Zadatak 101 (Ivan, gimnazija)

Koliki moraju biti polumjer kružne staze umjetnog Zemljina satelita i njegova brzina da njegov period bude jednak periodu okretanja Zemlje, tj. da se sa Zemlje čini nepomičnim? (masa Zemlje $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m² / kg²)

Rješenje 101

$T_S = T_Z = T = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ s, $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m² / kg², m_S masa satelita, r = ?, v = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Pri gibanju tijela po kružnici brzina v stalno se mijenja. Ona ostaje jednaka veličinom, ali joj se neprestano mijenja smjer. Linearna ili obodna brzina v računa se po formuli

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda, tj. vrijeme jednog ophoda.

Sila gravitacije između satelita mase m_S i Zemlje mase m na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F_g \Rightarrow m_S \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r^2} \Rightarrow m_S \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r^2} \; / \cdot \frac{r^2 \cdot T^2}{m_S \cdot 4 \cdot \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = G \cdot \frac{m \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow r^3 = G \cdot \frac{m \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow r = \sqrt[3]{G \cdot \frac{m \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \, kg \cdot (86\,400 \, s)^2}{4 \cdot \pi^2}} = 4.23 \cdot 10^7 \, m.$$

Brzina satelita da njegov period bude jednak periodu okretanja Zemlje iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 4.23 \cdot 10^7 \, m \cdot \pi}{86\,400 \, s} = 3076.14 \, \frac{m}{s}.$$

Vježba 101

Koliki mora biti polumjer kružne staze umjetnog Zemljina satelita da njegov period bude jednak periodu okretanja Zemlje, tj. da se sa Zemlje čini nepomičnim? (masa Zemlje $m = 6 \cdot 10^{21}$ t, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m² / kg²)

Rezultat: $4.23 \cdot 10^7$ m.

Zadatak 102 (Ana, gimnazija)

Kolikom silom Mars privlači kamen mase 1 kg koji se nalazina na njegovoj površini? Masa Marsa je $6.5 \cdot 10^{23}$ kg, a polumjer 3400 km. (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m² / kg²)

Rješenje 102

m = 1 kg, $m_M = 6.5 \cdot 10^{23}$ kg, r = 3400 km = $3.4 \cdot 10^6$ m,
G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m² / kg², F = ?

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Na površini Marsa privlačna sila između tijela mase m i Marsa mase m_M iznosi

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{1\ kg \cdot 6.5 \cdot 10^{23}\ kg}{\left(3.4 \cdot 10^6\ m\right)^2} = 3.75\ N.$$

Vježba 102

Kolikom silom Mars privlači kamen mase 100 dag koji se nalazina na njegovoj površini? Masa Marsa je $6.5 \cdot 10^{21}$ t, a polumjer 3400 km. (gravitacijska konstanta G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m² / kg²)

Rezultat: 3.75 N.

Zadatak 103 (Ana, gimnazija)

Masa Marsa je $6.5 \cdot 10^{23}$ kg, a polumjer 3400 km. Kolika je akceleracija slobodnoga pada na površini Marsa? (gravitacijska konstanta G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m² / kg²)

Rješenje 103

$m_M = 6.5 \cdot 10^{23}$ kg, r = 3400 km = $3.4 \cdot 10^6$ m, G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m² / kg², g = ?

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Gravitacijska sila privlačenja tijela i Marsa djeluje prema trećem Newtonovu zakonu na tijelo i Mars jednako, samo u suprotnim smjerovima. Sila teža na Marsu je naziv za gravitacijsku silu kojom Mars privlači sva tijela u blizini svoje površine. Za privlačenje nekog tijela mase m i Marsa mase m_M možemo napisati

$$G = F \;\Rightarrow\; m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} \;\Rightarrow\; m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} \;/ : m \;\Rightarrow\; g = G \cdot \frac{m_M}{r^2} =$$

$$= 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6.5 \cdot 10^{23}\ kg}{\left(3.4 \cdot 10^6\ m\right)^2} = 3.75\ \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 103

Masa Marsa je $6.5 \cdot 10^{20}$ t, a polumjer 3400 km. Kolika je akceleracija slobodnoga pada na površini Marsa? (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$)

Rezultat: $3.75\ m/s^2$.

Zadatak 104 (Ivana, gimnazija)

Brzina satelita u orbiti oko Zemlje neovisna je o:

A. masi satelita
B. masi Zemlje
C. udaljenosti satelita od površine Zemlje
D. gravitacijskoj konstanti.

Rješenje 104

m – masa satelita, M – masa Zemlje, r – udaljenost satelita od površine Zemlje, G – gravitacijska konstanta

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

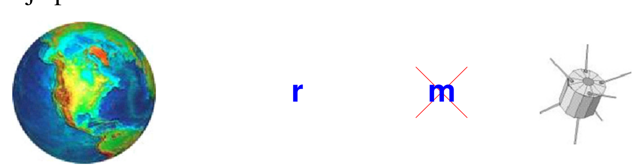
$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.
Neka je m masa satelita, a M masa Zemlje. Budući da ulogu centripetalne sile ima sila gravitacije, vrijedi:

$$F_{cp} = F_g \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \ / \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}.$$

Iz formule vidi se da brzina satelita ovisi isključivo o njegovoj udaljenosti od središta Zemlje, a ne o njegovoj masi. Odgovor je pod A.



Vježba 104

Brzina satelita u orbiti oko Zemlje ovisna je o:

A. masi satelita
B. težini satelita
C. udaljenosti satelita od površine Zemlje
D. veličini satelita.

Rezultat: C.

Zadatak 105 (Josipa, medicinska škola)

Polumjer Zemljine putanje oko Sunca je 390 puta veći od polumjera Mjesečeve putanje oko Zemlje. Mjesec obiđe Zemlju približno 13 puta u godini dana. Koliki je omjer brzine kruženja Zemlje oko Sunca (v_z) i brzine kruženja Mjeseca oko Zemlje (v_m)?

$A.\ v_z : v_m = 1 : 13$, $B.\ v_z : v_m = 13 : 1$, $C.\ v_z : v_m = 1 : 30$, $D.\ v_z : v_m = 30 : 1$

Rješenje 105

$r_{zs} = 390 \cdot r_{mz}$, $T_m = \frac{1}{13}\ god$, $T_z = 1$ god, $v_z : v_m = ?$

Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda (ophodno vrijeme, vrijeme jednog okreta).
Brzina kruženja:

- Zemlje oko Sunca dana je formulom

$$v_z = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{zs}}{T_z}$$

- Mjeseca oko Zemlje dana je formulom

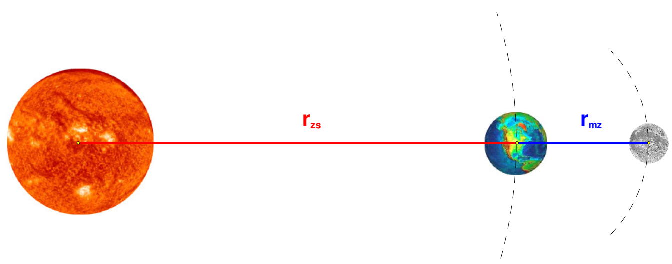
$$v_m = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{mz}}{T_m}.$$

Gledamo omjer brzina.

$$\frac{v_z}{v_m} = \frac{\frac{2 \cdot \pi \cdot r_{zs}}{T_z}}{\frac{2 \cdot \pi \cdot r_{mz}}{T_m}} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{\frac{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot r_{zs}}{T_z}}{\frac{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot r_{mz}}{T_m}} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{\frac{r_{zs}}{T_z}}{\frac{r_{mz}}{T_m}} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{r_{zs} \cdot T_m}{r_{mz} \cdot T_z} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{390 \cdot r_{mz} \cdot \frac{1}{13}\ god}{r_{mz} \cdot 1\ god} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{390 \cdot \cancel{r_{mz}} \cdot \frac{1}{13}\ \cancel{god}}{\cancel{r_{mz}} \cdot 1\ \cancel{god}} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{390}{13} \Rightarrow \frac{v_z}{v_m} = \frac{30}{1} \Rightarrow v_z : v_m = 30 : 1.$$

Odgovor je pod D.



Vježba 105

Polumjer Zemljine putanje oko Sunca je 390 puta veći od polumjera Mjesečeve putanje oko Zemlje. Mjesec obiđe Zemlju približno 13 puta u godini dana. Koliki je omjer brzine kruženja Mjeseca oko Zemlje (v_m) i brzine kruženja Zemlje oko Sunca (v_z)?

$A.\ v_m : v_z = 1 : 13$, $B.\ v_m : v_z = 13 : 1$, $C.\ v_m : v_z = 1 : 30$, $D.\ v_m : v_z = 30 : 1$

Rezultat: C.

Zadatak 106 (Iva, srednja škola)

Brzina satelita u orbiti oko Zemlje neovisna je o:

$$A.\ masi\ satelita \quad , \quad B.\ masi\ Zemlje$$
$$C.\ udaljenosti\ satelita\ od\ površine\ Zemlje \quad , \quad D.\ gravitacijskoj\ konstanti$$

Rješenje 106

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Budući da satelit mase m kruži oko Zemlje mase M na udaljenosti r, ulogu centripetalne sile F_{cp} ima gravitacijska F_g pa vrijedi:

$$F_{cp} = F_g \;\Rightarrow\; m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \;\Rightarrow\; m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \;/\cdot \frac{r}{m} \;\Rightarrow\; v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow\; v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}.$$

Iz formule vidi se da brzina satelita ovisi isključivo o njegovoj udaljenosti od središta Zemlje, masi Zemlje i gravitacijskoj konstanti, a ne o njegovoj masi.

Odgovor je pod A.

Vježba 106

Newtonov zakon gravitacije vrijedi:

$$A.\ za\ tijela\ velikih\ masa \quad , \quad B.\ za\ tijela\ malih\ masa$$
$$C.\ za\ dvije\ mase\ na\ bilo\ kojoj\ udaljenosti \quad , \quad D.\ za\ dvije\ mase\ na\ velikoj\ udaljenosti$$

Rezultat: C.

Zadatak 107 (Luka, tehnička škola)

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 30 km/s, a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^8$ km? (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$)

Rješenje 107

$v = 30$ km/s $= 3 \cdot 10^4$ m/s, $r = 1.5 \cdot 10^8$ km $= 1.5 \cdot 10^{11}$ m, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$, $m_S = ?$

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna brzina tijela.

Opći zakon gravitacije:

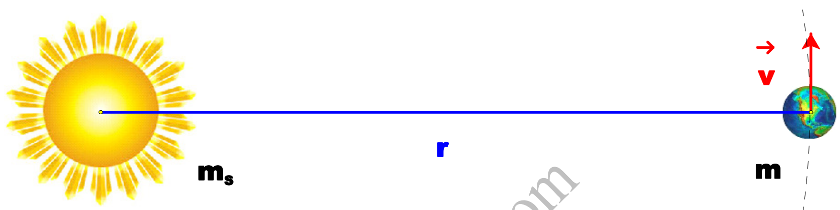
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Sila gravitacije je uzrok kružnoga gibanja Zemlje oko Sunca. Sila gravitacije F_g između Zemlje mase m i Sunca mase m_S na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} na Zemlju na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \; / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_S = \frac{v^2 \cdot r}{G} = \frac{\left(3 \cdot 10^4 \; \frac{m}{s}\right)^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \; m}{6.67 \cdot 10^{-11} \; \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = 2.02 \cdot 10^{30} \; kg.$$



Vježba 107

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 1800 km/min, a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^8$ km? (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \; N \cdot m^2 / kg^2$)

Rezultat: $2.02 \cdot 10^{30}$ kg.

Zadatak 108 (Tina, gimnazija)

Znajući srednji polumjer Zemlje R = 6371 km, odredi visinu na kojoj ubrzanje iznosi 60% ubrzanja g_0 uz površinu.

Rješenje 108

$R = 6371$ km $= 6.371 \cdot 10^6$ m, g_0, $g = 60\% \cdot g_0 = 0.60 \cdot g_0$, $h = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža $G = m \cdot g$ koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili. Ako je m masa tijela, g_0 ubrzanje sile teže na površini Zemlje, M masa Zemlje, R srednji polumjer Zemlje, g ubrzanje sile teže na visini h od površine Zemlje, tada je:

- na površini Zemlje

$$m \cdot g_0 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$$

- na visini h

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}.$$

Iz ovih dviju relacija dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot g_0 = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2} \\ m \cdot g = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{m \cdot g_0}{m \cdot g} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2}} \Rightarrow \frac{m \cdot g_0}{m \cdot g} = \frac{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_0}{g} = \frac{\dfrac{1}{R^2}}{\dfrac{1}{(R+h)^2}} \Rightarrow \frac{g_0}{g} = \frac{(R+h)^2}{R^2} \Rightarrow \frac{g_0}{g} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = \frac{g_0}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = \frac{g_0}{g} \; / \sqrt{\ } \Rightarrow \frac{R+h}{R} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} \Rightarrow \frac{R+h}{R} = \sqrt{\frac{g_0}{g}} \; / \cdot R \Rightarrow R+h = R \cdot \sqrt{\frac{g_0}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = R \cdot \sqrt{\frac{g_0}{g}} - R \Rightarrow h = R \cdot \left(\sqrt{\frac{g_0}{g}} - 1\right) \Rightarrow h = R \cdot \left(\sqrt{\frac{g_0}{0.60 \cdot g_0}} - 1\right) \Rightarrow h = R \cdot \left(\sqrt{\frac{g_0}{0.60 \cdot g_0}} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = R \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{0.60}} - 1\right) \Rightarrow h = R \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{0.60}} - 1\right) = 6.371 \cdot 10^6 \; m \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{0.60}} - 1\right) = 1853925.63 \; m =$$

$$= 1853.92563 \; km \approx 1854 \; km.$$

Vježba 108

Znajući srednji polumjer Zemlje R = 6371 km, odredi visinu na kojoj ubrzanje iznosi 80% ubrzanja g_0 uz površinu.

Rezultat: 752 km.

Zadatak 109 (Neven, tehnička škola)

Gdje se između Mjeseca i Zemlje poništavaju njihova gravitacijska polja? Masa Mjeseca je oko 81 put manja od mase Zemlje, a udaljenost Zemlje od Mjeseca iznosi d = 384 000 km.

Rješenje 109

M – masa Zemlje, m – masa Mjeseca, M = 81 · m, d = 384 000 km = $3.84 \cdot 10^8$ m, x = ?

Prostor oko masivnog tijela mase m u kojem se osjeća gravitacijsko djelovanje tog tijela nazivamo gravitacijsko polje. Jakost gravitacijskog polja γ u nekoj točki polja na udaljenosti r od tijela dana je izrazom

$$\gamma = G \cdot \frac{m}{r^2},$$

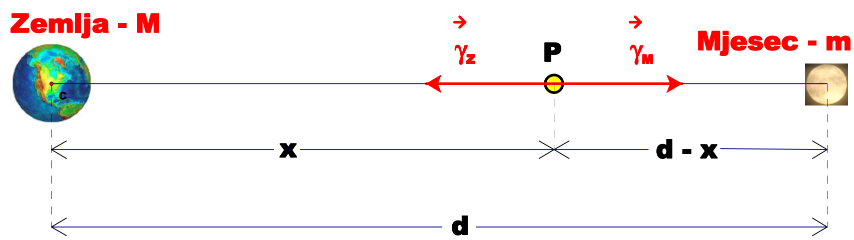
gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.



Najprije odredimo gravitacijska polja Zemlje i Mjeseca u točki P:

- gravitacijsko polje Zemlje

$$\gamma_Z = G \cdot \frac{M}{x^2}$$

- gravitacijsko polje Mjeseca

$$\gamma_M = G \cdot \frac{m}{(d-x)^2}.$$

1.inačica

Gravitacijsko polje Zemlje usmjereno je radijalno prema Zemlji, a gravitacijsko polje Mjeseca prema Mjesecu. Budući da se u točki P polja moraju poništiti (rezultantno gravitacijsko polje mora biti jednako nuli), u njoj su ona jednakog iznosa, ali suprotnih smjerova pa vrijedi:

$$\gamma_M = \gamma_Z \Rightarrow G \cdot \frac{m}{(d-x)^2} = G \cdot \frac{M}{x^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m}{(d-x)^2} = G \cdot \frac{M}{x^2} \; / \cdot \frac{x^2 \cdot (d-x)^2}{G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot x^2 = M \cdot (d-x)^2 \Rightarrow m \cdot x^2 = M \cdot (d-x)^2 \; / \cdot \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{m}{M} \cdot x^2 = (d-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{radiciramo jednadžbu jer time} \\ \text{izbjegavamo kvadratnu jednadžbu} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{m}{M} \cdot x^2 = (d-x)^2 \; / \sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{M} \cdot x^2} = \sqrt{(d-x)^2} \Rightarrow x \cdot \sqrt{\frac{m}{M}} = d - x \Rightarrow x \cdot \sqrt{\frac{m}{M}} + x = d \Rightarrow x \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + 1 \right) = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\left(1+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)=d \Rightarrow x\cdot\left(1+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)=d \ /\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}} \Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{m}{81\cdot m}}} \Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{m}{81\cdot m}}} \Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{1}{81}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{1+\frac{1}{9}} \Rightarrow x=\frac{d}{\frac{1}{1}+\frac{1}{9}} \Rightarrow x=\frac{d}{\frac{9+1}{9}} \Rightarrow x=\frac{d}{\frac{10}{9}} \Rightarrow x=\frac{\frac{d}{1}}{\frac{10}{9}} \Rightarrow x=\frac{9\cdot d}{10}=$$

$$=\frac{9\cdot 3.84\cdot 10^{8}\ m}{10}=3.456\cdot 10^{8}\ m.$$

2.inačica

Gravitacijsko polje Zemlje usmjereno je radijalno prema Zemlji, a gravitacijsko polje Mjeseca prema Mjesecu. Budući da se u točki P polja moraju poništiti (rezultantno gravitacijsko polje mora biti jednako nuli), u njoj su ona jednakog iznosa, ali suprotnih smjerova pa vrijedi:

$$\gamma_M=\gamma_Z \Rightarrow G\cdot\frac{m}{(d-x)^2}=G\cdot\frac{M}{x^2} \Rightarrow G\cdot\frac{m}{(d-x)^2}=G\cdot\frac{M}{x^2} \ /\cdot\frac{x^2\cdot(d-x)^2}{G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot x^2=M\cdot(d-x)^2 \Rightarrow M\cdot(d-x)^2=m\cdot x^2 \Rightarrow M\cdot\left(d^2-2\cdot d\cdot x+x^2\right)=m\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\cdot d^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot x^2=m\cdot x^2 \Rightarrow M\cdot d^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot x^2-m\cdot x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\cdot x^2-m\cdot x^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot d^2=0 \Rightarrow (M-m)\cdot x^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot d^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(M-m)\cdot x^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot d^2=0\\ a=M-m\ ,\ b=-2\cdot M\cdot d\ ,\ c=M\cdot d^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=M-m\ ,\ b=-2\cdot M\cdot d\ ,\ c=M\cdot d^2\\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-2\cdot M\cdot d)\pm\sqrt{(-2\cdot M\cdot d)^2-4\cdot(M-m)\cdot M\cdot d^2}}{2\cdot(M-m)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot M\cdot d\pm\sqrt{4\cdot M^2\cdot d^2-4\cdot M^2\cdot d^2+4\cdot M\cdot m\cdot d^2}}{2\cdot(M-m)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot M\cdot d\pm\sqrt{4\cdot M^2\cdot d^2-4\cdot M^2\cdot d^2+4\cdot M\cdot m\cdot d^2}}{2\cdot(M-m)} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot M\cdot d\pm\sqrt{4\cdot M\cdot m\cdot d^2}}{2\cdot(M-m)} \Rightarrow$$

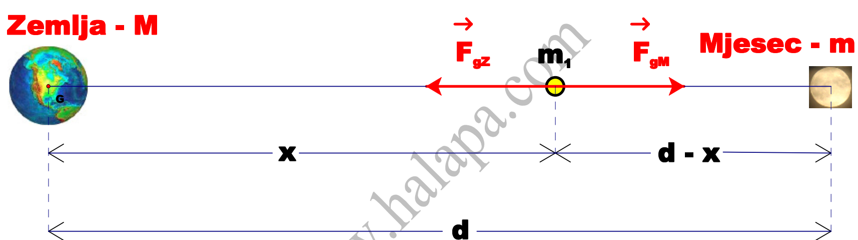
$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot M\cdot d\pm 2\cdot d\cdot\sqrt{M\cdot m}}{2\cdot(M-m)} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot d\cdot\left(M\pm\sqrt{M\cdot m}\right)}{2\cdot(M-m)} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot d\cdot\left(M\pm\sqrt{M\cdot m}\right)}{2\cdot(M-m)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{M\pm\sqrt{M\cdot m}}{M-m}\cdot d\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{M+\sqrt{M\cdot m}}{M-m}\cdot d \\ x_2=\dfrac{M-\sqrt{M\cdot m}}{M-m}\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{81\cdot m+\sqrt{81\cdot m\cdot m}}{81\cdot m-m}\cdot d \\ x_2=\dfrac{81\cdot m-\sqrt{81\cdot m\cdot m}}{81\cdot m-m}\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{81\cdot m+\sqrt{81\cdot m^2}}{80\cdot m}\cdot d \\ x_2=\dfrac{81\cdot m-\sqrt{81\cdot m^2}}{80\cdot m}\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{81\cdot m+9\cdot m}{80\cdot m}\cdot d \\ x_2=\dfrac{81\cdot m-9\cdot m}{80\cdot m}\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{90\cdot m}{80\cdot m}\cdot d \\ x_2=\dfrac{72\cdot m}{80\cdot m}\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{90\cdot m}{80\cdot m}\cdot d \\ x_2=\dfrac{72\cdot m}{80\cdot m}\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{9}{8}\cdot d \\ x_2=\dfrac{9}{10}\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{9}{8}\cdot 3.84\cdot 10^8\ m \\ x_2=\dfrac{9}{10}\cdot 3.84\cdot 10^8\ m \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=4.32\cdot 10^8\ m \\ x_2=3.456\cdot 10^8\ m \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1\ -\ \text{rješenje odbacujemo jer je točka P izvan spojnice Zemlja}-\text{Mjesec} \\ x_2=3.456\cdot 10^8\ m \end{array}\right\}.$$



3.inačica

Kada se neko tijelo mase m_1 nađe u točki P bit će u bestežinskom stanju jer će na nj djelovati gravitacijske sile Zemlje i Mjeseca koje su jednake po iznosu, ali imaju suprotne smjerove. Gravitacijska sila kojom Zemlja mase M djeluje na tijelo mase m_1 dana je izrazom

$$F_{gZ}=G\cdot\frac{M\cdot m_1}{x^2}.$$

Gravitacijska sila kojom Mjesec mase m djeluje na tijelo mase m_1 dana je izrazom

$$F_{gM}=G\cdot\frac{m\cdot m_1}{(d-x)^2}.$$

Budući da tijelo mora biti u stanju mirovanja, gravitacijske sile F_{gZ} i F_{gM} jednake su po iznosu, ali suprotnog smjera pa vrijedi:

$$F_{gM}=F_{gZ}\ \Rightarrow\ G\cdot\frac{m\cdot m_1}{(d-x)^2}=G\cdot\frac{M\cdot m_1}{x^2}\ \Rightarrow\ G\cdot\frac{m\cdot m_1}{(d-x)^2}=G\cdot\frac{M\cdot m_1}{x^2}\ /\cdot\frac{x^2\cdot(d-x)^2}{G\cdot m_1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m\cdot x^2=M\cdot(d-x)^2\ \Rightarrow\ m\cdot x^2=M\cdot(d-x)^2\ /\cdot\frac{1}{M}\ \Rightarrow\ \frac{m}{M}\cdot x^2=(d-x)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{radiciramo jednadžbu jer time} \\ \text{izbjegavamo kvadratnu jednadžbu}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \frac{m}{M}\cdot x^2=(d-x)^2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{M}\cdot x^2}=\sqrt{(d-x)^2} \Rightarrow x\cdot\sqrt{\frac{m}{M}}=d-x \Rightarrow x\cdot\sqrt{\frac{m}{M}}+x=d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\left(\sqrt{\frac{m}{M}}+1\right)=d \Rightarrow x\cdot\left(1+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)=d \Rightarrow x\cdot\left(1+\sqrt{\frac{m}{M}}\right)=d \;/\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}} \Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{m}{81\cdot m}}} \Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{m}{81\cdot m}}} \Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{\frac{1}{81}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{1+\frac{1}{9}} \Rightarrow x=\frac{d}{\frac{1}{1}+\frac{1}{9}} \Rightarrow x=\frac{d}{\frac{9+1}{9}} \Rightarrow x=\frac{d}{\frac{10}{9}} \Rightarrow x=\frac{\frac{d}{1}}{\frac{10}{9}} \Rightarrow x=\frac{9\cdot d}{10}=$$

$$=\frac{9\cdot 3.84\cdot 10^8\ m}{10}=3.456\cdot 10^8\ m.$$

4.inačica

Kada se neko tijelo mase m_1 nađe u točki P bit će u bestežinskom stanju jer će na nj djelovati gravitacijske sile Zemlje i Mjeseca koje su jednake po iznosu, ali imaju suprotne smjerove. Gravitacijska sila kojom Zemlja mase M djeluje na tijelo mase m_1 dana je izrazom

$$F_{gZ}=G\cdot\frac{M\cdot m_1}{x^2}.$$

Gravitacijska sila kojom Mjesec mase m djeluje na tijelo mase m_1 dana je izrazom

$$F_{gM}=G\cdot\frac{m\cdot m_1}{(d-x)^2}.$$

Budući da tijelo mora biti u stanju mirovanja, gravitacijske sile F_{gZ} i F_{gM} jednake su po iznosu, ali suprotnog smjera pa vrijedi:

$$F_{gM}=F_{gZ} \Rightarrow G\cdot\frac{m\cdot m_1}{(d-x)^2}=G\cdot\frac{M\cdot m_1}{x^2} \Rightarrow G\cdot\frac{m\cdot m_1}{(d-x)^2}=G\cdot\frac{M\cdot m_1}{x^2} \;/\cdot\frac{x^2\cdot(d-x)^2}{G\cdot m_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot x^2=M\cdot(d-x)^2 \Rightarrow M\cdot(d-x)^2=m\cdot x^2 \Rightarrow M\cdot\left(d^2-2\cdot d\cdot x+x^2\right)=m\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cdot x^2=M\cdot(d-x)^2 \Rightarrow M\cdot(d-x)^2=m\cdot x^2 \Rightarrow M\cdot\left(d^2-2\cdot d\cdot x+x^2\right)=m\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\cdot d^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot x^2=m\cdot x^2 \Rightarrow M\cdot d^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot x^2-m\cdot x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\cdot x^2-m\cdot x^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot d^2=0 \Rightarrow (M-m)\cdot x^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot d^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(M-m)\cdot x^2-2\cdot M\cdot d\cdot x+M\cdot d^2=0\\ a=M-m\ ,\ b=-2\cdot M\cdot d\ ,\ c=M\cdot d^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=M-m\ ,\ b=-2\cdot M\cdot d\ ,\ c=M\cdot d^2\\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-2\cdot M\cdot d)\pm\sqrt{(-2\cdot M\cdot d)^2-4\cdot(M-m)\cdot M\cdot d^2}}{2\cdot(M-m)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot M\cdot d\pm\sqrt{4\cdot M^2\cdot d^2-4\cdot M^2\cdot d^2+4\cdot M\cdot m\cdot d^2}}{2\cdot(M-m)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot M\cdot d\pm\sqrt{4\cdot M^2\cdot d^2-4\cdot M^2\cdot d^2+4\cdot M\cdot m\cdot d^2}}{2\cdot(M-m)}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot M\cdot d\pm\sqrt{4\cdot M\cdot m\cdot d^2}}{2\cdot(M-m)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot M\cdot d\pm 2\cdot d\cdot\sqrt{M\cdot m}}{2\cdot(M-m)}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot d\cdot\left(M\pm\sqrt{M\cdot m}\right)}{2\cdot(M-m)}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot d\cdot\left(M\pm\sqrt{M\cdot m}\right)}{2\cdot(M-m)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{M\pm\sqrt{M\cdot m}}{M-m}\cdot d\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{M+\sqrt{M\cdot m}}{M-m}\cdot d\\ x_2=\dfrac{M-\sqrt{M\cdot m}}{M-m}\cdot d\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{81\cdot m+\sqrt{81\cdot m\cdot m}}{81\cdot m-m}\cdot d\\ x_2=\dfrac{81\cdot m-\sqrt{81\cdot m\cdot m}}{81\cdot m-m}\cdot d\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{81\cdot m+\sqrt{81\cdot m^2}}{80\cdot m}\cdot d\\ x_2=\dfrac{81\cdot m-\sqrt{81\cdot m^2}}{80\cdot m}\cdot d\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{81\cdot m+9\cdot m}{80\cdot m}\cdot d\\ x_2=\dfrac{81\cdot m-9\cdot m}{80\cdot m}\cdot d\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{90\cdot m}{80\cdot m}\cdot d\\ x_2=\dfrac{72\cdot m}{80\cdot m}\cdot d\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{90\cdot m}{80\cdot m}\cdot d\\ x_2=\dfrac{72\cdot m}{80\cdot m}\cdot d\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{9}{8}\cdot d\\ x_2=\dfrac{9}{10}\cdot d\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{9}{8}\cdot 3.84\cdot 10^8\ m\\ x_2=\dfrac{9}{10}\cdot 3.84\cdot 10^8\ m\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=4.32\cdot 10^8\ m\\ x_2=3.456\cdot 10^8\ m\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1-\text{rješenje odbacujemo jer je točka P izvan spojnice Zemlja}-\text{Mjesec}\\ x_2=3.456\cdot 10^8\ m\end{array}\right\}.$$

Vježba 109

Gdje se između Mjeseca i Zemlje poništavaju njihova gravitacijska polja? Masa Zemlje je 81 puta veća od mase Mjeseca, a udaljenost Zemlje od Mjeseca iznosi d = 384 000 000 m.

Rezultat: $3.456\cdot 10^8$ m.

Zadatak 110 (Neven, tehnička škola)

Kolika bi morala biti perioda Zemljine vrtnje oko osi da bi tijelo na ekvatoru bilo u bestežinskom stanju? (gravitacijska konstanta $G = 6.67\cdot 10^{-11}\ (N\cdot m^2)/kg^2$, akceleracija slobodnog pada $g = 9.81\ m/s^2$, srednji polumjer Zemlje $r = 6.4\cdot 10^6$ m, masa Zemlje $M = 6\cdot 10^{24}$ kg)

Rješenje 110

$G = 6.67\cdot 10^{-11}\ (N\cdot m^2)/kg^2$, $g = 9.81\ m/s^2$, $r = 6.4\cdot 10^6$ m, $M = 6\cdot 10^{24}$ kg, T = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

gdje je T ophodno vrijeme.
Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Na tijelo mase m koje se nalazi u blizini Zemljine površine djeluje vertikalno prema dolje sila teža G = m · g koja je rezultanta gravitacijske i centrifugalne sile zbog vrtnje Zemlje oko svoje osi. U većini slučajeva može se zanemariti utjecaj centrifugalne sile i uzeti da je sila teža jednaka gravitacijskoj sili.

1.inačica

Iskoristit ćemo gravitaciju kao centripetalnu silu. Ona prisiljava da tijelo mase m uz potrebnu kružnu brzinu kruži oko Zemlje čiji je polumjer r. Sila gravitacije između tijela mase m i Zemlje mase M na površini Zemlje mora biti jednaka centripetalnoj sili na tijelo na udaljenosti r od središta vrtnje.

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \;/ \cdot \frac{T^2 \cdot r^2}{G \cdot M \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M} \;/ \sqrt{} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{\frac{r}{G \cdot M}} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 6.4 \cdot 10^6 \; m \cdot \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^6 \; m}{6.67 \cdot 10^{-11} \; \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \; kg}} = 5.085 \cdot 10^3 \; s =$$

$$= \left[5.085 \cdot 10^3 : 3600 \right] = 1.41 \; h.$$

2.inačica

Privlačna sila između Zemlje mase M i tijela mase m daje tijelu centripetalnu akceleraciju te jednadžba gibanja tijela ima oblik (sila teža je uzrok kružnog gibanja tijela mase m).

$$G = F_{cp} \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \;/ \cdot \frac{T^2}{m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{g} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{g} \;/ \sqrt{} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{g}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^6 \; m}{9.81 \; \frac{m}{s^2}}} = 5.085 \cdot 10^3 \; s = \left[5.085 \cdot 10^3 : 3600 \right] = 1.41 \; h.$$

Vježba 110

Kolika bi morala biti perioda Zemljine vrtnje oko osi da bi tijelo na ekvatoru bilo u bestežinskom stanju? (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2, akceleracija slobodnog pada g = 9.81 m/s^2, srednji polumjer Zemlje r = 6400 km, masa Zemlje M = 6 · 10^{21} t).

Rezultat: 1.41 h.

Zadatak 111 (VM, gimnazija)

Kolika bi morala biti gustoća materijala da sila kugli u dodiru promjera 1 m bude jednaka 10^{-4} N? (gravitacijska konstanta G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ (N · m^2) / kg^2)

Rješenje 111

$2 \cdot r_1 = 2 \cdot r_2 = 1$ m => $r_1 = r_2 = r = 0.5$ m, $R = 2 \cdot r$, $F = 10^{-4}$ N,
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ (N · m^2) / kg^2, ρ = ?

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

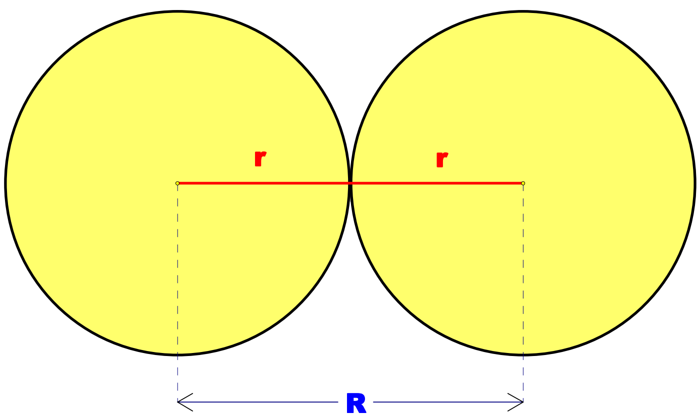
$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Kugla polumjera r ima obujam (volumen):

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$



Budući da kugle imaju jednake mase, a udaljenost između njihovih središta je R, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = m_2 = m \\ F = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{R^2} \end{array}\right\} \Rightarrow F = G \cdot \frac{m^2}{R^2} \Rightarrow F = G \cdot \frac{m^2}{R^2} \; / \cdot \frac{R^2}{G} \Rightarrow m^2 = \frac{R^2 \cdot F}{G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{R^2 \cdot F}{G} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow m = \sqrt{\frac{R^2 \cdot F}{G}} \Rightarrow m = R \cdot \sqrt{\frac{F}{G}} \Rightarrow m = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\frac{F}{G}}.$$

Iz podataka za masu m kugle i polumjera r dobijemo gustoću materijala.

$$\left.\begin{array}{l} \rho = \dfrac{m}{V} \\ m = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\dfrac{F}{G}} \\ V = \dfrac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \rho = \frac{2 \cdot r \cdot \sqrt{\dfrac{F}{G}}}{\dfrac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} \Rightarrow \rho = \frac{6 \cdot r \cdot \sqrt{\dfrac{F}{G}}}{4 \cdot r^3 \cdot \pi} \Rightarrow \rho = \frac{6 \cdot r \cdot \sqrt{\dfrac{F}{G}}}{4 \cdot r^3 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3 \cdot \sqrt{\frac{F}{G}}}{2 \cdot r^2 \cdot \pi} \Rightarrow \rho = \frac{3}{2 \cdot r^2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{F}{G}} = \frac{3}{2 \cdot (0.5\ m)^2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10^{-4}\ N}{6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}}} = 2338.51\ \frac{kg}{m^3}.$$

Vježba 111

Kolika bi morala biti gustoća materijala da sila kugli u dodiru promjera 100 cm bude jednaka 0.1 mN? (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} (N · m^2) / kg^2)

Rezultat: 2338.51 kg/m^3.

Zadatak 112 (Petra, gimnazija)

Perioda kruženja umjetnog satelita oko planeta iznosi T. Udaljenost satelita od središta planeta iznosi r. Na kolikoj udaljenosti od središta planeta kruži drugi satelit kojemu je perioda kruženja $\frac{T}{8}$?

$$A.\ \frac{r}{8} \qquad B.\ \frac{r}{4} \qquad C.\ 4 \cdot r \qquad D.\ 8 \cdot r$$

Rješenje 112

r_1 = r, T_1 = T, $T_2 = \frac{1}{8} \cdot T$, r_2 = ?

Keplerovi zakoni

- Svaki planet giba se po elipsi, a Sunce je u jednom žarištu te elipse.
- Spojnica Sunce – planet u jednakim vremenskim intervalima opisuje jednake površine.
- Kvadrati ophodnih vremena planeta odnose se kao kubovi njihovih srednjih udaljenosti od Sunca.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}.$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \Rightarrow T_1^2 \cdot r_2^3 = T_2^2 \cdot r_1^3 \Rightarrow T_1^2 \cdot r_2^3 = T_2^2 \cdot r_1^3 \ / \cdot \frac{1}{T_1^2} \Rightarrow r_2^3 = \frac{T_2^2 \cdot r_1^3}{T_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2^3 = \frac{\left(\frac{1}{8} \cdot T\right)^2 \cdot r^3}{T^2} \Rightarrow r_2^3 = \frac{\frac{1}{64} \cdot T^2 \cdot r^3}{T^2} \Rightarrow r_2^3 = \frac{\frac{1}{64} \cdot T^2 \cdot r^3}{T^2} \Rightarrow r_2^3 = \frac{1}{64} \cdot r^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2^3 = \frac{1}{64} \cdot r^3 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{64} \cdot r^3} \Rightarrow r_2 = \frac{1}{4} \cdot r.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 112

Perioda kruženja umjetnog satelita oko planeta iznosi T. Udaljenost satelita od središta planeta iznosi r. Na kolikoj udaljenosti od središta planeta kruži drugi satelit kojemu je perioda kruženja $\frac{T}{27}$?

$$A.\ \frac{r}{9} \qquad B.\ \frac{r}{81} \qquad C.\ 3 \cdot r \qquad D.\ 9 \cdot r$$

Rezultat: A.

Zadatak 113 (Tihomir, srednja škola)

Na kojoj visini iznad površine Zemlje akceleracija sile teže iznosi 7.33 m / s^2? Masa Zemlje je $6 \cdot 10^{24}$ kg, a polumjer $6.4 \cdot 10^6$ m. (gravitacijska konstanta G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ (N · m^2) / kg^2)

Rješenje 113

g = 7.33 m / s^2, M = $6 \cdot 10^{24}$ kg, R = $6.4 \cdot 10^6$ m. G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ (N · m^2) / kg^2, h = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Nalazi li se tijelo mase m na visini h iznad površine planeta polumjera R i mase M, tada je gravitacijska sila jednaka

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}.$$

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Budući da je sila teža G na površini Zemlje jednaka privlačnoj sili F tijela mase m i Zemlje mase M (na visini h iznad površine Zemlje), vrijedi:

$$G = F \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \; / \cdot \frac{(R+h)^2}{m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R+h)^2 = \frac{G \cdot M}{g} \Rightarrow (R+h)^2 = \frac{G \cdot M}{g} \; / \sqrt{\ } \Rightarrow R + h = \sqrt{\frac{G \cdot M}{g}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{G \cdot M}{g}} - R =$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \; kg}{7.33 \frac{m}{s^2}}} - 6.4 \cdot 10^6 \; m = 989015.11 \; m \approx 989 \; km.$$

Vježba 113

Na kojoj visini iznad površine Zemlje akceleracija sile teže iznosi 7.33 m / s^2? Masa Zemlje je $6 \cdot 10^{21}$ t, a polumjer $6.4 \cdot 10^3$ km. (gravitacijska konstanta G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ (N · m^2) / kg^2)

Rezultat: 989 km.

Zadatak 114 (Ivica, srednja škola)

Satelit obilazi Zemlju po kružnoj stazi brzinom 6.52 km / s. Koliko je ophodno vrijeme? (masa Zemlje M = $5.96 \cdot 10^{24}$ kg, gravitacijska konstanta G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ (N · m^2) / kg^2)

Rješenje 114

v = 6.52 km / s = 6520 m / s, M = $5.96 \cdot 10^{24}$ kg, G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ (N · m^2) / kg^2, T = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.
Tijelo rotira kada se njegove čestice gibaju po kružnicama čija središta leže u istoj točki ili na istom pravcu. Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda, vrijeme jednog ophoda.
Sila gravitacije F_g između satelita mase m i Zemlje mase M na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} na satelit na udaljenosti r od središta vrtnje.

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \; / \cdot \frac{r^2}{m \cdot v^2} \Rightarrow \frac{G \cdot M}{v^2} = r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{G \cdot M}{v^2}.$$

Ophodno vrijeme dobit ćemo iz sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \\ r = \dfrac{G \cdot M}{v^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v = \dfrac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} \; / \cdot \dfrac{T}{v} \\ r = \dfrac{G \cdot M}{v^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2 \cdot r \cdot \pi}{v} \\ r = \dfrac{G \cdot M}{v^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \frac{G \cdot M}{v^2} \cdot \pi}{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{2 \cdot G \cdot M \cdot \pi}{v^3} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 5.96 \cdot 10^{24} \, kg \cdot \pi}{\left(6520 \, \frac{m}{s}\right)^3} = 9011.75 \, s = [9011.75 : 60] = 150.2 \text{ min}.$$

Vježba 114

Satelit obilazi Zemlju po kružnoj stazi brzinom 3.26 km / s. Koliko je ophodno vrijeme? (masa Zemlje $M = 5.96 \cdot 10^{24}$ kg, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $(N \cdot m^2) / kg^2$)

Rezultat: 1201.6 min.

Zadatak 115 (Marija, gimnazija)

Na koju visinu iznad površine Zemlje treba podići tijelo da bi se težina umanjila dva puta? (polumjer zakrivljenosti Zemlje $R = 6.4 \cdot 10^6$ m)

$A.\ 3 \cdot 10^5 \; m \qquad B.\ 4 \cdot 10^3 \; m \qquad C.\ 2.65 \cdot 10^6 \; m \qquad D.\ 7 \cdot 10^6 \; m$

Rješenje 115

m – masa tijela, M – masa Zemlje, $G_1 = \frac{1}{2} \cdot G$, $R = 6.4 \cdot 10^6$ m, h = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M možemo napisati sljedeće jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} G\ (\text{težina tijela mase m na površini Zemlje}) = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2} \\ G_1\ (\text{težina tijela mase m na visini h}) = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} G = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{R^2} \\ \dfrac{1}{2} \cdot G = G \cdot \dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{G}{\frac{1}{2} \cdot G} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}} \Rightarrow \frac{G}{\frac{1}{2} \cdot G} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}} \Rightarrow 2 = \frac{\frac{1}{R^2}}{\frac{1}{(R+h)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{(R+h)^2}{R^2} \Rightarrow \frac{(R+h)^2}{R^2} = 2 \Rightarrow \frac{(R+h)^2}{R^2} = 2 \ / \cdot R^2 \Rightarrow (R+h)^2 = 2 \cdot R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R+h)^2 = 2 \cdot R^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow R+h = \sqrt{2 \cdot R^2} \Rightarrow R+h = R \cdot \sqrt{2} \Rightarrow h = R \cdot \sqrt{2} - R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = R \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = 6.4 \cdot 10^6\ m \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = 2.65 \cdot 10^6\ m.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 115

Na koju visinu iznad površine Zemlje treba podići tijelo da bi se težina umanjila četiri puta? (polumjer zakrivljenosti Zemlje $R = 6.4 \cdot 10^6$ m)

$A.\ 6.4 \cdot 10^6\ m \qquad B.\ 6.4 \cdot 10^5\ m \qquad C.\ 3.2 \cdot 10^6\ m \qquad D.\ 3 \cdot 10^6\ m$

Rezultat: A.

Zadatak 116 (Martin, tehnička škola)

Odredite brzinu satelita koji obilazi Zemlju po kružnoj stazi s ophodnim vremenom 150 min. (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$, masa Zemlje $M = 5.96 \cdot 10^{24}$ kg)

$A.\ 15.80\ \frac{km}{s} \qquad B.\ 6.52\ \frac{km}{s} \qquad C.\ 8.15\ \frac{km}{s} \qquad D.\ 11.20\ \frac{km}{s}$

Rješenje 116

T = 150 min = [150 · 60] = 9000 s, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kg^2$, $M = 5.96 \cdot 10^{24}$ kg,
v = ?

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

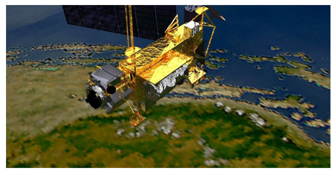
Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp}=m\cdot\frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.
Kada kruto tijelo rotira oko čvrste osi, sve se njegove čestice gibaju po koncentričnim kružnicama (koncentrične kružnice imaju zajedničko središte). Obodna (linearna) brzina iznosi:

$$v=\frac{2\cdot r\cdot\pi}{T},$$

gdje je r polumjer kružnice, T perioda (vrijeme jednog okreta).



Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase M na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F_{cp}=F\ \Rightarrow\ m\cdot\frac{v^2}{r}=G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\ \Rightarrow\ m\cdot\frac{v^2}{r}=G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\ /\cdot\frac{r}{m}\ \Rightarrow\ v^2=G\cdot\frac{M}{r}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se brzina satelita.

$$\left.\begin{array}{l} v=\dfrac{2\cdot r\cdot\pi}{T} \\ v^2=G\cdot\dfrac{M}{r}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{pomnožimo}\\ \text{jednadžbe}\end{array}\right]\Rightarrow v\cdot v^2=\frac{2\cdot r\cdot\pi}{T}\cdot G\cdot\frac{M}{r}\ \Rightarrow\ v^3=\frac{2\cdot r\cdot\pi}{T}\cdot G\cdot\frac{M}{r}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ v^3=\frac{2\cdot\pi\cdot G\cdot M}{T}\ \Rightarrow\ v^3=\frac{2\cdot\pi\cdot G\cdot M}{T}\ /\sqrt[3]{}\ \Rightarrow\ v=\sqrt[3]{\frac{2\cdot\pi\cdot G\cdot M}{T}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2\cdot\pi\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 5.96\cdot 10^{24}\ kg}{9\,000\ s}}=6\,522.84\ \frac{m}{s}\approx 6.52\ \frac{km}{s}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 116

Odredite brzinu satelita koji obilazi Zemlju po kružnoj stazi s ophodnim vremenom 2 h 30 min. (gravitacijska konstanta G = $6.67\cdot 10^{-11}$ N · m^2 / kg^2, masa Zemlje M = $5.96\cdot 10^{24}$ kg)

$$A.\ 15.80\ \frac{km}{s}\qquad B.\ 6.52\ \frac{km}{s}\qquad C.\ 8.15\ \frac{km}{s}\qquad D.\ 11.20\ \frac{km}{s}$$

Rezultat: B.

Zadatak 117 (Stela, maturantica)

Označimo sa Z gravitacijsku silu kojom Zemlja djeluje na satelit kad je na njezinoj površini. Gravitacijska sila Zemlje na satelit kada je na visini R / 50 (R – polumjer Zemlje) jest:

$$A.\ 1.04\cdot Z\qquad B.\ 1.02\cdot Z\qquad C.\ 0.98\cdot Z\qquad D.\ 0.96\cdot Z$$

Rješenje 117

$F_1 = Z$, $r_1 = R$, $r_2=R+\frac{R}{50}=\frac{R}{1}+\frac{R}{50}=\frac{50\cdot R+R}{50}=\frac{51}{50}\cdot R,$ $F_2 = ?$

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela. Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Gravitacijska sila kojom Zemlja mase M djeluje na satelit mase m kad je na njezinoj površini je:

$$F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_1^2} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1 = Z \\ r_1 = R \end{bmatrix} \Rightarrow Z = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}.$$

Gravitacijska sila Zemlje mase M na satelit mase m kada je na visini r_2 iznosi:

$$F_2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{r_2^2} \Rightarrow \left[r_2 = \frac{51}{50} \cdot R \right] \Rightarrow F_2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{\left(\frac{51}{50} \cdot R \right)^2} \Rightarrow F_2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{\frac{2601}{2500} \cdot R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 = G \cdot \frac{2500 \cdot m \cdot M}{2601 \cdot R^2}.$$

Iz sustava jednadžbi dobijemo gravitacijsku silu F_2.

$$\left. \begin{array}{l} Z = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \\ F_2 = G \cdot \frac{2500 \cdot m \cdot M}{2601 \cdot R^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{F_2}{Z} = \frac{G \cdot \frac{2500 \cdot m \cdot M}{2601 \cdot R^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}} \Rightarrow \frac{F_2}{Z} = \frac{G \cdot \frac{2500 \cdot m \cdot M}{2601 \cdot R^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{Z} = \frac{2500}{2601} \Rightarrow \frac{F_2}{Z} = \frac{2500}{2601} \,/ \cdot Z \Rightarrow F_2 = \frac{2500}{2601} \cdot Z \Rightarrow F_2 = 0.96 \cdot Z.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 117

Označimo sa Z gravitacijsku silu kojom Zemlja djeluje na satelit kad je na njezinoj površini. Gravitacijska sila Zemlje na satelit kada je na visini R / 10 (R – polumjer Zemlje) jest:

$A.\ 1.01 \cdot Z \qquad B.\ 0.91 \cdot Z \qquad C.\ 0.83 \cdot Z \qquad D.\ 0.80 \cdot Z$

Rezultat: C.

Zadatak 118 (Petra, medicinska škola)

Satelit se giba oko Zemlje na udaljenosti 230 km od morske površine. Kolika je brzina satelita? (srednji polumjer Zemlje R = 6400 km, masa Zemlje $6 \cdot 10^{24}$ kg)

Rješenje 118

$h = 230\ \text{km} = 2.3 \cdot 10^5\ \text{m}, \qquad R = 6400\ \text{km} = 6.4 \cdot 10^6\ \text{m}, \qquad M = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}, \qquad v = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.
Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r brzinom v potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.
Sila gravitacije F_g između satelita mase m i Zemlje mase M na udaljenosti R + h mora biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} na satelit na udaljenosti R + h od središta vrtnje:

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow F_{cp} = F_g \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R+h} = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R+h} = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \quad / \cdot \frac{R+h}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{R+h} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{R+h} \quad / \sqrt{\ } \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \, kg}{6.4 \cdot 10^6 \, m + 2.3 \cdot 10^5 \, m}} = 7769.3 \, \frac{m}{s}.$$

Vježba 118

Satelit se giba oko Zemlje na udaljenosti 1700 km od morske površine. Kolika je brzina satelita? (srednji polumjer Zemlje R = 6400 km, masa Zemlje $6 \cdot 10^{24}$ kg)

Rezultat: $\approx 7000 \, \frac{m}{s}.$

Zadatak 119 (Lux, gimnazija)

Znajući masu Zemlje $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg i srednji polumjer R = 6400 km odredi ubrzanje na visini h = 1000 km iznad površine Zemlje. (ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje $g = 9.81 \, m / s^2$)

Rješenje 119

$M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6$ m, $h = 1000 \text{ km} = 1 \cdot 10^6$ m, $g = 9.81 \, m / s^2$, $g_1 = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.
Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

1.inačica

Za privlačenje tijela mase m koje je na visini h i Zemlje mase M možemo napisati

$$G = F \Rightarrow m \cdot g_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \Rightarrow m \cdot g_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \;/ : m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1 = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \; kg}{\left(6.4 \cdot 10^6 \; m + 1 \cdot 10^6 \; m\right)^2} = 7.31 \frac{m}{s^2}.$$

2.inačica

Na površini Zemlje je h = 0 pa za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase M možemo napisati

$$G = F \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \;/ : m \Rightarrow g = \frac{G \cdot M}{R^2}.$$

Za privlačenje tijela mase m koje je na visini h i Zemlje mase M možemo napisati

$$G = F \Rightarrow m \cdot g_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \Rightarrow m \cdot g_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2} \;/ : m \Rightarrow g_1 = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2}.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo g_1.

$$\left.\begin{array}{l} g = \frac{G \cdot M}{R^2} \\ g_1 = \frac{G \cdot M}{(R+h)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{\frac{G \cdot M}{(R+h)^2}}{\frac{G \cdot M}{R^2}} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{\frac{G \cdot M}{(R+h)^2}}{\frac{G \cdot M}{R^2}} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{\frac{1}{(R+h)^2}}{\frac{1}{R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 \;/ \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1 = g \cdot \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(\frac{6.4 \cdot 10^6 \; m}{6.4 \cdot 10^6 \; m + 1 \cdot 10^6 \; m}\right)^2 = 7.34 \frac{m}{s^2}.$$

(Odstupanje u rezultatu je zbog zaokruživanja.)

Vježba 119

Znajući masu Zemlje $M = 6 \cdot 10^{21}$ t i srednji polumjer R = 6400 km odredi ubrzanje na visini h = 1000 km iznad površine Zemlje. (ubrzanje slobodnog pada na površini Zemlje $g = 9.81 \; m / s^2$)

Rezultat: $7.34 \frac{m}{s^2}.$

Zadatak 120 (Lux, gimnazija)

Odredi prosječnu gustoću planeta Merkura ako je poznato da je perioda obilaska satelita neposredno uz površinu (prva svemirska brzina) 2.92 km / s. Koliko je gravitacijsko ubrzanje na tom planetu ako mu je polumjer 2439 km?

Rješenje 120

$v = 2.92\ km / s = 2920\ m / s,\qquad R = 2439\ km = 2.439 \cdot 10^6 m,\qquad \rho = ?,\qquad g = ?$

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Taj zakon zovemo općim zakonom gravitacije.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu.

Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom poučku

$$G = m \cdot g,$$

gdje je G sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka.

Da bi se tijelo, mase m, gibalo po kružnici, polumjera r, potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila:

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

gdje je v obodna ili linearna brzina.

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

Kugla polumjera r ima obujam (volumen):

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Sila gravitacije F_g između satelita mase m i Merkura mase M na udaljenosti R mora biti jednaka centripetalnoj sili F_{cp} na satelit na udaljenosti R od središta vrtnje:

$$F_g = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R} \ / \cdot \frac{R^2}{G \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{v^2 \cdot R}{G} \Rightarrow \begin{bmatrix} M = \rho \cdot V \ , \ V = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \\ M = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \end{bmatrix} \Rightarrow \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi = \frac{v^2 \cdot R}{G} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi = \frac{v^2 \cdot R}{G} \ / \cdot \frac{3}{4 \cdot R^3 \cdot \pi} \Rightarrow \rho = \frac{3 \cdot v^2}{4 \cdot \pi \cdot G \cdot R^2} =$$

$$=\frac{3\cdot\left(2920\ \frac{m}{s}\right)^{2}}{4\cdot\pi\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^{2}}{kg^{2}}\cdot\left(2.439\cdot 10^{6}\ m\right)^{2}}=5130\ \frac{kg}{m^{3}}.$$

U tom je slučaju sila teža uzrok kružnoga gibanja satelita. Zato mora biti F_{cp} jednako sili teži G.

$$F_{cp}=G\ \Rightarrow\ G=F_{cp}\ \Rightarrow\ m\cdot g=m\cdot\frac{v^{2}}{R}\ \Rightarrow\ m\cdot g=m\cdot\frac{v^{2}}{R}\ /\cdot\frac{1}{m}\ \Rightarrow\ g=\frac{v^{2}}{R}=$$

$$=\frac{\left(2920\ \frac{m}{s}\right)^{2}}{2.439\cdot 10^{6}\ m}=3.50\ \frac{m}{s^{2}}.$$

Vježba 120

Odredi prosječnu gustoću planeta Merkura ako je poznato da je perioda obilaska satelita neposredno uz površinu (prva svemirska brzina) 2.92 km / s. Koliko je gravitacijsko ubrzanje na tom planetu ako mu je promjer 4870 km?

Rezultat: $5130\ \frac{kg}{m^{3}},\ 3.50\ \frac{m}{s^{2}}.$