Zadatak 081 (Ljilja, srednja škola)

Koliku brzinu mora imati umjetni Zemljin satelit koji se giba po kružnici na visini h iznad Zemlje? Kolika je prva kozmička brzina? (polumjer Zemlje R = $6.4 \cdot 10^6$ m, masa Zemlje $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, gravitacijska konstanta G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Rješenje 081

R = $6.4 \cdot 10^6$ m, $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, G = $6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, v = ?, v_1 = ?

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase m_Z na udaljenosti R + h mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti R + h od središta vrtnje:

$$m \cdot \frac{v^2}{R+h} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R+h} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} \; / \cdot \frac{R+h}{m} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{m_Z}{R+h} \; / \sqrt{} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{m_Z}{R+h}}.$$

Za h = 0 dobije se prva kozmička brzina:

$$\left. \begin{array}{l} h = 0 \\ v = \sqrt{G \cdot \dfrac{m_Z}{R+h}} \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 = \sqrt{G \cdot \frac{m_Z}{R}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \; kg}{6.4 \cdot 10^6 \; m}} = 7907.67 \frac{m}{s} \approx 7.9 \frac{km}{s}.$$

Prva kozmička brzina je brzina koju satelit mora imati da bi jednoliko kružio oko Zemlje.

Malo astronomije: Kozmičke brzine
Prva kozmička brzina (brzina kruženja) je brzina potrebna za postavljanje tijela u kružnu stazu oko Zemlje. Druga kozmička brzina (brzina oslobađanja) je brzina potrebna za bijeg iz gravitacijskog polja Zemlje. Treća za savladavanje gravitacijskog polja i Zemlje i Sunca. Kozmičke brzine mogu se definirati i za bilo koja druga nebeska tijela.
Prva kozmička brzina nebeskog tijela je brzina koju mora imati umjetni satelit tog tijela da bi se gibao neposredno iznad površine nebeskog tijela (ili iznad atmosfere, ako postoji). Ona je određena izrazom $v_1 = \sqrt{g \cdot R},$ gdje je g akceleracija slobodnog pada na površini nebeskog tijela, R njegov polumjer.
Druga kozmička brzina nebeskog tijela je najmanja brzina koju mora imati satelit tog tijela da bi napustio gravitacijsko polje nebeskog tijela. Ona je određena izrazom $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1.$
Treća kozmička brzina nebeskog tijela je najmanja brzina koju mora imati neko tijelo da bi napustilo gravitacijsko polje Sunca. Ona je dana izrazom $v_3 = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{m_S}{d}} - v_O,$ gdje je m_S masa Sunca, d trenutna udaljenost nebeskog tijela od Sunca, v_O trenutna brzina nebeskog tijela na stazi oko Sunca

Vježba 081

Koliku brzinu mora imati umjetni Zemljin satelit koji se giba po kružnici na visini h iznad Zemlje? Kolika je prva kozmička brzina? (polumjer Zemlje $R = 6.4 \cdot 10^6$ m, masa Zemlje $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Rezultat: 7.9 km/s.

Zadatak 082 (Igor, gimnazija)

Kolikom se silom privlače dvije aluminijske kugle polumjera 0.5 m koje se dodiruju? (gustoća aluminija $\rho = 2700$ kg/m^3, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Rješenje 082

$r_1 = r_2 = 0.5$ m, $m_1 = m_2 = m$, $\rho = 2700$ kg/m^3, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, $F = ?$

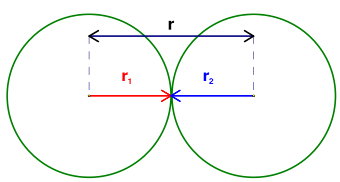
Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Udaljenost središta kugala r i njihove mase m iznose:



$$r = r_1 + r_2,$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = m_2 = m \\ \rho = \dfrac{m}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi.$$

Kugle se privlače silom:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow F = G \cdot \frac{m \cdot m}{\left(r_1 + r_2\right)^2} \Rightarrow F = G \cdot \frac{m^2}{\left(r_1 + r_2\right)^2} \Rightarrow F = G \cdot \left(\frac{m}{r_1 + r_2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$F = G \cdot \left(\frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi}{r_1 + r_2}\right)^2 = 6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \left(\frac{2700 \, \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot (0.5 \, m)^3 \cdot \pi}{0.5 \, m + 0.5 \, m}\right)^2 = 1.333 \cdot 10^{-4} \, N.$$

Vježba 082

Kolikom se silom privlače dvije aluminijske kugle polumjera 5 dm koje se dodiruju? (gustoća aluminija $\rho = 2700$ kg/m^3, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Rezultat: $1.333 \cdot 10^{-4}$ N.

Zadatak 082 (Matija, gimnazija)

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 1 : 4? (akceleracija slobodnog pada na površini Zemlje $g = 9.81$ m/s^2)

Rješenje 082

$r_S = 108 \cdot r_Z$, $\rho_S = \frac{1}{4} \cdot \rho_Z$, $g_Z = 9.81$ m/s^2, $g_S = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Sila kojom polje djeluje na kapljicu mora imati smjer suprotan od smjera sile teže, a po veličini je jednaka sili teži.
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

- Za privlačenje tijela mase m i Sunca mase m_S možemo napisati: $m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r_S^2}$.
- Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase m_Z možemo napisati: $m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2}$.

Dobivene jednadžbe podijelimo:

$$\frac{m \cdot g_S}{m \cdot g_Z} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r_S^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2}} \Rightarrow \frac{m \cdot g_S}{m \cdot g_Z} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r_S^2}}{G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{\frac{m_S}{r_S^2}}{\frac{m_Z}{r_Z^2}} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{m_S \cdot r_Z^2}{m_Z \cdot r_S^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S = \frac{m_S \cdot r_Z^2}{m_Z \cdot r_S^2} \cdot g_Z \Rightarrow g_S = \frac{\rho_S \cdot \frac{4}{3} \cdot r_S^3 \cdot \pi \cdot r_Z^2}{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_Z^3 \cdot \pi \cdot r_S^2} \cdot g_Z \Rightarrow g_S = \frac{\rho_S \cdot \frac{4}{3} \cdot r_S^3 \cdot \pi \cdot r_Z^2}{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_Z^3 \cdot \pi \cdot r_S^2} \cdot g_Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S = \frac{\rho_S \cdot r_S^3 \cdot r_Z^2}{\rho_Z \cdot r_Z^3 \cdot r_S^2} \cdot g_Z \Rightarrow g_S = \frac{\rho_S \cdot r_S}{\rho_Z \cdot r_Z} \cdot g_Z \Rightarrow g_S = \frac{\frac{1}{4} \cdot \rho_Z \cdot 108 \cdot r_Z}{\rho_Z \cdot r_Z} \cdot g_Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S = \frac{\frac{1}{4} \cdot \rho_Z \cdot 108 \cdot r_Z}{\rho_Z \cdot r_Z} \cdot g_Z \Rightarrow g_S = \frac{1}{4} \cdot 108 \cdot g_Z = \frac{108}{4} \cdot 9.81 \ \frac{m}{s^2} = 264.87 \ \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 082

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 1 : 4? (akceleracija slobodnog pada na površini Zemlje g = 10 m/s^2)

Rezultat: 270 m/s^2.

Zadatak 083 (Ana, gimnazija)

Odredi gustoću planeta na kojemu dan i noć traju T = 24 sata i na ekvatoru kojega su tijela bez težine. (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$)

Rješenje 083

$T = 24\ h = [24 \cdot 60 \cdot 60] = 86400\ s, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2, \quad \rho = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela i njegova obujma

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Sila gravitacije između tijela mase m i planeta mase m_p na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na tijelo na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_p}{r^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \ /: m \Rightarrow G \cdot \frac{m_p}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \Rightarrow G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r \cdot \pi = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} \ / \cdot \frac{3}{4 \cdot G \cdot r \cdot \pi} \Rightarrow \rho = \frac{3 \cdot \pi}{G \cdot T^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \pi}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot (86400\ s)^2} = 18.93 \frac{kg}{m^3} = 0.018930 \frac{g}{cm^3}.$$

Vježba 083

Odredi gustoću planeta na kojemu dan i noć traju T = 48 sati i na ekvatoru kojega su tijela bez težine. (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$)

Rezultat: $4.732\ kg/m^3$.

Zadatak 084 (Ana, gimnazija)

Kolika je prva kozmička brzina za Mjesec ako znamo da je polumjer Mjeseca $1.74 \cdot 10^6$ m, a masa $7.3 \cdot 10^{22}$ kg? (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$)

Rješenje 084

$R = 1.74 \cdot 10^6\ m, \quad m_M = 7.3 \cdot 10^{22}\ kg, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2, \quad v = ?$

Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.
Sila gravitacije između tijela mase m i mjeseca mase m_M na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na tijelo na udaljenosti r od središta vrtnje:

$$F = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad / \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{m_M}{r} \quad / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{m_M}{r}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{7.3 \cdot 10^{22} \ kg}{1.74 \cdot 10^6 \ m}} = 1672.82 \ \frac{m}{s}.$$

Vježba 084

Kolika je prva kozmička brzina za planet ako znamo da je polumjer Mjeseca $3.48 \cdot 10^6$ m, a masa $1.46 \cdot 10^{23}$ kg? (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2)

Rezultat: 1672.82 m/s.

Zadatak 085 (Marijana, srednja škola)

Izračunaj prvu kozmičku brzinu na površini Mjeseca kad znaš da je polumjer Mjeseca 1740 km, a akceleracija slobodnog pada na Mjesecu 0.17 Zemljine akceleracije. ($g = 9.81$ m/s^2)

Rješenje 085

$r = 1740$ km $= 1.74 \cdot 10^6$ m, $g_M = 0.17 \cdot g$, $g = 9.81$ m/s^2, $v = ?$

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.
Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Prva kozmička brzina za Mjesec je brzina koju bismo morali dati satelitu mase m da obleti Mjesec usporedno s njegovom površinom i blizu njega. U tom je slučaju sila teža uzrok kružnog gibanja satelita. Zato mora biti F_{cp} jednaka sili teži G:

$$F_{cp} = G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g_M \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g_M \quad / \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = r \cdot g_M \quad / \sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{r \cdot 0.17 \cdot g} = \sqrt{1.74 \cdot 10^6 \ m \cdot 0.17 \cdot 9.81 \ \frac{m}{s^2}} = 1703.47 \ \frac{m}{s}.$$

Vježba 085

Izračunaj prvu kozmičku brzinu na površini Mjeseca kad znaš da je polumjer Mjeseca 1740 km, a akceleracija slobodnog pada na Mjesecu 0.17 Zemljine akceleracije. ($g = 10$ m/s^2)

Rezultat: 1719.88 m/s.

Zadatak 086 (Mario, tehnička škola)

Satelit se giba blizu površine planeta gustoće ρ. Nađi ophodno vrijeme satelita.

Rješenje 086

G – gravitacijska konstanta, ρ, $T = ?$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela m i njegova obujma V:

$$\rho = \frac{m}{V} \;\Rightarrow\; m = \rho \cdot V.$$

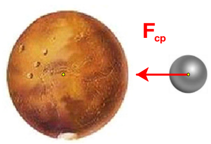
Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2}$$

koja ima smjer prema središtu kružnice, a gdje je m masa tijela, r polumjer kružnice, T ophodno vrijeme (vrijeme jednog okreta).
Dva tijela koja možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta.



Masa M planeta (koji ima oblik kugle polumjera R) iznosi:

$$M = \rho \cdot V \;\Rightarrow\; M = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi.$$

Sila gravitacije između satelita mase m i planeta mase M na udaljenosti R mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti R od središta vrtnje:

$$F_{cp} = F \;\Rightarrow\; m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \;\Rightarrow\; m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \;/ \cdot \frac{T^2 \cdot R^2}{G \cdot m \cdot M} \;\Rightarrow$$

$$F_{cp} = F \;\Rightarrow\; m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \;\Rightarrow\; T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot M} \;\Rightarrow\; \left[M = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi} \;\Rightarrow\; T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi} \;\Rightarrow\; T^2 = \frac{3 \cdot \pi}{G \cdot \rho} \;/\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; T = \sqrt{\frac{3 \cdot \pi}{G \cdot \rho}}.$$

Vježba 086

Satelit se giba blizu površine planeta ophodnim vremenom T. Nađi gustoću planeta.

Rezultat: $\rho = \dfrac{3 \cdot \pi}{G \cdot T^2}.$

Zadatak 087 (Kety, gimnazija)

Kolika je gravitacijska sila na tijelo mase 1 t u točki Zemljinoga gravitacijskog polja jakosti 2.4 N/kg?

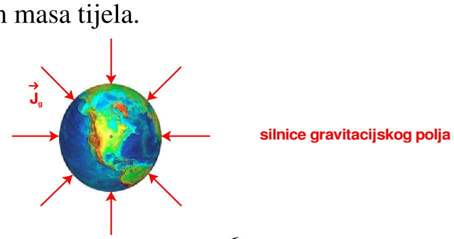
Rješenje 087

m = 1 t = 1000 kg, J_g = 2.4 N/kg, F = ?

Gravitacijsko polje je prostor oko nekog tijela u kojemu djeluje njegovo gravitacijsko privlačenje. Jakost gravitacijskog polja, J_g, jest

$$J_g = \frac{F}{m},$$

gdje je F gravitacijska sila, a m masa tijela.



Gravitacijska sila F na tijelo iznosi:

$$J_g = \frac{F}{m} \Rightarrow J_g = \frac{F}{m} \; / \cdot m \Rightarrow F = m \cdot J_g = 1000 \; kg \cdot 2.4 \; \frac{N}{kg} = 2400 \; N.$$

Vježba 087

Kolika je gravitacijska sila na tijelo mase 2 t u točki Zemljinoga gravitacijskog polja jakosti 2.4 N/kg?

Rezultat: 4800 N.

Zadatak 088 (Dado, gimnazija)

Koliko je dugačka nit jednostavnog njihala ako zamislimo da se njiše na nekom planetu jednake gustoće kao Zemlja, polumjera dva puta manjeg od Zemlje? Njihalo učini tri titraja u minuti. (ubrzanje sile teže na Zemlji $g_z = 9.81 \; m/s^2$)

Rješenje 088

$\rho_p = \rho_z = \rho$, $r_p = 0.5 \cdot r_z$, $n = 3$ titraja, $t = 1$ min $= 60$ s, $g_z = 9.81 \; m/s^2$, $l = ?$

Dva tijela koja možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta.
Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela m i njegova obujma V:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V.$$

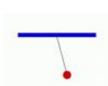
Drugi Newtonov poučak: Ako na tijelo djeluje stalna sila u smjeru njegova gibanja, tijelo ima akceleraciju koja je proporcionalna sili, a obrnuto proporcionalna masi tijela te ima isti smjer kao i sila:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow F = m \cdot a.$$

Težina tijela jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teže.

$$G = m \cdot g.$$

Matematičko njihalo je njihalo (zamišljeno) koje ima nerastegljivu nit bez mase i kojega je masa kuglice koja njiše koncentrirana u jednoj točki. Uz male amplitude takvo njihalo izvodi harmoničke titraje. Vrijeme jednog titraja matematičkog njihala jest



$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l duljina njihala, a g akceleracija slobodnog pada.
Period (vrijeme jednog ophoda, titraja) T matematičkog njihala na planetu je:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60 \; s}{3} = 20 \; s.$$

Pod djelovanjem sile gravitacije kojom planet mase m_p djeluje na tijelo mase m (koje se nalazi na površini planeta) čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_p}{r_p^2},$$

tijelo slobodno pada ubrzanjem g_p pa je prema drugom Newtonovom poučku:

$$m \cdot g_p = G \cdot \frac{m \cdot m_p}{r_p^2} \Rightarrow m \cdot g_p = G \cdot \frac{m \cdot m_p}{r_p^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_p = G \cdot \frac{m_p}{r_p^2}.$$

Pod djelovanjem sile gravitacije kojom Zemlja mase m_z djeluje na tijelo mase m (koje se nalazi na površini Zemlje) čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_z}{r_z^2},$$

tijelo slobodno pada ubrzanjem g_z pa je prema drugom Newtonovom poučku:

$$m \cdot g_z = G \cdot \frac{m \cdot m_z}{r_z^2} \Rightarrow m \cdot g_z = G \cdot \frac{m \cdot m_z}{r_z^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_z = G \cdot \frac{m_z}{r_z^2}.$$

Računamo omjer ubrzanja sile teže na planetu i Zemlji:

$$\left. \begin{array}{l} g_p = G \cdot \dfrac{m_p}{r_p^2} \\ g_z = G \cdot \dfrac{m_z}{r_z^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{G \cdot \dfrac{m_p}{r_p^2}}{G \cdot \dfrac{m_z}{r_z^2}} \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{\cancel{G} \cdot \dfrac{m_p}{r_p^2}}{\cancel{G} \cdot \dfrac{m_z}{r_z^2}} \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{m_p \cdot r_z^2}{m_z \cdot r_p^2}.$$

Budući da je masa kugle polumjera r i gustoće ρ dana izrazom

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi,$$

iz masa planeta i Zemlje te njihovih polumjera dobije se:

$$\frac{g_p}{g_z} = \frac{m_p \cdot r_z^2}{m_z \cdot r_p^2} \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{\rho_p \cdot \frac{4}{3} \cdot r_p^3 \cdot \pi \cdot r_z^2}{\rho_z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_z^3 \cdot \pi \cdot r_p^2} \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{\rho_p \cdot \cancel{\frac{4}{3}} \cdot r_p^3 \cdot \cancel{\pi} \cdot r_z^2}{\rho_z \cdot \cancel{\frac{4}{3}} \cdot r_z^3 \cdot \cancel{\pi} \cdot r_p^2} \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{\rho_p \cdot r_p^3 \cdot r_z^2}{\rho_z \cdot r_z^3 \cdot r_p^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{\rho_p \cdot r_p}{\rho_z \cdot r_z} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjeti zadatka} \\ \rho_p = \rho_z = \rho \;\; , \;\; r_p = 0.5 \cdot r_z \end{array} \right] \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{\rho \cdot 0.5 \cdot r_z}{\rho \cdot r_z} \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{\cancel{\rho} \cdot 0.5 \cdot \cancel{r_z}}{\cancel{\rho} \cdot \cancel{r_z}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = 0.5 \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{5}{10} \Rightarrow \frac{g_p}{g_z} = \frac{1}{2} \; / \cdot g_z \Rightarrow g_p = \frac{1}{2} \cdot g_z.$$

Dužina niti jednostavnog (matematičkog) njihala koje njiše na nekom planetu jednake gustoće kao Zemlja, polumjera dva puta manjeg od Zemljina polumjera, iznosi:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_p}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\frac{1}{2} \cdot g_z}} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{g_z}} \; /^2 \Rightarrow T^2 = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{2 \cdot l}{g_z} \; / \cdot g_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 \cdot g_z = 4 \cdot \pi^2 \cdot 2 \cdot l \Rightarrow T^2 \cdot g_z = 8 \cdot \pi^2 \cdot l \; / \cdot \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \Rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g_z}{8 \cdot \pi^2} = \frac{(20 \; s)^2 \cdot 9.81 \; \frac{m}{s^2}}{8 \cdot \pi^2} = 49.698 \; m.$$

Vježba 088

Koliko je dugačka nit jednostavnog njihala ako zamislimo da se njiše na nekom planetu jednake gustoće kao Zemlja, polumjera dva puta manjeg od Zemlje? Njihalo učini šest titraja u dvije minute.

Rezultat: 49.698 m.

Zadatak 089 (Dado, gimnazija)

Neki satelit obilazi Zemlju svakih 98 minuta krećući se na srednjoj visini 500 km. Izračunaj iz tih podataka masu Zemlje. (srednji polumjer Zemlje r = 6400 km, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$)

Rješenje 089

$T = 98\ min = [98 \cdot 60] = 5880\ s$, $h = 500\ km = 500000\ m$, $r = 6400\ km = 6400000\ m$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$, $m_z = ?$

Dva tijela koja možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Pri umjetnim satelitima iskorišćuje se gravitacija kao centripetalna sila. Gravitacija može, uz potrebnu kružnu brzinu satelita, prisiliti satelit da kruži, na primjer, oko Zemlje.

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice, a gdje je m masa tijela, r polumjer kružnice po kojoj se tijelo giba, T period (vrijeme jednog ophoda).

Sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase m_z na udaljenosti r + h mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti r + h od središta vrtnje:

$$F = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_z}{(r+h)^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (r+h)}{T^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_z}{(r+h)^2} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (r+h)}{T^2} \ / \cdot \frac{(r+h)^2}{G \cdot m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_z = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (r+h)^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (6400000\ m + 500000\ m)^3}{6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot (5880\ s)^2} = 5.624 \cdot 10^{24}\ kg.$$

Vježba 089

Neki satelit obilazi Zemlju svakih 98 minuta krećući se na srednjoj visini $5 \cdot 10^5$ m. Izračunaj iz tih podataka masu Zemlje. (srednji polumjer Zemlje $r = 6.4 \cdot 10^6$ m, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$)

Rezultat: $5.624 \cdot 10^{24}$ kg.

Zadatak 090 (Tea, srednja škola)

Pretpostavivši da se Mjesec giba oko Zemlje jednoliko po kružnici izračunajte masu Zemlje. (udaljenost Mjeseca od Zemlje $r = 3.84 \cdot 10^8$ m, period gibanja Mjeseca oko Zemlje T = 27.3 d, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$)

Rješenje 090

$r = 3.84 \cdot 10^8\ m$, $T = 27.3\ d = [27.3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60] = 2.36 \cdot 10^6\ s$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$, $m = ?$

Dva tijela koja možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Pri umjetnim satelitima iskorišćuje se gravitacija kao centripetalna sila. Gravitacija može, uz potrebnu kružnu brzinu satelita, prisiliti satelit da kruži, na primjer, oko Zemlje.

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice, a gdje je m masa tijela, r polumjer kružnice po kojoj se tijelo giba, T period (vrijeme jednog ophoda).

Privlačna sila između Mjeseca i Zemlje je

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2}$$

i jednaka je centripetalnoj sili kružnog gibanja.

$$F = F_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot m_M}{T^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_M}{r^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r \cdot m_M}{T^2} \; / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(3.84 \cdot 10^8 \; m\right)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \left(2.36 \cdot 10^6 \; s\right)^2} = 6 \cdot 10^{24} \; kg.$$

Uočimo da na sličan način možemo izračunati masu bilo kojeg planeta iz podataka o njegovu satelitu.

Vježba 090

Pretpostavivši da se Mjesec giba oko Zemlje jednoliko po kružnici izračunajte masu Zemlje. (udaljenost Mjeseca od Zemlje r = 3.84 · 10^5 km, period gibanja Mjeseca oko Zemlje T = 27.3 d, gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2})

Rezultat: 6 · 10^{24} kg.

Zadatak 091 (Marija, srednja škola)

Komunikacijski satelit kruži na udaljenosti R od središta Zemlje. Zamijenimo li satelit novim, koji je dva puta veće mase, a istog ophodnoga vremena, koliko će iznositi udaljenost novog satelita od središta Zemlje?

$$A. \; \frac{R}{2} \qquad B. \; R \qquad C. \; \sqrt{2} \cdot R \qquad D. \; 2 \cdot R$$

Rješenje 091

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je T perioda, vrijeme jednog ophoda.

Dva tijela koja možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Pri umjetnim satelitima iskorišćuje se gravitacija kao centripetalna sila. Gravitacija može, uz potrebnu kružnu brzinu satelita, prisiliti satelit da kruži, na primjer, oko Zemlje. Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

1.inačica

Pretpostavimo da satelit oblijeće Zemlju usporedno s njezinom površinom i blizu nje. Otpor zraka zanemarimo. U tom je slučaju sila teža uzrok kružnoga gibanja pa je zato sila F_{cp} jednaka sili teži G.

$$F_{cp} = G \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = m \cdot g \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = m \cdot g \; / \cdot \frac{T^2}{m \cdot 4 \cdot \pi^2} \Rightarrow r = \frac{g \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = g \cdot \left(\frac{T}{2 \cdot \pi} \right)^2.$$

Polumjer r ovisi samo o periodi (ophodnom vremenu) T. Budući da je ophodno vrijeme isto, polumjer se ne mijenja. Odgovor je pod B.

2.inačica

Budući da sila gravitacije između satelita mase m i Zemlje mase m_Z na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti r od središta vrtnje, slijedi:

$$F_{cp} = F \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r^2} \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r^2} \; / \cdot \frac{r^2 \cdot T^2}{m \cdot 4 \cdot \pi^2} \Rightarrow r^3 = \frac{G \cdot m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{G \cdot m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}}.$$

Polumjer r ovisi o masi Zemlje i periodi (ophodnom vremenu) T. Masa Zemlje je konstantna, a ophodno vrijeme je isto pa se polumjer ne mijenja. Odgovor je pod B.

Vježba 091

Komunikacijski satelit kruži na udaljenosti R od središta Zemlje. Zamijenimo li satelit novim, koji je četiri puta veće mase, a istog ophodnoga vremena, koliko će iznositi udaljenost novog satelita od središta Zemlje?

$$A.\ \frac{R}{2} \qquad B.\ R \qquad C.\ \sqrt{2} \cdot R \qquad D.\ 2 \cdot R$$

Rezultat: B.

Zadatak 092 (Medina, gimnazija)

Odredi brzinu tijela na visini 230 km iznad Zemlje i periodu njegovog obilaska oko Zemlje. (gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}, polumjer Zemlje R = 6400 km, masa Zemlje m_Z = 6 · 10^{24} kg)

Rješenje 092

h = 230 km = 2.3 · 10^5 m, G = 6.67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2}, R = 6400 km = 6.4 · 10^6 m, m_Z = 6 · 10^{24} kg, v = ?, T = ?

Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad , \quad F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice i gdje je T perioda, vrijeme jednog ophoda.

Dva tijela koja možemo shvatiti materijalnim točkama s obzirom na njihovu međusobnu udaljenost privlače se silom

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje su m_1 i m_2 mase materijalnih točaka, r udaljenost između njih, a G gravitacijska konstanta. Pri umjetnim satelitima iskorišćuje se gravitacija kao centripetalna sila. Gravitacija može, uz potrebnu kružnu brzinu satelita, prisiliti satelit da kruži, na primjer, oko Zemlje.
Jednoliko kružno gibanje tijela omogućuje gravitacijsko privlačenje tijela i Zemlje. Gravitacijska sila koja djeluje na tijelo je centripetalna sila. Stoga je uvjet kruženja tijela na određenoj visini njegovo izbacivanje takvom brzinom pri kojoj će gravitacijska sila biti jednaka centripetalnoj sili. Dakle, sila gravitacije F između tijela mase m i Zemlje mase m_Z na udaljenosti R + h mora biti jednaka centripetalnoj sili na tijelo na udaljenosti R + h od središta vrtnje.

$$F_{cp} = F \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R+h} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{R+h} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} \; / \cdot \frac{R+h}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{m_Z}{R+h} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{m_Z}{R+h} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{m_Z}{R+h}} =$$

$$= \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \, kg}{6.4 \cdot 10^6 \, m + 2.3 \cdot 10^5 \, m}} = 7\,769 \, \frac{m}{s}.$$

Računamo periodu obilaska tijela oko Zemlje.

1.inačica

Ophodno vrijeme dobit ćemo iz izraza

$$v = \frac{2 \cdot (R+h) \cdot \pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot (R+h) \cdot \pi}{v} = \frac{2 \cdot \left(6.4 \cdot 10^6 \, m + 2.3 \cdot 10^5 \, m\right) \cdot \pi}{7\,769 \, \frac{m}{s}} =$$

$$= 5362.02 \, s = [5362.02 : 3600] = 1.48945 \, h = 1 \, h + 0.48945 \, h = 1 \, h + 0.48945 \cdot 60 \, \text{min} =$$

$$= 1 \, h + 29.367 \, \text{min} \approx 1 \, h \; 29 \, \text{min}.$$

2.inačica

Jednoliko kružno gibanje tijela omogućuje gravitacijsko privlačenje tijela i Zemlje. Gravitacijska sila koja djeluje na tijelo je centripetalna sila. Stoga je uvjet kruženja tijela na određenoj visini njegovo izbacivanje takvom brzinom pri kojoj će gravitacijska sila biti jednaka centripetalnoj sili. Dakle, sila gravitacije F između tijela mase m i Zemlje mase m_Z na udaljenosti R + h mora biti jednaka centripetalnoj sili na tijelo na udaljenosti R + h od središta vrtnje.

$$F_{cp} = F \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (R+h)}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (R+h)}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} \; / \cdot \frac{1}{m \cdot (R+h)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = G \cdot \frac{m_Z}{(R+h)^3} \Rightarrow \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2} = \frac{(R+h)^3}{G \cdot m_Z} \; / \cdot 4 \cdot \pi^2 \Rightarrow T^2 = \frac{(R+h)^3}{G \cdot m_Z} 4 \cdot \pi^2 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G \cdot m_Z} 4 \cdot \pi^2} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \cdot (R+h) \cdot \sqrt{\frac{R+h}{G \cdot m_Z}} =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \left(6.4 \cdot 10^{6}\ m + 2.3 \cdot 10^{5}\ m\right) \cdot \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^{6}\ m + 2.3 \cdot 10^{5}\ m}{6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^{2}}{kg^{2}} \cdot 6 \cdot 10^{24}\ kg}} =$$

$$= 5361.81\ s = \left[5361.81 : 3600\right] = 1.48939\ h = 1\ h + 0.48939\ h = 1\ h + 0.48939 \cdot 60\ \min =$$

$$= 1\ h + 29.363\ \min \approx 1\ h\ 29\ \min.$$

Vježba 092

Odredi brzinu tijela na visini 230 000 m iznad Zemlje. (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}, polumjer Zemlje R = 6400 km, masa Zemlje $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg)

Rezultat: 7769 m/s.

Zadatak 093 (Medina, gimnazija)

Na kojoj visini je polje Zemlje četiri puta slabije nego na njezinoj površini? (polumjer Zemlje R)

Rješenje 093

R, h = ?

Gravitacijsko polje je prostor oko nekog tijela u kojem djeluje njegovo gravitacijsko privlačenje. Jakost gravitacijskog polja J_g točkastog (ili sfernog) tijela, mase m na udaljenosti r, iznosi

$$J_g = G \cdot \frac{m}{r^2}.$$

Neka je h visina iznad Zemlje na kojoj je polje Zemlje četiri puta slabije nego na njezinoj površini. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$G \cdot \frac{m}{R^2} = 4 \cdot G \cdot \frac{m}{(R+h)^2} \Rightarrow G \cdot \frac{m}{R^2} = 4 \cdot G \cdot \frac{m}{(R+h)^2} \ / \cdot \frac{1}{G \cdot m} \Rightarrow \frac{1}{R^2} = \frac{4}{(R+h)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R+h)^2 = 4 \cdot R^2 \Rightarrow (R+h)^2 = 4 \cdot R^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow R + h = 2 \cdot R \Rightarrow h = 2 \cdot R - R \Rightarrow h = R.$$

Vježba 093

Na kojoj visini je polje Zemlje devet puta slabije nego na njezinoj površini? (polumjer Zemlje R)

Rezultat: 2 · R.

Zadatak 094 (Željka, gimnazija)

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca 30 km/s, a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^8$ km? (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2})

Rješenje 094

v = 30 km/s = $3 \cdot 10^4$ m/s, r = $1.5 \cdot 10^8$ km = $1.5 \cdot 10^{11}$ m, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}, m_S = ?

Jednoliko kružno gibanje je gibanje kod kojeg tijelo u jednakim vremenskim intervalima prijeđe jednake lukove kružnice. Vrijednost njegove brzine je stalno ista, ali se pravac i smjer vektora brzine neprestano mijenjaju.

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.

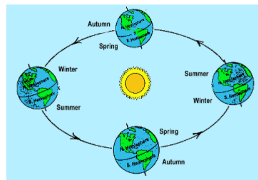
Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Sila gravitacije između Zemlje mase m i Sunca mase m_S na udaljenosti r mora biti jednaka centripetalnoj sili na Zemlju na udaljenosti r od središta vrtnje.



$$F_{cp} = F_G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r^2} \; / \cdot \frac{r^2}{G \cdot m} \Rightarrow m_S = \frac{v^2 \cdot r}{G} =$$

$$= \frac{\left(3 \cdot 10^4 \ \frac{m}{s}\right)^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \ m}{6.67 \cdot 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = 2 \cdot 10^{30} \ kg = 2 \cdot 10^{27} \ t.$$

Vježba 094

Kolika je masa Sunca kad znamo da je srednja brzina Zemlje pri kruženju oko Sunca $3 \cdot 10^4$ m/s, a polumjer njezine staze $1.5 \cdot 10^{11}$ m? (gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2})

Rezultat: $2 \cdot 10^{27}$ t.

Zadatak 095 (Željka, gimnazija)

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 1 : 4?

Rješenje 095

$r_S = 108 \cdot r_Z$, $\rho_S : \rho_Z = 1 : 4 \Rightarrow \rho_Z = 4 \cdot \rho_S$, $g_S = ?$

Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Ako se tijelo mase m nalazi na površini Zemlje, gravitacijska sila kojom Zemlja djeluje na tijelo dana je izrazom

$$F = m \cdot g.$$

Tu istu silu možemo izraziti pomoću općeg zakona gravitacije, uzevši u obzir da je udaljenost tijela na površini Zemlje od njezina središta jednaka polumjeru Zemlje R_Z:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2}.$$

Kugla polumjera (radijusa) r ima obujam (volumen)

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Za privlačenje tijela mase m i

- Zemlje mase m_Z možemo napisati

$$m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2} \Rightarrow m \cdot g_Z = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{r_Z^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_Z = G \cdot \frac{m_Z}{r_Z^2}.$$

- Sunca mase m_S možemo napisati

$$m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r_S^2} \Rightarrow m \cdot g_S = G \cdot \frac{m \cdot m_S}{r_S^2} \; / \cdot \frac{1}{m} \Rightarrow g_S = G \cdot \frac{m_S}{r_S^2}.$$

Primijenimo izraz za masu

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$$

te zadane omjere za polumjere i gustoće Zemlje i Sunca.

Zemlja

$$\left. \begin{array}{l} g_Z = G \cdot \dfrac{m_Z}{r_Z^2} \\ V_Z = \dfrac{4}{3} \cdot r_Z^3 \cdot \pi \;,\; m_Z = \rho_Z \cdot V_Z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g_Z = G \cdot \dfrac{m_Z}{r_Z^2} \\ m_Z = \rho_Z \cdot \dfrac{4}{3} \cdot r_Z^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow g_Z = G \cdot \frac{\rho_Z \cdot \frac{4}{3} \cdot r_Z^3 \cdot \pi}{r_Z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_Z = \frac{4}{3} \cdot G \cdot \rho_Z \cdot r_Z \cdot \pi \Rightarrow \left[\rho_Z = 4 \cdot \rho_S \right] \Rightarrow g_Z = \frac{4}{3} \cdot G \cdot 4 \cdot \rho_S \cdot r_Z \cdot \pi \Rightarrow g_Z = \frac{16}{3} \cdot G \cdot \rho_S \cdot r_Z \cdot \pi.$$

Sunce

$$\left. \begin{array}{l} g_S = G \cdot \dfrac{m_S}{r_S^2} \\ V_S = \dfrac{4}{3} \cdot r_S^3 \cdot \pi \;,\; m_S = \rho_S \cdot V_S \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g_S = G \cdot \dfrac{m_S}{r_S^2} \\ m_S = \rho_S \cdot \dfrac{4}{3} \cdot r_S^3 \cdot \pi \end{array} \right\} \Rightarrow g_S = G \cdot \frac{\rho_S \cdot \frac{4}{3} \cdot r_S^3 \cdot \pi}{r_S^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S = \frac{4}{3} \cdot G \cdot \rho_S \cdot r_S \cdot \pi \Rightarrow \left[r_S = 108 \cdot r_Z \right] \Rightarrow g_S = \frac{4}{3} \cdot G \cdot \rho_S \cdot 108 \cdot r_Z \cdot \pi \Rightarrow g_S = 144 \cdot G \cdot \rho_S \cdot r_Z \cdot \pi.$$

Akceleracija slobodnog pada na površini Sunca iznosi:

$$\frac{g_S}{g_Z} = \frac{144 \cdot G \cdot \rho_S \cdot r_Z \cdot \pi}{\frac{16}{3} \cdot G \cdot \rho_S \cdot r_Z \cdot \pi} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{144 \cdot \cancel{G \cdot \rho_S \cdot r_Z \cdot \pi}}{\frac{16}{3} \cdot \cancel{G \cdot \rho_S \cdot r_Z \cdot \pi}} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = \frac{432}{16} \Rightarrow \frac{g_S}{g_Z} = 27 \; / \cdot g_Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_S = 27 \cdot g_Z = 27 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 264.87 \frac{m}{s^2}.$$

Vježba 095

Kolika je akceleracija slobodnog pada na površini Sunca ako je njegov polumjer 108 puta veći od polumjera Zemlje i ako je odnos gustoća Sunca i Zemlje 3 : 12 ?

Rezultat: 264.87 m/s^2.

Zadatak 096 (Josip, tehnička škola)

Izračunaj masu i gustoću Zemlje. (Srednji polumjer Zemlje je R = 6400 km, akceleracija slobodnog pada g = 9.81 m/s^2, gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$)

Rješenje 096

$R = 6400$ km $= 6.4 \cdot 10^6$ m, $g = 9.81$ m/s^2, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$, $m_Z = ?$, $\rho = ?$

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Ako se tijelo mase m nalazi na površini Zemlje, gravitacijska sila kojom Zemlja djeluje na tijelo dana je izrazom

$$F = m \cdot g.$$

Tu istu silu možemo izraziti pomoću općeg zakona gravitacije, uzevši u obzir da je udaljenost tijela na površini Zemlje od njezina središta jednaka polumjeru Zemlje R:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2}.$$

Kugla polumjera (radijusa) r ima obujam (volumen)

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Gustoću ρ neke tvari možemo naći iz omjera mase tijela m i njegova obujma V:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

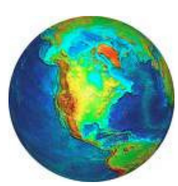
Sila teža na Zemlji je naziv za gravitacijsku silu kojom Zemlja privlači sva tijela blizu svoje površine. Za privlačenje tijela mase m i Zemlje mase m_Z možemo napisati

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} \;/\cdot \frac{R^2}{G \cdot m} \Rightarrow m_Z = \frac{g \cdot R^2}{G} =$$

$$= \frac{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(6.4 \cdot 10^6 \ m\right)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = 6.024 \cdot 10^{24} \ kg.$$

Gustoća je kvocijent mase i obujma tijela te za Zemljinu srednju gustoću vrijedi:

$$\rho = \frac{m_Z}{V} \Rightarrow \rho = \frac{m_Z}{\frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi} \Rightarrow \rho = \frac{3 \cdot m_Z}{4 \cdot R^3 \cdot \pi} = \frac{3 \cdot 6.024 \cdot 10^{24} \ kg}{4 \cdot \left(6.4 \cdot 10^6 \ m\right)^3 \cdot \pi} = 5486 \ \frac{kg}{m^3}.$$



Vježba 096

Izračunaj masu Zemlje. (Srednji polumjer Zemlje je R = 6400 km, akceleracija slobodnog pada g = 10 m/s^2, gravitacijska konstanta G = 6.67 · 10^{-11} N · m^2 · kg^{-2})

Rezultat: 6.14 · 10^{24} kg.

Zadatak 097 (Maturant, tehnička škola)

Dva satelita gibaju se u istom smjeru po kružnim putanjama koje su u istoj ravnini. Brzine su im v_1 i v_2. Odredite najmanju udaljenost između satelita. Polumjer Zemlje je R. (g ubrzanje sile teže)

Rješenje 097

$v_1, \quad v_2, \quad R, \quad g, \quad d = ?$

Jednoliko kružno gibanje je gibanje kod kojeg tijelo u jednakim vremenskim intervalima prijeđe jednake lukove kružnice. Vrijednost njegove brzine je stalno ista, ali se pravac i smjer vektora brzine neprestano mijenjaju.
Da bi se tijelo mase m gibalo po kružnici polumjera r potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.
Opći zakon gravitacije:
Ako se bilo koja dva tijela masa m_1 i m_2 nalaze u međusobnoj udaljenosti r, među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.
Težina tijela G jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Ako se tijelo mase m nalazi na površini Zemlje, gravitacijska sila kojom Zemlja djeluje na tijelo dana je izrazom

$$F = m \cdot g.$$

Tu istu silu možemo izraziti pomoću općeg zakona gravitacije, uzevši u obzir da je udaljenost tijela na površini Zemlje od njezina središta jednaka polumjeru Zemlje R:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2}.$$

Dakle, sila teža na Zemlji je naziv za gravitacijsku silu kojom Zemlja privlači sva tijela u blizini svoje površine. Promatrajući djelovanje gravitacijske sile na tijelo mase m na površini Zemlje mase m_Z i polumjera R, možemo pisati:

$$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} \; / \cdot \frac{R^2}{m} \Rightarrow g \cdot R^2 = G \cdot m_Z.$$

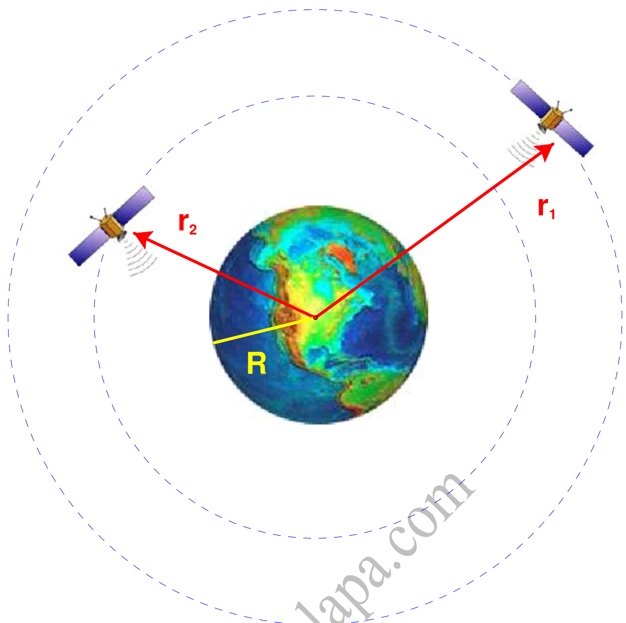
Sile gravitacije između satelita masa m_1 i m_2 i Zemlje mase m_Z na udaljenostima r_1 i r_2 moraju biti jednake centripetalnim silama na satelite na udaljenostima r_1 i r_2 od središta vrtnje:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \cdot \frac{v_1^2}{r_1} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_Z}{r_1^2} \\ m_2 \cdot \frac{v_2^2}{r_2} = G \cdot \frac{m_2 \cdot m_Z}{r_2^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1 \cdot \frac{v_1^2}{r_1} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_Z}{r_1^2} \; / \cdot \frac{r_1^2}{m_1 \cdot v_1^2} \\ m_2 \cdot \frac{v_2^2}{r_2} = G \cdot \frac{m_2 \cdot m_Z}{r_2^2} \; / \cdot \frac{r_2^2}{m_2 \cdot v_2^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = G \cdot \frac{m_Z}{v_1^2} \\ r_2 = G \cdot \frac{m_Z}{v_2^2} \end{array}\right\}.$$

Računamo najmanju udaljenost između satelita.

$$d = r_1 - r_2 \;\Rightarrow\; d = G \cdot \frac{m_Z}{v_1^2} - G \cdot \frac{m_Z}{v_2^2} \;\Rightarrow\; d = G \cdot m_Z \cdot \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) \;\Rightarrow\; \left[g \cdot R^2 = G \cdot m_Z \right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; d = g \cdot R^2 \cdot \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right).$$



Vježba 097

Dva satelita gibaju se u istom smjeru po kružnim putanjama koje su u istoj ravnini. Brzine su im v_1 i v_2. Odredite najveću udaljenost između satelita. Polumjer Zemlje je R. (g ubrzanje sile teže)

Rezultat: $d = g \cdot R^2 \cdot \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right).$