1.005 \cdot p, \quad T = ?$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9 \% = \frac{9}{100}, \quad 81 \% = \frac{81}{100}, \quad 4.5 \% = \frac{4.5}{100}, \quad 547 \% = \frac{547}{100}, \quad p \% = \frac{p}{100}.$$

Kako se računa "... p% od x...?"

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Kako zapisati da se x poveća za p% ?

$$x + \frac{p}{100} \cdot x = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x.$$

Mijenja li se temperatura nekoj masi plina stalnog obujma (izohorna promjena), mijenjat će se tlak plina prema Charlesovu zakonu:

$$V = konst. \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \frac{p}{T} = konst.$$

Kelvinova i Celzijeva ljestvica su dvije različite temperaturne ljestvice.

Međunarodni sustav mjernih jedinica (SI) za temperaturu propisuje jedinicu kelvin (K). Tu temperaturu zovemo termodinamička temperatura (T).

Temperaturna razlika od 1 K jednaka je temperaturnoj razlici od 1 °C, što izražavamo jednadžbom:

$$\Delta T (K) = \Delta t (^\circ C).$$

Plin se nalazi u zatvorenoj posudi pa je volumen stalan.

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{T_1} &= \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \cdot T_1 \cdot T_2 \Rightarrow p_1 \cdot T_2 = p_2 \cdot T_1 \Rightarrow p \cdot (T+2) = 1.005 \cdot p \cdot T \Rightarrow \\ &\Rightarrow p \cdot (T+2) = 1.005 \cdot p \cdot T \cdot \frac{1}{p} \Rightarrow T+2 = 1.005 \cdot T \Rightarrow 1.005 \cdot T = T+2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1.005 \cdot T - T = 2 \Rightarrow 0.005 \cdot T = 2 \Rightarrow 0.005 \cdot T = 2 \quad /: 0.005 \Rightarrow T = 400 \text{ K}. \end{aligned}$$

### Vježba 485

Izračunajte početnu temperaturu plina koji se nalazi u zatvorenoj posudi ako mu se temperatura poveća za 1 °C, a tlak za 0.5 %.

**Rezultat:** 200 K.

### Zadatak 486 (XY, gimnazija)

Na kojoj će se temperaturi uz stalan volumen tlak plina povećati 200 % u odnosu na tlak pri temperaturi 200 K?

#### Rješenje 486

$$p_1 = p, \quad T_1 = 200 \text{ K}, \quad p_2 = p + \frac{200}{100} \cdot p = 3 \cdot p, \quad T_2 = ?$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.

Na primjer,

$$9 \% = \frac{9}{100}, \quad 81 \% = \frac{81}{100}, \quad 4.5 \% = \frac{4.5}{100}, \quad 547 \% = \frac{547}{100}, \quad p \% = \frac{p}{100}.$$

Kako se računa "... p% od x...?"

$$\frac{p}{100} \cdot x.$$

Kako zapisati da se x poveća za p% ?

$$x + \frac{p}{100} \cdot x = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x.$$

Mijenja li se temperatura nekoj masi plina stalnog obujma (izohorna promjena), mijenjat će se tlak plina prema Charlesovu zakonu:

$$V = konst. \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \frac{p}{T} = konst.$$

Budući da je volumen stalan, vrijedi jednadžba:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \cdot \frac{T_2 \cdot T_1}{p_1} \Rightarrow T_2 = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} = \frac{3 \cdot p \cdot 200 \text{ K}}{p} = \frac{3 \cdot p \cdot 200 \text{ K}}{p} = 600 \text{ K}.$$

### Vježba 486

Na kojoj će se temperaturi uz stalan volumen tlak plina povećati 100 % u odnosu na tlak pri temperaturi 200 K?

**Rezultat:** 400 K.

### Zadatak 487 (Ivana, gimnazija)

Ako se grijač snage 10 W uroni u 1 kg vode temperature 100 °C koliko treba vremena da sva voda ispari? (specifična toplina isparavanja vode  $r = 22.6 \cdot 10^5 \text{ J / kg}$ )

#### Rješenje 487

$$P = 10 \text{ W}, \quad m = 1 \text{ kg}, \quad t = 100 \text{ °C} - \text{vrelište vode}, \quad r = 22.6 \cdot 10^5 \text{ J / kg}, \quad t = ?$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s.}$$

Snaga je brzina vršenja rada ili prijenosa energije. Ne misli se na brzinu gibanja u prostoru, nego na brzinu promjene funkcije koja ovisi o vremenu (vršenje rada ili prijenos energije).

$$P = \frac{W}{t}, \quad P = \frac{E}{t} \Rightarrow E = P \cdot t.$$

Tekućina prelazi u paru pri svakoj temperaturi. Temperatura iznad koje pri određenom tlaku tekućina više ne može postojati u tekućem agregatnom stanju naziva se vrelištem. Temperatura vrelišta ostaje nepromijenjena sve dok sva tekućina vrenjem ne prijeđe u paru. Toplino koja je potrebna da tekućina mase  $m$  prijeđe u paru jednake temperature možemo izračunati iz izraza

$$Q = m \cdot r,$$

gdje je  $r$  specifična toplina isparavanja.

Energija koju grijač uzima iz električne mreže jednaka je toplini koja je potrebna da voda mase  $m$  prijeđe u paru.

$$\begin{aligned} E = Q \Rightarrow P \cdot t = m \cdot r \Rightarrow P \cdot t = m \cdot r \cdot \frac{1}{P} \Rightarrow t = \frac{m \cdot r}{P} &= \frac{1 \text{ kg} \cdot 22.6 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{10 \text{ W}} = \\ &= 226000 \text{ s} = [226000 : 3600] = 62.78 \text{ h} \approx 63 \text{ h.} \end{aligned}$$

### Vježba 487

Ako se grijač snage 0.01 kW uroni u 100 dag vode temperature 100 °C koliko treba vremena da sva voda ispari? (specifična toplina isparavanja vode  $r = 22.6 \cdot 10^5 \text{ J / kg}$ )

**Rezultat:** 63 h.

### Zadatak 488 (Ivana, gimnazija)

U kalorimetru nalazi se 1 kg vode temperature 20 °C. U vodu ubacimo 0.1 kg leda temperature 0 °C. Kolika će biti temperatura smjese zanemarimo li specifični toplinski kapacitet kalorimetra? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J / (kg} \cdot \text{°C)}$ , specifična toplina taljenja leda  $\lambda = 330000 \text{ J / kg}$ )

### Rješenje 488

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \text{ kg}, & t_1 &= 20 \text{ °C}, & m_2 &= 0.1 \text{ kg}, & t_2 &= 0 \text{ °C}, & c &= 4200 \text{ J / (kg} \cdot \text{°C)}, \\ \lambda &= 330000 \text{ J / kg}, & t &= ? \end{aligned}$$

Toplina  $Q$  je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $c$  specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

Toplinu koju moramo predati čvrstom tijelu mase  $m$  da bi se ono rastalilo možemo izračunati iz izraza

$$Q_t = m \cdot \lambda,$$

gdje je  $\lambda$  specifična toplina taljenja.

Toplina vode

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot (t_1 - t)$$

utrošit će se na rastapanje leda

$$Q_2 = m_2 \cdot \lambda$$

i grijanje nastale vode do temperature smjese  $t$

$$Q_3 = m_2 \cdot c_1 \cdot (t - t_2).$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= Q_2 + Q_3 \Rightarrow m_1 \cdot c_1 \cdot (t_1 - t) = m_2 \cdot \lambda + m_2 \cdot c_1 \cdot (t - t_2) \Rightarrow \\
&\Rightarrow m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 - m_1 \cdot c_1 \cdot t = m_2 \cdot \lambda + m_2 \cdot c_1 \cdot t - m_2 \cdot c_1 \cdot t_2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -m_1 \cdot c_1 \cdot t - m_2 \cdot c_1 \cdot t = m_2 \cdot \lambda - m_2 \cdot c_1 \cdot t_2 - m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow -c_1 \cdot t \cdot (m_1 + m_2) = -(m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot c_1 \cdot t_2 - m_2 \cdot \lambda) \Rightarrow \\
&\Rightarrow -c_1 \cdot t \cdot (m_1 + m_2) = -(m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot c_1 \cdot t_2 - m_2 \cdot \lambda) / \cdot \frac{-1}{c_1 \cdot (m_1 + m_2)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow t = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot c_1 \cdot t_2 - m_2 \cdot \lambda}{c_1 \cdot (m_1 + m_2)} = \\
&= \frac{1 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 20 \text{ }^\circ\text{C} + 0.1 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 0 \text{ }^\circ\text{C} - 0.1 \text{ kg} \cdot 330000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (1 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg})} = 11 \text{ }^\circ\text{C}.
\end{aligned}$$

### Vježba 488

U kalorimetru nalazi se 1000 g vode temperature 20 °C. U vodu ubacimo 100 g leda temperature 0 °C. Kolika će biti temperatura smjese zanemarimo li specifični toplinski kapacitet kalorimetra? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J / (kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ , specifična toplina taljenja leda  $\lambda = 330000 \text{ J / kg}$ )

**Rezultat:** 11 °C.

### Zadatak 489 (Patrik, gimnazija)

U posudi nalazi se 5 kg vode temperature 3 °C. U vodu ubacimo 500 g leda temperature 0 °C. Kolika će ostati neotopljenog leda? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J / (kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ , specifična toplina taljenja leda  $\lambda = 330000 \text{ J / kg}$ )

### Rješenje 489

$$\begin{aligned}
m_1 &= 5 \text{ kg}, & t_1 &= 3 \text{ }^\circ\text{C}, & m_2 &= 500 \text{ g} = 0.5 \text{ kg}, & t_2 &= 0 \text{ }^\circ\text{C}, & c &= 4200 \text{ J / (kg} \cdot ^\circ\text{C)}, \\
\lambda &= 330000 \text{ J / kg}, & m &= ?
\end{aligned}$$

Toplina  $Q$  je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $c$  specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

Toplinu koju moramo predati čvrstom tijelu mase  $m$  da bi se ono rastalilo možemo izračunati iz izraza

$$Q_t = m \cdot \lambda,$$

gdje je  $\lambda$  specifična toplina taljenja.

Kada se voda mase  $m_1$  ohladi sa temperature  $t_1$  na  $t_2$  oslobodi se količina topline  $Q$ .

$$Q = m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2).$$

Ovom toplinom može se rastopiti led mase  $m_0$ .

$$Q = m_0 \cdot \lambda$$

pa slijedi:

$$\left. \begin{aligned} Q &= m_0 \cdot \lambda \\ Q &= m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_0 \cdot \lambda = m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2) \Rightarrow m_0 \cdot \lambda = m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2) / \cdot \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_o = \frac{m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2)}{\lambda}$$

Masa neotopljenog leda m iznosi:

$$m = m_2 - m_o \Rightarrow m = m_2 - \frac{m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2)}{\lambda} =$$

$$= 0.5 \text{ kg} - \frac{5 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (3 ^\circ\text{C} - 0 ^\circ\text{C})}{330000 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 0.31 \text{ kg}.$$

### Vježba 489

U posudi nalazi se 500 dag vode temperature 3 °C. U vodu ubacimo 0.5 kg leda temperature 0 °C. Kolika će ostati neotopljenog leda? (specifični toplinski kapacitet vode c = 4200 J / (kg · °C), specifična toplina taljenja leda λ = 330000 J / kg)

**Rezultat:** 0.31 kg.

### Zadatak 490 (Lucija, gimnazija)

U posudi je 160 g vode i nešto leda. Kad se dovede 10 g vodene pare temperature 100 °C, led se otopi, a vodi naraste temperatura na 3 °C. Koliko je bilo leda? (specifični toplinski kapacitet vode c = 4200 J / (kg · °C), specifična toplina taljenja leda λ = 330000 J / kg, specifična toplina isparavanja vode r = 2260000 J / kg)

### Rješenje 490

$$m = 160 \text{ g} = 0.16 \text{ kg}, \quad m_1 = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \quad t_1 = 100 ^\circ\text{C}, \quad t = 3 ^\circ\text{C},$$

$$c = 4200 \text{ J / (kg} \cdot ^\circ\text{C)}, \quad \lambda = 330000 \text{ J / kg}, \quad r = 2260000 \text{ J / kg}, \quad m_2 = ?$$

Toplina Q je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature.

Tekućina prelazi u paru pri svakoj temperaturi. Temperatura iznad koje pri određenom tlaku tekućina više ne može postojati u tekućem agregatnom stanju naziva se vrelištem. Temperatura vrelišta ostaje nepromijenjena sve dok sva tekućina vrenjem ne prijeđe u paru. Toplinu koja je potrebna da tekućina mase m prijeđe u paru iste temperature možemo izračunati iz izraza

$$Q = m \cdot r,$$

gdje je r specifična toplina isparavanja.

Toplinu koju moramo predati čvrstom tijelu mase m da bi se ono rastalilo možemo izračunati iz izraza

$$Q_t = m \cdot \lambda,$$

gdje je λ specifična toplina taljenja.

Kada se vodena para mase m<sub>1</sub> dovede u smjesu vode i leda kondenzira se i otpušta toplinu kondenzacije, a zatim se oslobodi toplina hlađenjem na temperaturu smjese t.

$$m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t).$$

Led mase m<sub>2</sub> troši toplinu dok se topi, a zatim se toplina koristi za zagrijavanje nastale vode iz leda i vode iz posude na konačnu temperaturu smjese t.

$$m_2 \cdot \lambda + (m + m_2) \cdot c \cdot t.$$

Dalje slijedi:

$$m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) = m_2 \cdot \lambda + (m + m_2) \cdot c \cdot t \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) = m_2 \cdot \lambda + m \cdot c \cdot t + m_2 \cdot c \cdot t \Rightarrow \\
&\Rightarrow m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) = m_2 \cdot (\lambda + c \cdot t) + m \cdot c \cdot t \Rightarrow \\
&\Rightarrow m_2 \cdot (\lambda + c \cdot t) + m \cdot c \cdot t = m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) \Rightarrow \\
&\Rightarrow m_2 \cdot (\lambda + c \cdot t) = m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) - m \cdot c \cdot t \Rightarrow \\
&\Rightarrow m_2 \cdot (\lambda + c \cdot t) = m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) - m \cdot c \cdot t \cdot \frac{1}{\lambda + c \cdot t} \Rightarrow \\
&\Rightarrow m_2 = \frac{m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) - m \cdot c \cdot t}{\lambda + c \cdot t} = \\
&= \frac{0.01 \text{ kg} \cdot 2260000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 0.01 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (100^\circ\text{C} - 3^\circ\text{C}) - 0.16 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 3^\circ\text{C}}{330000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 3^\circ\text{C}} = \\
&= 0.07197 \text{ kg} = 71.97 \text{ g} \approx 72 \text{ g}.
\end{aligned}$$

### Vježba 490

U posudi je 16 dag vode i nešto leda. Kad se dovede 1 dag vodene pare temperature  $100^\circ\text{C}$ , led se otopi, a vodi naraste temperatura na  $3^\circ\text{C}$ . Koliko je bilo leda? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , specifična toplina taljenja leda  $\lambda = 330000 \text{ J} / \text{kg}$ , specifična toplina isparavanja vode  $r = 2260000 \text{ J} / \text{kg}$ )

**Rezultat:** 72 g.

### Zadatak 491 (Matija, gimnazija)

Koliko grama leda od  $0^\circ\text{C}$  treba staviti u 1 kg vode temperature  $28^\circ\text{C}$  da je ohladimo na  $10^\circ\text{C}$ ? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , specifična toplina taljenja leda  $\lambda = 330000 \text{ J} / \text{kg}$ )

### Rješenje 491

$$\begin{aligned}
t_1 = 0^\circ\text{C}, \quad m_2 = 1 \text{ kg}, \quad t_2 = 28^\circ\text{C}, \quad t = 10^\circ\text{C}, \quad c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}), \\
\lambda = 330000 \text{ J} / \text{kg}, \quad m_1 = ?
\end{aligned}$$

Toplina  $Q$  je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $c$  specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

Toplinu koju moramo predati čvrstom tijelu mase  $m$  da bi se ono rastalilo možemo izračunati iz izraza

$$Q_t = m \cdot \lambda,$$

gdje je  $\lambda$  specifična toplina taljenja.

Zagrijana voda mase  $m_2$  i temperature  $t_2$  gubi određenu količinu topline  $Q$ .

$$Q = m_2 \cdot c \cdot (t_2 - t).$$

Jedan dio topline  $Q_1$  potroši se na taljenje leda mase  $m_1$ .

$$Q_1 = m_1 \cdot \lambda.$$

Drugi dio topline  $Q_2$  potroši se na zagrijavanje vode (nastale iz leda) do temperature smjese  $t$ .

$$Q_2 = m_1 \cdot c \cdot (t - t_1).$$



Zato je:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \Rightarrow m_2 \cdot c \cdot (t_2 - t) = m_1 \cdot \lambda + m_1 \cdot c \cdot (t - t_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_2 \cdot c \cdot (t_2 - t) = m_1 \cdot (\lambda + c \cdot (t - t_1)) \Rightarrow m_1 \cdot (\lambda + c \cdot (t - t_1)) = m_2 \cdot c \cdot (t_2 - t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1 \cdot (\lambda + c \cdot (t - t_1)) = m_2 \cdot c \cdot (t_2 - t) / \frac{1}{\lambda + c \cdot (t - t_1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1 = \frac{m_2 \cdot c \cdot (t_2 - t)}{\lambda + c \cdot (t - t_1)} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (28^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C})}{330000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (10^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})} = 0.203 \text{ kg} = 203 \text{ g}. \end{aligned}$$

### Vježba 491

Koliko grama leda od  $0^\circ\text{C}$  treba staviti u 100 dag vode temperature  $28^\circ\text{C}$  da je ohladimo na  $10^\circ\text{C}$ ? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , specifična toplina taljenja leda  $\lambda = 330000 \text{ J} / \text{kg}$ )

**Rezultat:** 203 g.

### Zadatak 492 (Tomislav, gimnazija)

Koliko vodene pare temperature  $100^\circ\text{C}$  treba uvesti u 2.5 kg vode temperature  $11^\circ\text{C}$  da se voda zagrije do  $81^\circ\text{C}$ ? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , specifična toplina isparavanja vode  $r = 2260000 \text{ J} / \text{kg}$ )

### Rješenje 492

$$t_1 = 100^\circ\text{C}, \quad m_2 = 2.5 \text{ kg}, \quad t_2 = 11^\circ\text{C}, \quad t = 81^\circ\text{C}, \quad c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}), \\ r = 2260000 \text{ J} / \text{kg}, \quad m_1 = ?$$

Toplina  $Q$  je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $c$  specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

Tekućina prelazi u paru pri svakoj temperaturi. Temperatura iznad koje pri određenom tlaku tekućina više ne može postojati u tekućem agregatnom stanju naziva se vrelištem. Temperatura vrelišta ostaje nepromijenjena sve dok sva tekućina vrenjem ne prijeđe u paru. Toplinu koja je potrebna da tekućina mase  $m$  prijeđe u paru iste temperature možemo izračunati iz izraza

$$Q = m \cdot r,$$

gdje je  $r$  specifična toplina isparavanja.

Vodena para mase  $m_1$  najprije se ohladi i kondenzira te preda toplinu  $Q_1$  (jednaku toplini isparavanja).

Zatim se nastala voda mase  $m_1$  ohladi do temperature smjese  $t$  i preda toplinu  $Q_2$ .

Te dvije količine topline primi hladna voda mase  $m_2$  i temperature  $t_2$  i zagrije se do temperature smjese  $t$ . Zato je:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \Rightarrow m_2 \cdot c \cdot (t - t_2) = m_1 \cdot r + m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_2 \cdot c \cdot (t - t_2) = m_1 \cdot (r + c \cdot (t_1 - t)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1 \cdot (r + c \cdot (t_1 - t)) = m_2 \cdot c \cdot (t - t_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_1 \cdot (r + c \cdot (t_1 - t)) = m_2 \cdot c \cdot (t - t_2) / \frac{1}{r + c \cdot (t_1 - t)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{m_2 \cdot c \cdot (t - t_2)}{r + c \cdot (t_1 - t)} =$$

$$= \frac{2.5 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (81^\circ\text{C} - 11^\circ\text{C})}{2260000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (100^\circ\text{C} - 81^\circ\text{C})} = 0.3141 \text{ kg} = 314.1 \text{ g}.$$

### Vježba 492

Koliko vodene pare temperature  $100^\circ\text{C}$  treba uvesti u 250 dag vode temperature  $11^\circ\text{C}$  da se voda zagrije do  $81^\circ\text{C}$ ? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , specifična toplota isparavanja vode  $r = 2260000 \text{ J} / \text{kg}$ )

**Rezultat:** 314.1 g.

### Zadatak 493 (Ante, tehnička škola)

U 200 g vode temperature  $100^\circ\text{C}$  bacimo 40 g leda temperature  $0^\circ\text{C}$ . Do koje će se temperature voda ohladiti? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , specifična toplota taljenja leda  $\lambda = 330000 \text{ J} / \text{kg}$ )

### Rješenje 493

$$m_1 = 200 \text{ g} = 0.2 \text{ kg}, \quad t_1 = 100^\circ\text{C}, \quad m_2 = 40 \text{ g} = 0.04 \text{ kg}, \quad t_2 = 0^\circ\text{C},$$

$$c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}), \quad \lambda = 330000 \text{ J} / \text{kg}, \quad t = ?$$

Toplina  $Q$  je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $c$  specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

Toplinu koju moramo predati čvrstom tijelu mase  $m$  da bi se ono rastalilo možemo izračunati iz izraza

$$Q_t = m \cdot \lambda,$$

gdje je  $\lambda$  specifična toplota taljenja.

Zagrijana voda mase  $m_1$  i temperature  $t_1$  gubi određenu količinu topline  $Q$ .

$$Q = m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t).$$

Jedan dio topline  $Q_1$  potroši se na taljenje leda mase  $m_2$ .

$$Q_1 = m_2 \cdot \lambda.$$

Drugi dio topline  $Q_2$  potroši se na zagrijavanje vode (nastale od leda) do temperature smjese  $t$ .

$$Q_2 = m_2 \cdot c \cdot (t - t_2).$$

Dalje vrijedi:

$$Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t) = m_2 \cdot \lambda + m_2 \cdot c \cdot (t - t_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot c \cdot t_1 - m_1 \cdot c \cdot t = m_2 \cdot \lambda + m_2 \cdot c \cdot t - m_2 \cdot c \cdot t_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot c \cdot t_1 - m_2 \cdot \lambda + m_2 \cdot c \cdot t_2 = m_2 \cdot c \cdot t + m_1 \cdot c \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot c \cdot t_1 + m_2 \cdot (c \cdot t_2 - \lambda) = c \cdot t \cdot (m_2 + m_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \cdot t \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot c \cdot t_1 + m_2 \cdot (c \cdot t_2 - \lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \cdot t \cdot (m_1 + m_2) = m_1 \cdot c \cdot t_1 + m_2 \cdot (c \cdot t_2 - \lambda) \cdot \frac{1}{c \cdot (m_1 + m_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{m_1 \cdot c \cdot t_1 + m_2 \cdot (c \cdot t_2 - \lambda)}{c \cdot (m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{0.2 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 100 ^\circ\text{C} + 0.04 \text{ kg} \cdot \left( 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 0 ^\circ\text{C} - 330000 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right)}{4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot (0.2 \text{ kg} + 0.04 \text{ kg})} = 70.24 ^\circ\text{C}.$$

### Vježba 493

U 20 dag vode temperature 100 °C bacimo 4 dag leda temperature 0 °C. Do koje će se temperature voda ohladiti? (specifični toplinski kapacitet vode  $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ , specifična toplina taljenja leda  $\lambda = 330000 \text{ J} / \text{kg}$ )

**Rezultat:** 70.24 °C.

### Zadatak 494 (Matija, tehnička škola)

U zatvorenoj posudi obujma 1 m<sup>3</sup> nalazi se 0.5 kg vode i 1.6 kg kisika. Odredi tlak u posudi pri 500 °C, ako znamo da pri toj temperaturi sva voda prijeđe u paru. (molna masa vode  $M_1(\text{H}_2\text{O}) = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg} / \text{mol}$ , molna masa kisika  $M_2(\text{O}_2) = 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg} / \text{mol}$ , plinska konstanta  $R = 8.314 \text{ J} / (\text{K} \cdot \text{mol})$ )

### Rješenje 494

$$V = 1 \text{ m}^3, \quad m_1 = 0.5 \text{ kg}, \quad m_2 = 1.6 \text{ kg}, \quad t = 500 ^\circ\text{C} \Rightarrow T = 273.15 + t =$$

$$= (273.15 + 500) \text{ K} = 773.15 \text{ K}, \quad M_1 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg} / \text{mol}, \quad M_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg} / \text{mol},$$

$$R = 8.314 \text{ J} / (\text{K} \cdot \text{mol}), \quad p = ?$$

Jedan od oblika jednadžbe stanja plina glasi

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow p = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot V},$$

gdje je  $p$  tlak plina,  $V$  obujam plina,  $m$  masa plina,  $M$  molna masa plina,  $R$  plinska konstanta,  $T$  termodinamička temperatura.

### Daltonov zakon

Imamo li smjesu nekoliko plinova, ukupni će tlak biti jednak zbroju parcijalnih tlakova pomiješanih plinova. Tlak smjese je

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n,$$

gdje su  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  tlakovi pojedinih plinova. Parcijalni ili djelomični tlak plina je tlak što bi ga imala jedna od pomiješanih količina plina kad bi sama ispunila cijeli prostor u kojemu se nalazi smjesa.

Kada voda ispari u posudi, ukupan tlak  $p$  bit će jednak zbroju parcijalnog tlaka vodene pare  $p_1$  i parcijalnog tlaka kisika  $p_2$ .

$$p = p_1 + p_2.$$

Iz jednadžba plinskog stanja dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} p_1 = \frac{m_1 \cdot R \cdot T}{M_1 \cdot V} \\ p_2 = \frac{m_2 \cdot R \cdot T}{M_2 \cdot V} \end{array} \right\} \Rightarrow [p = p_1 + p_2] \Rightarrow p = \frac{m_1 \cdot R \cdot T}{M_1 \cdot V} + \frac{m_2 \cdot R \cdot T}{M_2 \cdot V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{R \cdot T}{V} \cdot \left( \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) = \frac{8.314 \frac{J}{K \cdot mol} \cdot 773.15 K}{1 m^3} \cdot \left( \frac{0.5 kg}{18 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}} + \frac{1.6 kg}{32 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}} \right) = 499953.15 Pa.$$

#### Vježba 494

U zatvorenoj posudi obujma  $1 m^3$  nalazi se 50 dag vode i 160 dag kisika. Odredi tlak u posudi pri  $500^\circ C$ , ako znamo da pri toj temperaturi sva voda prijeđe u paru. (molna masa vode  $M_1(H_2O) = 18 \cdot 10^{-3} kg / mol$ , molna masa kisika  $M_2(O_2) = 32 \cdot 10^{-3} kg / mol$ , plinska konstanta  $R = 8.314 J / (K \cdot mol)$ )

**Rezultat:** 499953.15 Pa.

#### Zadatak 495 (Branka, srednja škola)

Koliki je specifični toplinski kapacitet tvari ako je potrebno dovesti toplinu od 20 kJ da bi se 10 kg tvari zagrijalo za  $5^\circ C$ ?

- A. 5      B. 20      C. 200      D. 400

#### Rješenje 495

$$Q = 20 kJ = 2 \cdot 10^4 J, \quad m = 10 kg, \quad \Delta t = 5^\circ C, \quad c = ?$$

Međunarodni sustav mjernih jedinica (SI) za temperaturu propisuje jedinicu kelvin (K). Tu temperaturu zovemo termodinamička temperatura (T).

Toplina Q je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t,$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow m \cdot c \cdot \Delta t = Q \Rightarrow m \cdot c \cdot \Delta t = Q / \frac{1}{m \cdot \Delta t} \Rightarrow c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t} = \frac{2 \cdot 10^4 J}{10 kg \cdot 5^\circ C} = 400 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}.$$

Odgovor je pod D.

#### Vježba 495

Koliki je specifični toplinski kapacitet tvari ako je potrebno dovesti toplinu od 40 kJ da bi se 20 kg tvari zagrijalo za  $5^\circ C$ ?

- A. 5      B. 20      C. 200      D. 400

**Rezultat:** D.

#### Zadatak 496 (Branka, srednja škola)

Kolika je masa utega koji možemo podići 5 m uvis koristeći toplinu koju oslobodi tijelo mase 600 g kad se ohladi sa  $150^\circ C$  na  $20^\circ C$ ? (specifični toplinski kapacitet tijela  $c = 880 J / (kg \cdot K)$ , ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 m / s^2$ )

#### Rješenje 496

$$h = 5 m, \quad m_1 = 600 g = 0.6 kg, \quad t_1 = 150^\circ C, \quad t_2 = 20^\circ C, \quad c = 880 J / (kg \cdot K), \\ g = 9.81 m / s^2, \quad m_2 = ?$$

Potencijalna energija je energija međudjelovanja tijela. Ona ovisi o međusobnom položaju tijela ili o međusobnom položaju dijelova tijela. U polju sile teže tijelo mase m ima gravitacijsku potencijalnu energiju

$$E_{gp} = m \cdot g \cdot h,$$

gdje je  $g$  akceleracija slobodnog pada, a  $h$  vertikalna udaljenost tijela od mjesta gdje bi prema dogovoru tijelo imalo energiju nula.

#### Zakon očuvanja energije:

- Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo pretvoriti iz jednog oblika u drugi.
- Ukupna energija zatvorenog (izoliranog) sustava konstantna je bez obzira na to koji se procesi zbivaju u tom sustavu.
- Kad se u nekom procesu pojavi gubitak nekog oblika energije, mora se pojaviti i jednak prirast nekog drugog oblika energije.

Toplina  $Q$  je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_1 - t_2),$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $c$  specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

Međunarodni sustav mjernih jedinica (SI) za temperaturu propisuje jedinicu kelvin (K). Tu temperaturu zovemo termodinamička temperatura (T).

Temperaturna razlika od 1 K jednaka je temperaturnoj razlici od 1 °C, što izražavamo jednadžbom:

$$\Delta T (K) = \Delta t (^\circ C).$$

Budući da se toplinska energija utroši na podizanje utega mase  $m_2$  na visinu  $h$ , vrijedi:

$$E_{gp} = Q \Rightarrow m_2 \cdot g \cdot h = m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2) \Rightarrow m_2 \cdot g \cdot h = m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2) / \frac{1}{g \cdot h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{m_1 \cdot c \cdot (t_1 - t_2)}{g \cdot h} = \frac{0.6 \text{ kg} \cdot 880 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot c \cdot (150 - 20) \text{ K}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m}} = 1399.39 \text{ kg} \approx 1400 \text{ kg}.$$

#### Vježba 496

Kolika je masa utega koji možemo podići 500 cm uvis koristeći toplinu koju oslobodi tijelo mase 0.6 kg kad se ohladi sa 150 °C na 20 °C? (specifični toplinski kapacitet tijela  $c = 880 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ , ubrzanje slobodnog pada  $g = 9.81 \text{ m} / \text{s}^2$ )

**Rezultat:** 1400 kg.

#### Zadatak 497 (Ljuba, srednja škola)

Pri 20 °C čelična kugla ima promjer 0.900 cm. Pri istoj temperaturi promjer rupe u aluminijskoj ploči iznosi 0.899 cm. Pri kojoj će temperaturi (istoj za kuglu i ploču) kugla proći kroz rupu? (koeficijent linearnog rastezanja čelika  $\beta_1 = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , koeficijent linearnog rastezanja aluminijske  $\beta_2 = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )

#### Rješenje 497

$$t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \quad d_1 = 0.900 \text{ cm} = 0.900 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \quad d_2 = 0.899 \text{ cm} = 0.899 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$\beta_1 = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \beta_2 = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad t = ?$$

Kad štapu nekog čvrstog tijela, koji prema dogovoru pri 0 °C ima duljinu  $l_0$ , povisimo temperaturu za  $t$  (od 0 °C do  $t$ ), on će se produljiti za:

$$\Delta l = \beta \cdot l_0 \cdot t,$$

gdje je  $\beta$  koeficijent linearnog rastezanja koji se definira izrazom:

$$\beta = \frac{l_t - l_0}{l_0 \cdot t}.$$

Jedinica za koeficijent linearnog rastezanja je  $\text{K}^{-1}$ . Iz izraza za  $\beta$  slijedi da će nakon zagrijavanja duljina štapa biti jednaka:

$$l_t = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t).$$

Taj izraz vrijedi i za kubično rastezanje tekućine, kao i za šuplja čvrsta tijela.  
Ako je  $l_1$  duljina štapa na temperaturi  $t_1$ , onda je duljina štapa na temperaturi  $t_2$  (ako se ona ne razlikuje znatno od temperature  $t_1$ ) dana relacijom

$$l_2 = l_1 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t),$$

gdje je  $\beta$  koeficijent linearnog rastezanja,

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Međunarodni sustav mjernih jedinica (SI) za temperaturu propisuje jedinicu kelvin (K). Tu temperaturu zovemo termodinamička temperatura (T).

Temperaturna razlika od 1 K jednaka je temperaturnoj razlici od 1 °C, što izražavamo jednadžbom:

$$\Delta T (K) = \Delta t (^\circ C).$$

1. inačica

Da bi čelična kugla prošla kroz rupu u aluminijskoj ploči njihovi promjeri moraju biti jednaki.

$$\begin{aligned} d_1 \cdot (1 + \beta_1 \cdot \Delta t) &= d_2 \cdot (1 + \beta_2 \cdot \Delta t) \Rightarrow d_1 + d_1 \cdot \beta_1 \cdot \Delta t = d_2 + d_2 \cdot \beta_2 \cdot \Delta t \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_1 \cdot \beta_1 \cdot \Delta t - d_2 \cdot \beta_2 \cdot \Delta t = d_2 - d_1 \Rightarrow \Delta t \cdot (d_1 \cdot \beta_1 - d_2 \cdot \beta_2) = d_2 - d_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta t \cdot (d_1 \cdot \beta_1 - d_2 \cdot \beta_2) = d_2 - d_1 \cdot \frac{1}{d_1 \cdot \beta_1 - d_2 \cdot \beta_2} \Rightarrow \Delta t = \frac{d_2 - d_1}{d_1 \cdot \beta_1 - d_2 \cdot \beta_2} = \\ &= \frac{0.899 \cdot 10^{-2} \text{ m} - 0.900 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0.900 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 1.1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} - 0.899 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 2.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}} = 101.24 \text{ }^\circ C. \end{aligned}$$

Tražena temperatura iznosi:

$$t = t_o + \Delta t = 20 \text{ }^\circ C + 101.24 \text{ }^\circ C = 121.24 \text{ }^\circ C \approx 121 \text{ }^\circ C.$$

2. inačica

Najprije izračunamo na temperaturi 0 °C promjer:

- čelične kugle

$$\begin{aligned} d_1 &= d_{o1} \cdot (1 + \beta_1 \cdot t_o) \Rightarrow d_{o1} \cdot (1 + \beta_1 \cdot t_o) = d_1 \Rightarrow d_{o1} \cdot (1 + \beta_1 \cdot t_o) = d_1 \cdot \frac{1}{1 + \beta_1 \cdot t_o} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_{o1} = \frac{d_1}{1 + \beta_1 \cdot t_o} = \frac{0.900 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1 + 1.1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} \cdot 20 \text{ }^\circ C} = 0.8998 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

- rupe u aluminijskoj ploči

$$\begin{aligned} d_2 &= d_{o2} \cdot (1 + \beta_2 \cdot t_o) \Rightarrow d_{o2} \cdot (1 + \beta_2 \cdot t_o) = d_2 \Rightarrow d_{o2} \cdot (1 + \beta_2 \cdot t_o) = d_2 \cdot \frac{1}{1 + \beta_2 \cdot t_o} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_{o2} = \frac{d_2}{1 + \beta_2 \cdot t_o} = \frac{0.899 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1 + 2.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C} \cdot 20 \text{ }^\circ C} = 0.8986 \cdot 10^{-2} \text{ m}. \end{aligned}$$

Da bi čelična kugla prošla kroz rupu u aluminijskoj ploči njihovi promjeri moraju biti jednaki.

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 \Rightarrow d_{o1} \cdot (1 + \beta_1 \cdot t) = d_{o2} \cdot (1 + \beta_2 \cdot t) \Rightarrow d_{o1} + d_{o1} \cdot \beta_1 \cdot t = d_{o2} + d_{o2} \cdot \beta_2 \cdot t \Rightarrow \\ &\Rightarrow d_{o1} \cdot \beta_1 \cdot t - d_{o2} \cdot \beta_2 \cdot t = d_{o2} - d_{o1} \Rightarrow t \cdot (d_{o1} \cdot \beta_1 - d_{o2} \cdot \beta_2) = d_{o2} - d_{o1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t \cdot (d_{o1} \cdot \beta_1 - d_{o2} \cdot \beta_2) = d_{o2} - d_{o1} \cdot \frac{1}{d_{o1} \cdot \beta_1 - d_{o2} \cdot \beta_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{d_{o2} - d_{o1}}{d_{o1} \cdot \beta_1 - d_{o2} \cdot \beta_2} = \frac{0.8986 \cdot 10^{-2} \text{ m} - 0.8998 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0.8998 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 1.1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}} - 0.8986 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 2.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}} =$$

$$= 121.56 \text{ }^\circ\text{C} \approx 121 \text{ }^\circ\text{C}.$$

### Vježba 497

Pri 20 °C čelična kugla ima promjer 9.00 mm. Pri istoj temperaturi promjer rupe u aluminijskoj ploči iznosi 8.99 mm. Pri kojoj će temperaturi (istoj za kuglu i ploču) kugla proći kroz rupu? (koeficijent linearnog rastezanja čelika  $\beta_1 = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , koeficijent linearnog rastezanja aluminijska  $\beta_2 = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )

**Rezultat:** 121 °C.

### Zadatak 498 (Antonia, gimnazija)

Šipka od mjedi na temperaturi 20 °C ima duljinu 1000 mm, a na temperaturi 100 °C 1001.44 mm. Koliki je koeficijent linearnog rastezanja mjedi?

### Rješenje 498

$$t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \quad l_1 = 1000 \text{ mm}, \quad t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}, \quad l_2 = 1001.44 \text{ mm}, \quad \beta = ?$$

Kad štapu nekog čvrstog tijela, koji prema dogovoru pri 0 °C ima duljinu  $l_0$ , povisimo temperaturu za  $t$  (od 0 °C do  $t$ ), on će se produljiti za:

$$\Delta l = \beta \cdot l_0 \cdot t,$$

gdje je  $\beta$  koeficijent linearnog rastezanja koji se definira izrazom:

$$\beta = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot t}.$$

Jedinica za koeficijent linearnog rastezanja je  $\text{K}^{-1}$ . Iz izraza za  $\beta$  slijedi da će nakon zagrijavanja duljina štapa biti jednaka:

$$l_t = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t).$$

Taj izraz vrijedi i za kubično rastezanje tekućine, kao i za šuplja čvrsta tijela.

Ako je  $l_1$  duljina štapa na temperaturi  $t_1$ , onda je duljina štapa na temperaturi  $t_2$  (ako se ona ne razlikuje znatno od temperature  $t_1$ ) dana relacijom

$$l_2 = l_1 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t),$$

gdje je  $\beta$  koeficijent linearnog rastezanja,

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1) \\ l_2 = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1)}{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2)} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1)}{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \beta \cdot t_1}{1 + \beta \cdot t_2} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \beta \cdot t_1}{1 + \beta \cdot t_2} \cdot l_2 \cdot (1 + \beta \cdot t_2) \Rightarrow l_1 \cdot (1 + \beta \cdot t_2) = l_2 \cdot (1 + \beta \cdot t_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1 + l_1 \cdot \beta \cdot t_2 = l_2 + l_2 \cdot \beta \cdot t_1 \Rightarrow l_1 \cdot \beta \cdot t_2 - l_2 \cdot \beta \cdot t_1 = l_2 - l_1 \Rightarrow \beta \cdot (l_1 \cdot t_2 - l_2 \cdot t_1) = l_2 - l_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \cdot (l_1 \cdot t_2 - l_2 \cdot t_1) = l_2 - l_1 \cdot \frac{1}{l_1 \cdot t_2 - l_2 \cdot t_1} \Rightarrow \beta = \frac{l_2 - l_1}{l_1 \cdot t_2 - l_2 \cdot t_1} =$$

$$= \frac{1001.44 \text{ mm} - 1000 \text{ mm}}{1000 \text{ mm} \cdot 100^\circ\text{C} - 1001.44 \text{ mm} \cdot 20^\circ\text{C}} = 1.8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

### Vježba 498

Šipka od mjedi na temperaturi  $20^\circ\text{C}$  ima duljinu 1 m, a na temperaturi  $100^\circ\text{C}$  100.144 cm. Koliki je koeficijent linearnog rastezanja mjedi?

**Rezultat:**  $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ } 1 / ^\circ\text{C}$ .

### Zadatak 499 (Zoran, gimnazija)

Za koliko će se povećati volumen aluminijske kugle ako se zagrije dovođenjem topline 200 kJ? (gustoća aluminijske kugle  $\rho = 2700 \text{ kg} / \text{m}^3$ , specifični toplinski kapacitet aluminijske kugle  $c = 920 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ , koeficijent linearnog rastezanja aluminijske kugle  $\beta = 2.62 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ )

### Rješenje 499

$Q = 200 \text{ kJ} = 2 \cdot 10^5 \text{ J}$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg} / \text{m}^3$ ,  $c = 920 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\beta = 2.62 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ ,  $\Delta t = ?$

Gustoću  $\rho$  neke tvari možemo naći iz kvocijenta mase  $m$  tijela i njegova obujma  $V$ :

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Toplina  $Q$  je onaj dio unutarnje energije tijela koji prelazi s jednog tijela na drugo zbog razlike temperatura tih tijela. Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t,$$

gdje je  $m$  masa tijela,  $c$  specifični toplinski kapacitet, a  $\Delta t$  promjena temperature.

Ako su sve dimenzije čvrstog tijela podjednako izražene, riječ je o kubičnom rastezanju. Neka tijelo pri  $0^\circ\text{C}$  ima obujam  $V_0$ . Povećamo li tijelu temperaturu za  $\Delta t$  (od  $0^\circ\text{C}$  do  $t$ ,  $\Delta t = t - 0$ ), njegov će se obujam povećati za

$$\Delta V = 3 \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot V_0,$$

gdje je  $\beta$  koeficijent linearnog rastezanja.

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V_0} \\ Q = m \cdot c \cdot \Delta t \\ \Delta V = 3 \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V_0 \\ Q = m \cdot c \cdot \Delta t \\ \Delta V = 3 \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Q = \rho \cdot V_0 \cdot c \cdot \Delta t \\ \Delta V = 3 \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{Q} = \frac{3 \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot V_0}{\rho \cdot V_0 \cdot c \cdot \Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta V}{Q} = \frac{3 \cdot \beta}{\rho \cdot c} \Rightarrow \frac{\Delta V}{Q} = \frac{3 \cdot \beta}{\rho \cdot c} \cdot Q \Rightarrow \Delta V = \frac{3 \cdot \beta \cdot Q}{\rho \cdot c} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2.62 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ J}}{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 920 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = 6.3285 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 = 6.3285 \text{ cm}^3.$$

### Vježba 499

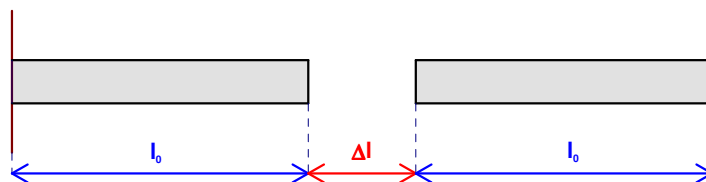
Za koliko će se povećati volumen aluminijske kugle ako se zagrije dovođenjem topline 0.2 MJ? (gustoća aluminijske kugle  $\rho = 2700 \text{ kg} / \text{m}^3$ , specifični toplinski kapacitet aluminijske kugle  $c = 920 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ , koeficijent linearnog rastezanja aluminijske kugle  $\beta = 2.62 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ )

**Rezultat:**  $6.3285 \text{ cm}^3$ .



### Zadatak 500 (Ivana, gimnazija)

Na dva okomita zida učvršćena su dva čelična štap duljine 50 cm na 0 °C (slika). Razmak između štapova na 0 °C je 0.5 mm. Kolika je temperatura potrebna da se štapovi dodiruju? (koeficijent linearnog rastezanja čelika  $\beta = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )



### Rješenje 500

$l_0 = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$ ,  $t_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\Delta l = 0.5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\beta = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  
 $t_2 = ?$

Kad štapu nekog čvrstog tijela, koji prema dogovoru pri 0 °C ima duljinu  $l_0$ , povisimo temperaturu za  $t$  (od 0 °C do  $t$ ), on će se produžiti za:

$$\Delta l = \beta \cdot l_0 \cdot t,$$

gdje je  $\beta$  koeficijent linearnog rastezanja koji se definira izrazom:

$$\beta = \frac{l_t - l_0}{l_0 \cdot t}.$$

Budući da su štapovi jednaki, pretpostavljamo da će se svaki produžiti za

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta l.$$

Potrebna promjena temperature  $\Delta t$  iznosi:

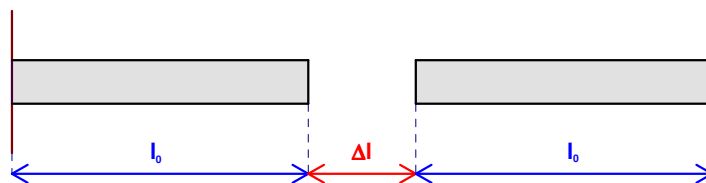
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \Delta l &= \beta \cdot l_0 \cdot \Delta t \Rightarrow \beta \cdot l_0 \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot \Delta l \Rightarrow \beta \cdot l_0 \cdot \Delta t = \frac{1}{2} \cdot \Delta l / \frac{1}{\beta \cdot l_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{\Delta l}{2 \cdot \beta \cdot l_0} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}}{2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 0.5 \text{ m}} = 41.67 \text{ }^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Konačna je temperatura:

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 0 \text{ }^\circ\text{C} + 41.67 \text{ }^\circ\text{C} = 41.67 \text{ }^\circ\text{C}.$$

### Vježba 500

Na dva okomita zida učvršćena su dva čelična štap duljine 5 dm na 0 °C (slika). Razmak između štapova na 0 °C je 0.5 mm. Kolika je temperatura potrebna da se štapovi dodiruju? (koeficijent linearnog rastezanja čelika  $\beta = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )



**Rezultat:** 41.67 °C.