

Zadatak 161 (Marijan, elektrotehnička škola)

Kolika je kinetička energija translatornoga gibanja $\overline{E_k}$ molekula amonijaka (NH_3) mase 10 g pri 20 °C? (plinska konstanta $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, molna masa amonijaka $M = 17 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$)

Rješenje 161

$m = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}$, $t = 20 \text{ °C} \Rightarrow T = 273 + t = 273 \text{ K} + 20 \text{ K} = 293 \text{ K}$,
 $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, $M = 17 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$,
Srednja kinetička energija molekula plina dana je izrazom:

$$N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

gdje je N broj molekula, $\overline{E_k}$ srednja kinetička energija jedne molekule plina, m masa plina, M molna masa plina, R plinska konstanta, T termodinamička temperatura.

Kinetička energija translatornog gibanja molekula amonijaka iznosi:

$$N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T = \frac{3}{2} \cdot \frac{0.01 \text{ kg}}{17 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 293 \text{ K} = 2149.41 \text{ J}.$$

Vježba 161

Kolika je kinetička energija translatornoga gibanja $\overline{E_k}$ molekula amonijaka (NH_3) mase 100 g pri 20 °C? (plinska konstanta $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, molna masa amonijaka $M = 17 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$)

Rezultat: 21494.14 J.

Zadatak 162 (Marijan, elektrotehnička škola)

Izračunaj srednju kinetičku energiju gibanja molekula koje se nalaze u 1 m³ kisika uz normirane uvjete. (normirani uvjeti: $t = 0 \text{ °C}$, $p_0 = 101325 \text{ Pa}$)

Rješenje 162

$$V = 1 \text{ m}^3, \quad p = p_0 = 101325 \text{ Pa}, \quad N \cdot \overline{E_k} = ?$$

Ako je zadana množina n idealnog plina, jednadžba stanja plina glasi

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T.$$

Srednja kinetička energija molekula plina dana je izrazom:

$$N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T,$$

gdje je N broj molekula, $\overline{E_k}$ srednja kinetička energija jedne molekule plina, n množina plina, R plinska konstanta, T termodinamička temperatura.

Srednja kinetička energija gibanja molekula plina iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} p \cdot V = n \cdot R \cdot T \\ N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p \cdot V = n \cdot R \cdot T \cdot \frac{1}{R \cdot T} \\ N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} \\ N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{p \cdot V}{R \cdot T} \cdot R \cdot T \Rightarrow N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot \frac{p \cdot V}{R \cdot T} \cdot R \cdot T \Rightarrow N \cdot \overline{E_k} = \frac{3}{2} \cdot p \cdot V =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot 101325 \text{ Pa} \cdot 1 \text{ m}^3 = 151987.5 \text{ J}.$$

Vježba 162

Izračunaj srednju kinetičku energiju gibanja molekula koje se nalaze u 2 m^3 kisika uz normirane uvjete. (normirani uvjeti: $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $p_0 = 101325 \text{ Pa}$)

Rezultat: 303975 J.

Zadatak 163 (Hrvoje, elektrotehnička škola)

Idealni Carnotov stroj prima u svakom ciklusu 100 kJ od spremnika topline pri višoj temperaturi $127 \text{ }^\circ\text{C}$ i daje 80 kJ hladnijem spremniku. Kolika je temperatura hladnijeg spremnika?

Rješenje 163

$$Q_1 = 100 \text{ kJ} = 10^5 \text{ J}, \quad t_1 = 127 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T_1 = 273 + t_1 = 273 \text{ K} + 127 \text{ K} = 400 \text{ K},$$

$$Q_2 = 80 \text{ kJ} = 8 \cdot 10^4 \text{ J}, \quad t_2 = ?$$

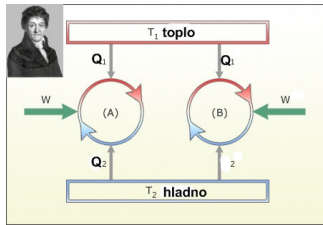
Pri toplinskim strojevima dio unutrašnje energije plinova i para (radnog tijela) pretvaramo u rad. To je moguće samo kad se radno tijelo nalazi između spremnika više i spremnika niže temperature. Za vrijeme jednoga kružnog procesa radno tijelo primi od toplijeg spremnika toplinu Q_1 i preda hladnijem spremniku toplinu Q_2 . Promjena topline $Q_1 - Q_2$ pri idealnom stroju prelazi u mehanički rad W :

$$W = Q_1 - Q_2.$$

Korisnost η nekoga toplinskog stroja govori o tome koliki je dio topline dobivene od toplijeg spremnika prešao u mehanički rad W , tj.

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

gdje su T_1 i T_2 temperature toplijeg odnosno hladnijeg spremnika.



Temperatura hladnijeg spremnika iznosi:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \\ \eta &= \frac{T_1 - T_2}{T_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad / \cdot T_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \cdot T_1 = T_1 - T_2 \Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \cdot T_1 \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(1 - \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \frac{Q_1 - (Q_1 - Q_2)}{Q_1} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \frac{Q_1 - Q_1 + Q_2}{Q_1} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \frac{Q_2}{Q_1} =$$

$$= 400 \text{ K} \cdot \frac{8 \cdot 10^4 \text{ J}}{10^5 \text{ J}} = 320 \text{ K} \Rightarrow \left. \begin{aligned} T_2 &= 320 \text{ K} \\ T_2 &= 273 + t_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} T_2 &= 320 \text{ K} \\ t_2 &= T_2 - 273 \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_2 = 320 \text{ }^\circ\text{C} - 273 \text{ }^\circ\text{C} = 47 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Vježba 163

Idealni Carnotov stroj prima u svakom ciklusu 200 kJ od spremnika topline pri višoj temperaturi $127 \text{ }^\circ\text{C}$ i daje 160 kJ hladnijem spremniku. Kolika je temperatura hladnijeg spremnika?

Rezultat: $47 \text{ }^\circ\text{C}$.

Zadatak 164 (Pero, srednja škola)

Koliko se kilograma kisika nalazi u spremniku volumena 3 m^3 u kojem vlada tlak od 20 MPa i temperatura $27 \text{ }^\circ\text{C}$? (molna masa kisika $M = 32 \text{ g/mol}$, plinska konstanta $R = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$)

Rješenje 164

$$V = 3 \text{ m}^3, \quad p = 20 \text{ MPa} = 2 \cdot 10^7 \text{ Pa}, \quad t = 27 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T = 273 + t = 273 \text{ K} + 27 \text{ K} = 300 \text{ K},$$

$$M = 32 \text{ g/mol} = 0.032 \text{ kg/mol}, \quad R = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}, \quad m = ?$$

Jednadžba plinskog stanja idealnog plina glasi:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

gdje je p tlak plina, V obujam plina, m masa plina, M molna masa plina, R plinska konstanta, T termodinamička temperatura plina.

Masa m kisika u spremniku iznosi:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \frac{M}{R \cdot T} \Rightarrow m = \frac{p \cdot V \cdot M}{R \cdot T} = \frac{2 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot 3 \text{ m}^3 \cdot 0.032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K}} = 769.79 \text{ kg}.$$

Vježba 164

Koliko se kilograma kisika nalazi u spremniku volumena 6 m^3 u kojem vlada tlak od 20 MPa i temperatura $27 \text{ }^\circ\text{C}$? (molna masa kisika $M = 32 \text{ g/mol}$, plinska konstanta $R = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$)

Rezultat: 1539.57 kg.

Zadatak 165 (Pero, srednja škola)

Koliki bi bio volumen kisika, sadržan u spremniku volumena 3 m^3 u kojem vlada tlak od 20 MPa i temperatura $27 \text{ }^\circ\text{C}$, ako bismo pustili da se rasteže pri atmosferskom tlaku i temperaturi $50 \text{ }^\circ\text{C}$? (atmosferski tlak $p = 101325 \text{ Pa}$)

Rješenje 165

$V_1 = 3 \text{ m}^3$, $p_1 = 20 \text{ MPa} = 2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$, $t_1 = 27 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T_1 = 273 + t_1 = 273 \text{ K} + 27 \text{ K} = 300 \text{ K}$, $p_2 = 101325 \text{ Pa}$, $t_2 = 50 \text{ }^\circ\text{C} \Rightarrow T_2 = 273 + t_2 = 273 \text{ K} + 50 \text{ K} = 323 \text{ K}$, $V_2 = ?$

Općenitu ovisnost između tri parametra idealnog plina – obujma, tlaka i temperature – možemo izraziti zakonom koji sadrži sva tri plinska zakona:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2},$$

što vrijedi za određenu masu plina. To je jedan od oblika jednadžbe stanja plina.

Volumen V_2 iznosi:

$$\begin{aligned} \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} &\Rightarrow \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \cdot \frac{T_2}{p_2} \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2} \\ &= \frac{2 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot 3 \text{ m}^3 \cdot 323 \text{ K}}{300 \text{ K} \cdot 101325 \text{ Pa}} = 637.55 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Vježba 165

Koliki bi bio volumen kisika, sadržan u spremniku volumena 6 m^3 u kojem vlada tlak od 20 MPa i temperatura $27 \text{ }^\circ\text{C}$, ako bismo pustili da se rasteže pri atmosferskom tlaku i temperaturi $50 \text{ }^\circ\text{C}$? (atmosferski tlak $p = 101325 \text{ Pa}$)

Rezultat: 1275.10 m^3 .

Zadatak 166 (Vlado, tehnička škola)

Litru vode grijemo od temperature $20 \text{ }^\circ\text{C}$ do temperature $100 \text{ }^\circ\text{C}$ električnim ronilom snage 800 W priključenim na napon 220 V . Grijanje traje 7.4 min . Kolika je termička korisnost? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$)

Rješenje 166

$V = 1 \text{ l} \Rightarrow m = 1 \text{ kg}$, $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, $P = 800 \text{ W}$, $U = 220 \text{ V}$, $t = 7.4 \text{ min} = [7.4 \cdot 60] = 444 \text{ s}$, $c = 4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, $\eta = ?$

Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela. Snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije je

$$P = U \cdot I.$$

Električna energija kojom izvor opskrbljuje strujni krug i koja se pretvara u druge oblike energije u nekom trošilu za vrijeme t jednaka je

$$W = U \cdot I \cdot t \Rightarrow W = P \cdot t.$$

Omjer između energije koju iskorišćujemo od nekog stroja i ukupne energije koju ulažemo u stroj zovemo korisnost stroja η .

$$\eta = \frac{W_i}{W_u}.$$



Energija koju daje električni grijač ronila je

$$W = P \cdot t.$$

Energija potrebna za zagrijavanje vode je

$$Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1).$$

Termička je korisnost omjer dobivene energije za zagrijavanje Q i energije W dovedene protokom struje

$$\eta = \frac{Q}{W} \Rightarrow \eta = \frac{m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)}{P \cdot t} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 4190 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (100 - 20) \text{ K}}{800 \text{ W} \cdot 444 \text{ s}} = 0.94 = \frac{94}{100} = \frac{94}{100} = 94\%.$$

Vježba 166

Dvije litre vode grijemo od temperature 20 °C do temperature 100 °C električnim ronilom snage 1600 W priključenim na napon 220 V. Grijanje traje 7.4 min. Kolika je termička korisnost?

Rezultat: 94%.

Zadatak 167 (Gaby, maturantica srednje škole)

Električni bojler ima grijač snage 2 kW. Koliko litara vode može električni bojler zagrijati za 1 sat od temperature 9.1 °C do 95 °C? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$, gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 167

$P = 2 \text{ kW} = 2000 \text{ W}$, $t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, $t_1 = 9.1 \text{ °C}$, $t_2 = 95 \text{ °C}$, $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $V = ?$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela od t_1 na t_2 . Snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije je

$$P = U \cdot I.$$

Električna energija kojom izvor opskrbljuje strujni krug i koja se pretvara u druge oblike energije u nekom trošilu za vrijeme t jednaka je

$$W = U \cdot I \cdot t,$$

gdje je U napon između krajeva promatranog trošila, a I jakost struje.
Također vrijedi:



$$\left. \begin{array}{l} P = U \cdot I \\ W = U \cdot I \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow W = P \cdot t.$$

Toplina koju daje grijač električnog bojlera je

$$W = P \cdot t.$$

Toplina potrebna za zagrijavanje vode u bojleru iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \end{array} \right\} \Rightarrow Q = \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1).$$

Budući da nema gubitaka topline, toplina Q koju je primila voda u bojleru jednaka je toplini W koju je predao grijač električnog bojlera.

$$Q = W \Rightarrow \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot t \Rightarrow \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot t \cdot \frac{1}{\rho \cdot c \cdot (t_2 - t_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{P \cdot t}{\rho \cdot c \cdot (t_2 - t_1)} = \frac{2000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (95 - 9.1) \text{ K}} = 0.02 \text{ m}^3 = 20 \text{ dm}^3 = 20 \text{ l}.$$

Vježba 167

Električni bojler ima grijač snage 1 kW. Koliko litara vode može električni bojler zagrijati za 2 sata od temperature 9.1 °C do 95 °C? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$, gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 20 litara.

Zadatak 168 (Gaby, maturantica srednje škole)

Da bismo grijačem snage 5 kW zagrijali 45 kg vode od 293 K do 373 K potrebno je grijati vodu 1 sat. Kolika se pritom snaga izgubi na okolinu? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4186 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$)

Rješenje 168

$P_u = 5 \text{ kW} = 5000 \text{ W}$ – ukupna snaga, $m = 45 \text{ kg}$, $T_1 = 293 \text{ K}$, $T_2 = 373 \text{ K}$,
 $t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, $c = 4186 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$, $\Delta P = ?$

Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela od t_1 na t_2 .

Električna energija kojom izvor opskrbljuje strujni krug i koja se pretvara u druge oblike energije u nekom trošilu za vrijeme t jednaka je

$$W = P \cdot t,$$

gdje je P snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije.

Snaga grijača (uložena snaga) je

$$P_u.$$

Toplina potrebna za zagrijavanje vode pomoću grijača iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) \\ Q = W_i \end{array} \right\} \Rightarrow W_i = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1).$$

Iskorištena snaga P_i za zagrijavanje vode iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} W_i = P_i \cdot t \\ W_i = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) \end{array} \right\} \Rightarrow P_i \cdot t = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1) \quad /: t \Rightarrow P_i = \frac{m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)}{t}.$$

Snaga koja se izgubi na okolinu jednaka je razlici utrošene i iskorištene snage:

$$\Delta P = P_u - P_i \Rightarrow \Delta P = P_u - \frac{m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)}{t} = 5000 \text{ W} - \frac{45 \text{ kg} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (373 - 293) \text{ K}}{3600 \text{ s}} = 814 \text{ W}.$$

Vježba 168

Da bismo grijačem snage 5 kW zagrijali 90 kg vode od 293 K do 373 K potrebno je grijati vodu 2 sata. Kolika se pritom snaga izgubi na okolinu? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4186 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$)

Rezultat: 814 W.

Zadatak 169 (Gaby, maturantica srednje škole)

Električnim bojlerom treba zagrijati 22 litre vode od temperature $15 \text{ }^\circ\text{C}$ do $93 \text{ }^\circ\text{C}$. Koliku snagu mora imati grijač da bi se to postiglo za 2 sata zagrijavanja? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$, gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 169

$$V = 22 \text{ l} = 22 \text{ dm}^3 = 22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad t_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}, \quad t_2 = 93 \text{ }^\circ\text{C}, \quad t = 2 \text{ h} = 7200 \text{ s}, \\ c = 4200 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K}), \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad P = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela od t_1 na t_2 .

Električna energija kojom izvor opskrbljuje strujni krug i koja se pretvara u druge oblike energije u nekom trošilu za vrijeme t jednaka je

$$W = P \cdot t,$$

gdje je P snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije.

Toplina koju daje grijač električnog bojlera je

$$W = P \cdot t.$$

Toplina potrebna za zagrijavanje vode u bojleru iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \end{array} \right\} \Rightarrow Q = \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1).$$

Budući da nema gubitaka topline, toplina Q koju je primila voda u bojleru jednaka je toplini W koju je predao grijač električnog bojlera.

$$Q = W \Rightarrow \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot t \Rightarrow \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot t \quad /: \frac{1}{t} \Rightarrow \\ \Rightarrow P = \frac{\rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1)}{t} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (93 - 15) \text{ K}}{7200 \text{ s}} = 1001 \text{ W}.$$

Vježba 169

Električnim bojlerom treba zagrijati 11 litara vode od temperature 15 °C do 93 °C. Koliku snagu mora imati grijač da bi se to postiglo za 1 sat zagrijavanja? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4200 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$, gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 1001 W.

Zadatak 170 (Gaby, maturantica srednje škole)

Koliko dugo treba zagrijavati 2 litre vode uronjenom električnom grijalicom od 800 W da bismo ih zagrijali od 15 °C do 90 °C? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4170 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$, iskorištenje 100%)

Rješenje 170

$$V = 2 \text{ l} \Rightarrow m = 2 \text{ kg}, \quad P = 800 \text{ W}, \quad t_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}, \quad t_2 = 90 \text{ }^\circ\text{C}, \quad c = 4170 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)},$$
$$t = ?$$

Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela od t_1 na t_2 .

Električna energija kojom izvor opskrbljuje strujni krug i koja se pretvara u druge oblike energije u nekom trošilu za vrijeme t jednaka je

$$W = P \cdot t,$$

gdje je P snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije.



Toplina koju daje uronjena električna grijalica je

$$W = P \cdot t.$$

Toplina potrebna za zagrijavanje vode iznosi:

$$Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1).$$

Budući da nema gubitaka topline, toplina Q koju je primila voda jednaka je toplini W koju je predala električna grijalica

$$Q = W \Rightarrow m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot t \Rightarrow m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot t \cdot \frac{1}{P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)}{P} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 4170 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (90 - 15) \text{ K}}{800 \text{ W}} = 781.875 \text{ s} = [781.875 : 60] \approx 13.03 \text{ min.}$$

Vježba 170

Koliko dugo treba zagrijavati 4 litre vode uronjenom električnom grijalicom od 1600 W da bismo ih zagrijali od 15 °C do 90 °C? (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4170 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$, iskorištenje 100%)

Rezultat: 13.03 min.

Zadatak 171 (Gaby, maturantica srednje škole)

Električni grijač 100 W nalazi se u cijevi kojom protiče voda protokom od 3.5 cm³/s. Kolika će biti temperatura vode na izlazu iz cijevi, ako je ulazna temperatura vode 18 °C i specifični toplinski kapacitet vode $c = 4186 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$? Zanimajte gubitke topline u okolinu. (gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 171

$$P = 100 \text{ W}, \quad \frac{V}{t} = 3.5 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 3.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, \quad t_1 = 18 \text{ }^\circ\text{C}, \quad c = 4186 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)},$$
$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad t_2 = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela od t_1 na t_2 .

Električna energija kojom izvor opskrbljuje strujni krug i koja se pretvara u druge oblike energije u nekom trošilu za vrijeme t jednaka je

$$W = P \cdot t,$$

gdje je P snaga kojom se u trošilu električna energija pretvara u druge oblike energije.

Toplina koju grijač električnog bojlera oslobodi iznosi:

$$W = P \cdot t.$$

Toplina koju voda u bojleru primi je

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \end{array} \right\} \Rightarrow Q = \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1).$$

Budući da nema gubitaka topline, toplina Q koju je primila voda jednaka je toplini W koju je predala električna grijalica:

$$\begin{aligned} Q = W &\Rightarrow \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot t \Rightarrow \rho \cdot V \cdot c \cdot (t_2 - t_1) = P \cdot t \cdot \frac{1}{\rho \cdot V \cdot c} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_2 - t_1 &= \frac{P \cdot t}{\rho \cdot V \cdot c} \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{P \cdot t}{\rho \cdot V \cdot c} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{brojnik i nazivnik razlomka} \\ \text{podijelimo sa } t \end{array} \right] \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{P}{\rho \cdot \frac{V}{t} \cdot c} = \\ &= 18 \text{ } ^\circ\text{C} + \frac{100 \text{ W}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = 24,83 \text{ } ^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Vježba 171

Električni grijač 200 W nalazi se u cijevi kojom protiče voda protokom od $7 \text{ cm}^3/\text{s}$. Kolika će biti temperatura vode na izlazu iz cijevi, ako je ulazna temperatura vode $18 \text{ } ^\circ\text{C}$ i specifični toplinski kapacitet vode $c = 4186 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$? Zanimajte gubitke topline u okolinu. (gustoća vode $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$)

Rezultat: $24,83 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Zadatak 172 (Gaby, maturantica srednje škole)

Voda u bojleru se grije gorenjem zemnog plina. Koliko je plina potrebno da se 80 litara vode zagrije od $15 \text{ } ^\circ\text{C}$ do $75 \text{ } ^\circ\text{C}$? Gubitke zanemarujemo. (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4,19 \cdot 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, toplina izgaranja plina $q = 9 \text{ kWh}/\text{m}^3$)

Rješenje 172

$$\begin{aligned} V = 80 \text{ l} &\Rightarrow m = 80 \text{ kg}, \quad t_1 = 15 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad t_2 = 75 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad c = 4,19 \cdot 10^3 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}), \\ q = 9 \frac{\text{kWh}}{\text{m}^3} &= \left[9 \cdot 1000 \cdot 3600 \right] = 3,24 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}, \quad V = ? \end{aligned}$$

Toplina koju neko tijelo zagrijavanjem primi odnosno hlađenjem izgubi jednaka je

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1),$$

gdje je m masa tijela, c specifični toplinski kapacitet, a Δt promjena temperature tijela od t_1 na t_2 .

Toplina Q koja se oslobađa pri potpunom izgaranju goriva obujma V izražava se umnoškom

$$Q = q \cdot V,$$

gdje je q toplina izgaranja plina po jediničnom volumenu,

$$q = \frac{Q}{V}.$$

Toplina koja se dobije izgaranjem zemnog plina je

$$Q_1 = q \cdot V.$$

Toplina koju voda u bojleru primi iznosi:

$$Q_2 = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1).$$

Budući da nema gubitaka topline, toplina koju izgaranjem oslobodi zemni plin utroši se na zagrijavanje vode:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow q \cdot V = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow q \cdot V = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \cdot \frac{1}{q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)}{q} = \frac{80 \text{ kg} \cdot 4.19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (75 - 15) \text{ K}}{3.24 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}} = 0.621 \text{ m}^3.$$

Vježba 172

Voda u bojleru se grije gorenjem zemnog plina. Koliko je plina potrebno da se 80 litara vode zagrije od 10 °C do 70 °C? Gubitke zanemarujemo. (specifični toplinski kapacitet vode $c = 4.19 \cdot 10^3 \text{ J / (kg} \cdot \text{K)}$, toplina izgaranja plina $q = 9 \text{ kWh/m}^3$)

Rezultat: 0.621 m³.

Zadatak 173 (Mario, tehnička škola)

Koliki je stupanj korisnog djelovanja η automobila koji troši 6 litara benzina na sat, razvijajući pri tome snagu od 23 kW? (toplina izgaranja benzina $q = 4.6 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$, gustoća benzina $\rho = 750 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje 173

$$V = 6 \text{ l} = 6 \text{ dm}^3 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}, \quad P = 23 \text{ kW} = 2.3 \cdot 10^4 \text{ W},$$

$$q = 4.6 \cdot 10^7 \text{ J/kg}, \quad \rho = 750 \text{ kg/m}^3, \quad \eta = ?$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Omjer između energije koju iskorišćujemo W_i od nekog stroja i ukupne energije W_u koju ulažemo u stroj zovemo korisnost stroja η . Često je izražavamo u postotku.

$$\eta = \frac{W_i}{W_u}.$$

Toplina Q koja se oslobodi pri potpunom izgaranju goriva mase m izražava se umnoškom

$$Q = m \cdot q,$$

gdje je q specifična toplina izgaranja

$$q = \frac{Q}{m}.$$

Energija koju automobil iskoristi razvijajući pri tome snagu P iznosi:

$$W_i = P \cdot t.$$

Ukupna energija koja se oslobodi pri izgaranju benzina obujma V je:

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho \cdot V \\ W_u = m \cdot q \end{array} \right\} \Rightarrow W_u = \rho \cdot V \cdot q.$$

Stupanj korisnog djelovanja η automobila ima vrijednost:

$$\eta = \frac{W_i}{W_u} \Rightarrow \eta = \frac{P \cdot t}{\rho \cdot V \cdot q} = \frac{2.3 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s}}{750 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4.6 \cdot 10^7 \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 0.4 = \frac{40}{100} = \frac{40}{100} = 40\%.$$

Vježba 173

Koliki je stupanj korisnog djelovanja η automobila koji troši 12 litara benzina za 2 sata, razvijajući pri tome snagu od 23 kW? (toplina izgaranja benzina $q = 4.6 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$, gustoća benzina $\rho = 750 \text{ kg/m}^3$)

Rezultat: 40%.

Zadatak 174 (Denis, tehnička škola)

Pri 17°C plin ima obujam 5 litara i nalazi se pod tlakom $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Plin se izobarnim zagrijavanjem rasteže i pritom obavi rad 200 J. Za koliko se stupnjeva povisila temperatura plina?

Rješenje 174

$$t_1 = 17^\circ\text{C} \Rightarrow T_1 = 273 + t_1 = 273 \text{ K} + 17 \text{ K} = 290 \text{ K}, \quad V_1 = 5 \text{ l} = 5 \text{ dm}^3 = 0.005 \text{ m}^3,$$

$$p = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \text{konst.}, \quad W = 200 \text{ J}, \quad \Delta t = \Delta T = ?$$

Kad plinu dovodimo toplinu uz stalan tlak (izobarna promjena), plin se rasteže i obavlja rad koji je jednak

$$W = p \cdot \Delta V \Rightarrow W = p \cdot (V_2 - V_1).$$

Kad je tlak plina stalan, a mijenja se temperatura (izobarna promjena), obujam dane mase plina mijenjat će se prema Gay-Lussacovu zakonu:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

što znači da za različita stanja iste mase nekog plina, uz stalan tlak, omjer $\frac{V}{T}$ ostaje uvijek isti.

Budući da je zagrijavanje plina izobarno (tlak je konstantan), plin utroši rad

$$W = p \cdot \Delta V.$$

Pomoću tog rada W dobije se obujam plina V_2 nakon zagrijavanja.

$$\left. \begin{array}{l} W = p \cdot \Delta V \\ \Delta V = V_2 - V_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} W = p \cdot \Delta V \quad /: p \\ V_2 = V_1 + \Delta V \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Delta V = \frac{W}{p} \\ V_2 = V_1 + \Delta V \end{array} \right\} \Rightarrow V_2 = V_1 + \frac{W}{p}.$$

Tlak plina je konstantan (izobarna promjena) pa se konačna temperatura T_2 plina nakon zagrijavanja dobije iz Gay-Lussacova zakona:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow V_1 \cdot T_2 = T_1 \cdot V_2 \quad /: \frac{1}{V_1} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1 \cdot V_2}{V_1} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{V_1} \cdot V_2 \Rightarrow \left[V_2 = V_1 + \frac{W}{p} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{V_1} \cdot \left(V_1 + \frac{W}{p} \right) = \frac{290 \text{ K}}{0.005 \text{ m}^3} \cdot \left(0.005 \text{ m}^3 + \frac{200 \text{ J}}{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \right) = 348 \text{ K}.$$

Temperatura plina povisila se za:

$$\Delta T = \Delta t = T_2 - T_1 = 348 \text{ K} - 290 \text{ K} = 58 \text{ K} = 58^\circ\text{C}.$$

Vježba 174

Pri 17 °C plin ima obujam 5 litara i nalazi se pod tlakom 200 kPa. Plin se izobarnim zagrijavanjem rasteže i pritom obavi rad 0.2 kJ. Za koliko se stupnjeva povisila temperatura plina?

Rezultat: 58 K.

Zadatak 175 (Denis, tehnička škola)

Koliki rad utroši plin početnog obujma 3 litre kad mu se uz stalni tlak $2.026 \cdot 10^5$ Pa povisi temperatura od 27 °C na 227 °C?

Rješenje 175

$$V_1 = 3 \text{ l} = 3 \text{ dm}^3 = 0.003 \text{ m}^3, \quad p = 2.026 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \text{konst.}, \\ t_1 = 27 \text{ °C} \Rightarrow T_1 = 273 + t_1 = 273 \text{ K} + 27 \text{ K} = 300 \text{ K}, \\ t_2 = 227 \text{ °C} \Rightarrow T_2 = 273 + t_2 = 273 \text{ K} + 227 \text{ K} = 500 \text{ K}, \quad W = ?$$

Kad plinu dovodimo toplinu uz stalan tlak (izobarna promjena), plin se rasteže i obavlja rad koji je jednak

$$W = p \cdot \Delta V \Rightarrow W = p \cdot (V_2 - V_1).$$

Kad je tlak plina stalan, a mijenja se temperatura (izobarna promjena), obujam dane mase plina mijenjat će se prema Gay-Lussacovu zakonu:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

što znači da za različita stanja iste mase nekog plina, uz stalni tlak, omjer $\frac{V}{T}$ ostaje uvijek isti.

Budući da je zagrijavanje plina izobarno (tlak je konstantan),

- plin utroši rad: $W = p \cdot \Delta V$.
- obujam dane mase plina mijenjat će se prema Gay-Lussacovu zakonu: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$.

Rad koji utroši plin kad mu se uz stalni tlak povisi temperatura iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \\ W = p \cdot \Delta V \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \cdot T_2 \\ W = p \cdot (V_2 - V_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_2 = \frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} \\ W = p \cdot (V_2 - V_1) \end{array} \right\} \Rightarrow W = p \cdot \left(\frac{V_1 \cdot T_2}{T_1} - V_1 \right) = \\ = 2.026 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \left(\frac{0.003 \text{ m}^3 \cdot 500 \text{ K}}{300 \text{ K}} - 0.003 \text{ m}^3 \right) = 405.2 \text{ J}.$$

Vježba 175

Koliki rad utroši plin početnog obujma 3 litre kad mu se uz stalni tlak $4.052 \cdot 10^5$ Pa povisi temperatura od 27 °C na 227 °C?

Rezultat: 810.4 J.

Zadatak 176 (Denis, tehnička škola)

Pri 10 °C kisik mase 10 g nalazi se pod tlakom $3 \cdot 10^5$ Pa. Nakon zagrijavanja pri stalnom tlaku plin je povećao obujam na 10 litara. Nađi rad što ga je utrošio plin pri povećanju obujma. (molna masa kisika $M = 32$ g/mol, plinska konstanta $R = 8.314$ J/(mol · K))

Rješenje 176

$$t = 10 \text{ °C} \Rightarrow T = 273 + t = 273 \text{ K} + 10 \text{ K} = 283 \text{ K}, \quad m = 10 \text{ g} = 0.01 \text{ kg}, \\ p = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \text{konst.}, \quad V_2 = 10 \text{ l} = 10 \text{ dm}^3 = 0.01 \text{ m}^3, \quad M = 32 \text{ g/mol} = 0.032 \text{ kg/mol}, \\ R = 8.314 \text{ J/(mol · K)}, \quad W = ?$$

Kad plinu dovodimo toplinu uz stalan tlak (izobarna promjena), plin se rasteže i obavlja rad koji je jednak

$$W = p \cdot \Delta V \Rightarrow W = p \cdot (V_2 - V_1).$$

Jednadžba stanja plina glasi

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

gdje je p tlak plina, V obujam plina, m masa plina, M molna masa plina, R plinska konstanta, T termodinamička temperatura plina.

Početni obujam plina V_1 naći ćemo iz opće jednadžbe stanja plina:

$$p \cdot V_1 = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow p \cdot V_1 = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \frac{1}{p} \Rightarrow V_1 = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot p}.$$

Budući da je zagrijavanje plina izobarno (tlak je konstantan), plin utroši rad:

$$\begin{aligned} W &= p \cdot \Delta V \Rightarrow W = p \cdot (V_2 - V_1) \Rightarrow \left[V_1 = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot p} \right] \Rightarrow W = p \cdot \left(V_2 - \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot p} \right) = \\ &= 3 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \left(0.01 \text{ m}^3 - \frac{0.01 \text{ kg} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 283 \text{ K}}{0.032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \right) = 2264.73 \text{ J}. \end{aligned}$$

Vježba 176

Pri 10 °C kisik mase 1 dag nalazi se pod tlakom 300 kPa. Nakon zagrijavanja pri stalnom tlaku plin je povećao obujam na 10 litara. Nađi rad što ga je utrošio plin pri povećanju obujma.

Rezultat: 2264.73 J.

Zadatak 177 (Marina, gimnazija)

Staklena boca napunjena je 50.00 cm³ žive pri 18 °C. Koliki će se obujam žive prelići preko grlića boce kad temperatura žive poraste na 38 °C? (koeficijent linearnog rastezanja stakla $\beta = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, koeficijent kubičnog rastezanja žive $\alpha = 18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

Rješenje 177

$$\begin{aligned} V_{18, \text{živa}} &= 50.00 \text{ cm}^3, & t_1 &= 18 \text{ °C} - 0 \text{ °C} = 18 \text{ °C} = 18 \text{ K} \text{ promjena temperature,} \\ V_{18, \text{staklo}} &= 50.00 \text{ cm}^3, & t_2 &= 38 \text{ °C} - 0 \text{ °C} = 38 \text{ °C} = 38 \text{ K} \text{ promjena temperature,} & \beta &= 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \\ \alpha &= 18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, & \Delta V &= ? \end{aligned}$$

Kad čvrstom tijelu povisimo temperaturu njegove se dimenzije povećaju. Ako su sve dimenzije čvrstog tijela (duljina, širina, visina) podjednako izražene, riječ je o kubičnom rastezanju. Neka tijelo pri 0 °C ima obujam V_0 . Povisimo li tijelu temperaturu za t (od 0 °C do t), njegov će se obujam povećati za

$$\Delta V = \alpha \cdot t \cdot V_0,$$

gdje je α koeficijent volumnog, kubičnog rastezanja. Taj izraz vrijedi i za volumno, kubično rastezanje tekućina, kao i za šuplja čvrsta tijela. Pri temperaturi t tijelo će imati obujam

$$V_t = V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \beta \cdot \Delta t), \quad \alpha = 3 \cdot \beta,$$

gdje je β koeficijent linearnog rastezanja.

Staklena boca napunjena je 50.00 cm³ žive pri 18 °C pa su njezin obujam i obujam žive isti. Kada temperatura poraste povećat će se obujmovi staklene boce i žive. Obujam žive bit će veći od obujma staklene boce jer je koeficijent kubičnog rastezanja žive veći od koeficijenta kubičnog rastezanja stakla.

Računamo obujam žive na temperaturi t_2 :

$$\left. \begin{aligned} V_{18, \text{živa}} &= V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_1) \\ V_{38, \text{živa}} &= V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{V_{38, \text{živa}}}{V_{18, \text{živa}}} = \frac{V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_2)}{V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_{38, \text{živa}}}{V_{18, \text{živa}}} = \frac{V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_2)}{V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t_1)} \Rightarrow \frac{V_{38, \text{živa}}}{V_{18, \text{živa}}} = \frac{1 + \alpha \cdot t_2}{1 + \alpha \cdot t_1} \cdot V_{18, \text{živa}} \Rightarrow V_{38, \text{živa}} = V_{18, \text{živa}} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot t_2}{1 + \alpha \cdot t_1}$$

Računamo obujam staklene boce na temperaturi t_2 :

$$\left. \begin{aligned} V_{18, \text{staklo}} &= V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \beta \cdot t_1) \\ V_{38, \text{staklo}} &= V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \beta \cdot t_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{V_{38, \text{staklo}}}{V_{18, \text{staklo}}} = \frac{V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \beta \cdot t_2)}{V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \beta \cdot t_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_{38, \text{staklo}}}{V_{18, \text{staklo}}} = \frac{V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \beta \cdot t_2)}{V_0 \cdot (1 + 3 \cdot \beta \cdot t_1)} \Rightarrow \frac{V_{38, \text{staklo}}}{V_{18, \text{staklo}}} = \frac{1 + 3 \cdot \beta \cdot t_2}{1 + 3 \cdot \beta \cdot t_1} \cdot V_{18, \text{živa}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{38, \text{staklo}} = V_{18, \text{staklo}} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \beta \cdot t_2}{1 + 3 \cdot \beta \cdot t_1}$$

Obujam žive ΔV koja se prelila preko grlića staklene boce jednak je razlici obujma žive i obujma staklene boce pri temperaturi t_2 :

$$\Delta V = V_{38, \text{živa}} - V_{38, \text{staklo}} \Rightarrow \Delta V = V_{18, \text{živa}} \cdot \frac{1 + \alpha \cdot t_2}{1 + \alpha \cdot t_1} - V_{18, \text{staklo}} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \beta \cdot t_2}{1 + 3 \cdot \beta \cdot t_1} =$$

$$= 50.00 \text{ cm}^3 \cdot \frac{1 + 18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 38 \text{ K}}{1 + 18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 18 \text{ K}} - 50.00 \text{ cm}^3 \cdot \frac{1 + 3 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 38 \text{ K}}{1 + 3 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 18 \text{ K}} = 0.152 \text{ cm}^3$$

Vježba 177

Staklena boca napunjena je 40.00 cm^3 žive pri $18 \text{ }^\circ\text{C}$. Koliki će se obujam žive preliti preko grlića boce kad temperatura žive poraste na $38 \text{ }^\circ\text{C}$? (koeficijent linearnog rastezanja stakla $\beta = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, koeficijent kubičnog rastezanja žive $\alpha = 18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

Rezultat: 0.122 cm^3 .

Zadatak 178 (Marina, gimnazija)

Štap od platine dugačak je pri $20 \text{ }^\circ\text{C}$ 998 mm . Pri kojoj će temperaturi štap biti dugačak 1 m ? (koeficijent linearnog rastezanja platine $\beta = 0.9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

Rješenje 178

$t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C} - 0 \text{ }^\circ\text{C} = 20 \text{ }^\circ\text{C} = 20 \text{ K}$, $l_1 = 998 \text{ mm} = 0.998 \text{ m}$, $l_2 = 1 \text{ m}$, $\beta = 0.9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $t_2 = ?$

Kad štapu nekog čvrstog tijela, koji prema dogovoru pri $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ima duljinu l_0 , povisimo temperaturu za t (od $0 \text{ }^\circ\text{C}$ do t), on će se produžiti za:

$$\Delta l = \beta \cdot l_0 \cdot t,$$

gdje je β koeficijent linearnog rastezanja koji se definira izrazom:

$$\beta = \frac{l_t - l_0}{l_0 \cdot t}$$

Jedinica za koeficijent linearnog rastezanja je K^{-1} . Iz izraza za β slijedi da će nakon zagrijavanja duljina štapa biti jednaka:

$$l_t = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t)$$

Pri linearnom rastezanju štapa promjena temperature Δt , kada se štap duljine l_1 rastegne na duljinu l_2 , iznosi:

$$\Delta t = \frac{l_2 - l_1}{\beta \cdot l_1}.$$

1. inačica

Duljina štapa na temperaturi t_1 je:

$$l_1 = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1).$$

Duljina štapa na temperaturi t_2 je:

$$l_2 = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2).$$

Temperatura štapa t_2 , pri kojoj će biti dugačak 1 m, dobije se rješavanjem sustava jednadžbi:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1) \\ l_2 &= l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1)}{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2)} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1)}{l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \beta \cdot t_1}{1 + \beta \cdot t_2} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{1 + \beta \cdot t_1}{1 + \beta \cdot t_2} \cdot \frac{l_2 \cdot (1 + \beta \cdot t_2)}{l_1} \Rightarrow 1 + \beta \cdot t_2 = \frac{l_2}{l_1} \cdot (1 + \beta \cdot t_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \cdot t_2 = \frac{l_2}{l_1} \cdot (1 + \beta \cdot t_1) - 1 \cdot \frac{1}{\beta} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{\beta} \cdot \left[\frac{l_2}{l_1} \cdot (1 + \beta \cdot t_1) - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{0.9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}} \cdot \left[\frac{1 \text{ m}}{0.998 \text{ m}} \cdot (1 + 0.9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 20 \text{ K}) - 1 \right] = 242.71 \text{ } ^\circ\text{C} \approx 243 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

2. inačica

Budući da se štap rasteže linearno, promjena temperature Δt , kada se štap duljine l_1 rastegne na duljinu l_2 , iznosi:

$$\Delta t = \frac{l_2 - l_1}{\beta \cdot l_1}.$$

Temperatura t_2 , pri kojoj će štap biti dugačak 1 m, ima vrijednost:

$$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{l_2 - l_1}{\beta \cdot l_1} = 20 \text{ } ^\circ\text{C} + \frac{1 \text{ m} - 0.998 \text{ m}}{0.9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 0.998 \text{ m}} = 242.67 \text{ } ^\circ\text{C} \approx 243 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Vježba 178

Štap od platine dugačak je pri $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ 9.98 dm. Pri kojoj će temperaturi štap biti dugačak 100 cm? (koeficijent linearnog rastezanja platine $\beta = 0.9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

Rezultat: 243 $^\circ\text{C}$.

Zadatak 179 (Marina, gimnazija)

Na drveni kotač promjera 100 cm treba staviti željezni obruč čiji je promjer 5 mm manji od promjera kotača. Za koliko stupnjeva treba povisiti temperaturu željeznom obruču? (koeficijent linearnog rastezanja željeza $\beta = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

Rješenje 179

$d_1 = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$, $\Delta d = 5 \text{ mm} = 0.005 \text{ m}$, $\beta = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\Delta t = ?$
Kad štapu nekog čvrstog tijela, koji prema dogovoru pri $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ ima duljinu l_0 , povisimo temperaturu za t (od $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ do t), on će se produžiti za:

$$\Delta l = \beta \cdot l_0 \cdot t,$$

gdje je β koeficijent linearnog rastezanja koji se definira izrazom:

$$\beta = \frac{l_t - l_0}{l_0 \cdot t}$$

Jedinica za koeficijent linearnog rastezanja je K^{-1} . Iz izraza za β slijedi da će nakon zagrijavanja duljina štapa biti jednaka:

$$l_t = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t)$$

Pri linearnom rastezanju štapa promjena temperature Δt kada se štap duljine l_1 rastegne na duljinu l_2 , iznosi:

$$\Delta t = \frac{l_2 - l_1}{\beta \cdot l_1}$$

Promjer željeznog obruča prije zagrijavanja je:



$$d = d_1 - \Delta d$$

Budući da se opseg željeznog obruča, a s njim i promjer rastežu linearno, promjena temperature Δt prilikom koje će se željezni obruč moći staviti na drveni kotač, iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta t = \frac{\Delta d}{\beta \cdot d} \\ d = d_1 - \Delta d \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta d}{\beta \cdot (d_1 - \Delta d)} = \frac{0.005 \text{ m}}{1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot (1 \text{ m} - 0.005 \text{ m})} = 418.76 \text{ K} \approx 419 \text{ K}$$

Vježba 179

Na drveni kotač promjera 100 cm treba staviti aluminijski obruč čiji je promjer 5 mm manji od promjera kotača. Za koliko stupnjeva treba povisiti temperaturu aluminijskom obruču? (koeficijent linearnog rastezanja aluminija $\beta = 2.6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

Rezultat: 193.27 K.

Zadatak 180 (Marina, gimnazija)

Čelični valjak ima promjer 10.000 cm pri 30 °C. Pri kojoj će temperaturi taj valjak točno pristajati u rupu promjera 9.997 cm? (koeficijent linearnog rastezanja čelika $\beta = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

Rješenje 180

$$d_1 = 10.000 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad t_1 = 30 \text{ °C} - 0 \text{ °C} = 30 \text{ °C} = 30 \text{ K}, \quad d_2 = 9.997 \text{ cm} = 0.09997 \text{ m},$$

$$\beta = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}, \quad t_2 = ?$$

Kad štapu nekog čvrstog tijela, koji prema dogovoru pri 0 °C ima duljinu l_0 , povisimo temperaturu za t (od 0 °C do t), on će se produžiti za:

$$\Delta l = \beta \cdot l_0 \cdot t,$$

gdje je β koeficijent linearnog rastezanja koji se definira izrazom:

$$\beta = \frac{l_t - l_0}{l_0 \cdot t}$$

Jedinica za koeficijent linearnog rastezanja je K^{-1} . Iz izraza za β slijedi da će nakon zagrijavanja duljina štapa biti jednaka:

$$l_t = l_0 \cdot (1 + \beta \cdot t)$$

Pri linearnom rastezanju štapa promjena temperature Δt kada se štap duljine l_1 rastegne na duljinu l_2 , iznosi:

$$\Delta t = \frac{l_2 - l_1}{\beta \cdot l_1}$$

1. inačica

Duljina promjera valjka na temperaturi t_1 je:

$$d_1 = d_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1).$$

Duljina promjera valjka na temperaturi t_2 je:

$$d_2 = d_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2).$$

Temperatura valjka t_2 , pri kojoj će točno pristajati u rupu, dobije se rješavanjem sustava jednažbi:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= d_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1) \\ d_2 &= d_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednažbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1)}{d_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2)} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{d_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_1)}{d_0 \cdot (1 + \beta \cdot t_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{1 + \beta \cdot t_1}{1 + \beta \cdot t_2} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{1 + \beta \cdot t_1}{1 + \beta \cdot t_2} \cdot \frac{d_2 \cdot (1 + \beta \cdot t_2)}{d_1} \Rightarrow 1 + \beta \cdot t_2 = \frac{d_2}{d_1} \cdot (1 + \beta \cdot t_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \cdot t_2 = \frac{d_2}{d_1} \cdot (1 + \beta \cdot t_1) - 1 \cdot \frac{1}{\beta} \Rightarrow t_2 = \frac{1}{\beta} \cdot \left[\frac{d_2}{d_1} \cdot (1 + \beta \cdot t_1) - 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{1.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}} \cdot \left[\frac{0.09997 \text{ m}}{0.1 \text{ m}} \cdot (1 + 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 30 \text{ K}) - 1 \right] = 2.72 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

2. inačica

Budući da promatramo samo promjenu opsega valjka odnosno promjera koja je linearna, promjena temperature Δt prilikom koje će se opseg valjka (ili njegov promjer) smanjiti iznosi:

$$\Delta t = \frac{d_2 - d_1}{\beta \cdot d_1}. \quad (\text{broj je negativan jer se promjer smanjuje})$$

Valjak će točno pristajati u rupu pri sniženoj temperaturi t_2 :

$$t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{d_2 - d_1}{\beta \cdot d_1} = 30 \text{ } ^\circ\text{C} + \frac{0.09997 \text{ m} - 0.1 \text{ m}}{1.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 0.1 \text{ m}} = 2.73 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Vježba 180

Čelični valjak ima promjer 100.00 mm pri 30 °C. Pri kojoj će temperaturi taj valjak točno pristajati u rupu promjera 0.9997 dm? (koeficijent linearnog rastezanja čelika $\beta = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$)

Rezultat: 2.73 °C.