

### Zadatak 061 (Ana Marija, gimnazija)

U kabini dizalice visi njihalo. Kada kabina miruje, period njihala jednak je  $T = 1$  s. Kad se kabina giba stalnom akceleracijom  $a$ , period mu je  $T_1 = 1.2$  s. Odredite smjer i veličinu akceleracije kabine. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 061

$$T = 1 \text{ s}, \quad T_1 = 1.2 \text{ s}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad a = ?$$

Budući da se period njihala povećao, znači da je gibanje kabine uzrokovalo smanjenje akceleracije slobodnog pada  $g$  za veličinu akceleracije  $a$ . Veličina akceleracije  $a$  iznosi:

$$\left. \begin{aligned} T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \\ T_1 &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g-a}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{T}{T_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g-a}}} \Rightarrow \frac{T}{T_1} = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\frac{l}{g-a}}} \Rightarrow \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{l}{g-a}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g-a}{g}} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \left( \frac{T}{T_1} \right)^2 = \frac{g-a}{g} \quad / \cdot g \Rightarrow g \cdot \left( \frac{T}{T_1} \right)^2 = g-a \Rightarrow a = g - g \cdot \left( \frac{T}{T_1} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = g \cdot \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_1} \right)^2 \right] = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{1 \text{ s}}{1.2 \text{ s}} \right)^2 \right] = 2.9975 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Akceleracija ima smjer prema dolje.

#### Vježba 061

U kabini dizalice visi njihalo. Kada kabina miruje, period njihala jednak je  $T = 1$  s. Kad se kabina giba stalnom akceleracijom  $a$ , period mu je  $T_1 = 1.2$  s. Odredite smjer i veličinu akceleracije kabine. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $3.06 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Akceleracija ima smjer prema dolje.

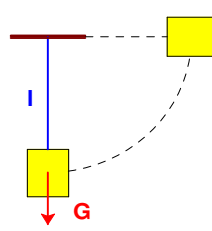
### Zadatak 062 (Anamarija, gimnazija)

Na konopcu duljine  $l$  visi uteg težine  $G$ . Premjestimo konopac u horizontalan položaj i ispustimo ga. Kolika je napetost niti kad uteg opet prođe vertikalnim položajem?

#### Rješenje 062

$$l, \quad G, \quad F_N = ?$$

Kad se uteg njiše, konopac napinje osim težine utega još i centrifugalna sila. Najveća je napetost tada kad uteg prolazi položajem ravnoteže (vertikalnim položajem):


$$F_N = G + F_{cf} \Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{l} \Rightarrow \left[ v^2 = 2 \cdot g \cdot l \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_N = m \cdot g + m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l}{l} \Rightarrow F_N = m \cdot g + 2 \cdot m \cdot g \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_N = 3 \cdot m \cdot g \Rightarrow F_N = 3 \cdot G.$$

#### Vježba 062

Na konopcu duljine  $l$  visi uteg težine  $10 \text{ N}$ . Premjestimo konopac u horizontalan položaj i ispustimo ga. Kolika je napetost niti kad uteg opet prođe vertikalnim položajem?

**Rezultat:**  $30 \text{ N}$ .

### Zadatak 063 (Ana Marija, gimnazija)

Astronauti se privikavaju na velike akceleracije u specijalnim centrifugama. S koliko okretaja u sekundi mora raditi takva centrifuga da bi njezina akceleracija bila  $12 \cdot g$ ? Polumjer okretaja je  $7 \text{ m}$ . ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 063

$$a_{cp} = 12 \cdot g, \quad r = 7 \text{ m}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Računamo linearnu brzinu:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot a_{cp}}$$

Frekvencija (broj okretaja u sekundi) je:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 2 \cdot \pi \cdot \nu \\ \omega &= \frac{v}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \nu = \frac{v}{r} \Rightarrow \nu = \frac{v}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow \nu = \frac{\sqrt{r \cdot a_{cp}}}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow \nu = \frac{\sqrt{r \cdot 12 \cdot g}}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow \nu = \frac{\sqrt{r \cdot 4 \cdot 3 \cdot g}}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nu = \frac{2 \cdot \sqrt{r \cdot 3 \cdot g}}{2 \cdot \pi \cdot r} \Rightarrow \nu = \frac{\sqrt{r \cdot 3 \cdot g}}{\pi \cdot r} = \frac{\sqrt{7 \text{ m} \cdot 3 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}{\pi \cdot 7 \text{ m}} = 0.659 \text{ Hz.}$$

### Vježba 063

Astronauti se privikavaju na velike akceleracije u specijalnim centrifugama. S koliko okretaja u sekundi mora raditi takva centrifuga da bi njezina akceleracija bila  $12 \cdot g$ ? Polumjer okretaja je  $4 \text{ m}$ . ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.872 Hz.

### Zadatak 064 (Ana Marija, gimnazija)

Astronauti se privikavaju na velike akceleracije u specijalnim centrifugama. Koliko će biti težak astronaut pri akceleraciji  $12 \cdot g$ , ako mu je masa  $70 \text{ kg}$ ? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 064

$$a = 12 \cdot g, \quad m = 70 \text{ kg}, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad G = ?$$



$$G = m \cdot g + m \cdot a \Rightarrow G = m \cdot (g + a) \Rightarrow G = m \cdot (g + 12 \cdot g) \Rightarrow G = 13 \cdot m \cdot g =$$
$$= 13 \cdot 70 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9100 \text{ N.}$$

### Vježba 064

Astronauti se privikavaju na velike akceleracije u specijalnim centrifugama. Koliko će biti težak astronaut pri akceleraciji  $10 \cdot g$ , ako mu je masa  $70 \text{ kg}$ ? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 770 N.

### Zadatak 065 (Ana Marija, gimnazija)

Kamen privezan na niti dugoj  $50 \text{ cm}$  kruži jednoliko u vertikalnoj ravnini. Pri kolikom će periodu nit puknuti ako se zna da nit izdrži napetost koja je jednaka deseterostrukoj težini kamena? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 065

$$l = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}, \quad F_N = 10 \cdot G = 10 \cdot m \cdot g, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad T = ?$$

Napetost niti jednaka je centripetalnoj sili:

$$F_{cp} = F_N \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{l} = 10 \cdot m \cdot g \quad / \cdot \frac{l}{m} \Rightarrow v^2 = 10 \cdot g \cdot l \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{10 \cdot g \cdot l}$$

Period kruženja kamena pri kojem će nit puknuti iznosi:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\ \omega &= \frac{v}{l} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{v}{l} \Rightarrow T \cdot v = 2 \cdot \pi \cdot l \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{v} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot l}{\sqrt{10 \cdot g \cdot l}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0.5 \text{ m}}{\sqrt{10 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.5 \text{ m}}} = 0.45 \text{ s.}$$

### Vježba 065

Kamen privezan na niti dugoj 100 cm kruži jednoliko u vertikalnoj ravnini. Pri kolikom će periodu nit puknuti ako se zna da nit izdrži napetost koja je jednaka deseterostrukoj težini kamena? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 0.63 s.

### Zadatak 066 (Ana Marija, gimnazija)

Tenk mase  $5.0 \cdot 10^4 \text{ kg}$  prelazi preko mosta brzinom 45 km/h. Most se uganuo te mu je polumjer zakrivljenosti 0.60 km. Kolikom silom pritišće tenk na most kad se nalazi na njegovoj sredini? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 066

$$m = 5.0 \cdot 10^4 \text{ kg}, \quad v = 45 \text{ km/h} = [45 : 3.6] = 12.5 \text{ m/s}, \quad r = 0.60 \text{ km} = 600 \text{ m}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F = ?$$

Sila kojom tenk pritišće most jednaka je zbroju težine tenka i centrifugalne sile:



$$F = G + F_{cf} \Rightarrow F = m \cdot g + m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F = m \cdot \left( g + \frac{v^2}{r} \right) = 5 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \left( 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{\left( 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{600 \text{ m}} \right) = 5.04 \cdot 10^5 \text{ N.}$$

### Vježba 066

Tenk mase  $2.5 \cdot 10^4 \text{ kg}$  prelazi preko mosta brzinom 45 km/h. Most se uganuo te mu je polumjer zakrivljenosti 0.60 km. Kolikom silom pritišće tenk na most kad se nalazi na njegovoj sredini? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $2.52 \cdot 10^5 \text{ N.}$

### Zadatak 067 (Ana Marija, gimnazija)

Kolikom bi brzinom morao motorist voziti preko izbočenog dijela ceste ako je polumjer zakrivljenosti izbočine 40 m, a želio bi da na vrhu izbočine sila na cestu bude jednaka nuli? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 067

$$r = 40 \text{ m}, \quad F = 0, \quad g = 10 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Sila kojom motorist na vrhu izbočine mosta pritišće most jednaka je razlici težine motorista i centripetalne sile. Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$F = G - F_{cp} \Rightarrow 0 = m \cdot g - m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g \quad | \cdot \frac{r}{m} \Rightarrow v^2 = r \cdot g \quad | \sqrt{\quad} \Rightarrow v = \sqrt{r \cdot g} = \\ = \sqrt{40 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Vježba 067

Kolikom bi brzinom morao motorist voziti preko izbočenog dijela ceste ako je polumjer zakrivljenosti izbočine 90 m, a želio bi da na vrhu izbočine sila na cestu bude jednaka nuli? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $30 \frac{m}{s}$ .

**Zadatak 068 (Ana Marija, gimnazija)**

Uteg mase 30 kg privezan na niti vrtimo po krugu u vertikalnoj ravnini. Za koliko će napetost niti biti veća pri prolazu najnižom točkom kruga od napetosti niti u najvišoj točki kruga? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 068**

$$m = 30 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad N_1 - N_2 = ?$$

Napetost niti u najnižoj točki kruga jednaka je zbroju centrifugalne sile i težine utega:

$$N_1 = F_{cf} + G.$$

Napetost niti u najvišoj točki kruga jednaka je razlici centrifugalne sile i težine utega:

$$N_2 = F_{cf} - G.$$

Računamo razliku:

$$N_1 - N_2 = (F_{cf} + G) - (F_{cf} - G) = F_{cf} + G - F_{cf} + G = 2 \cdot G = 2 \cdot m \cdot g = 2 \cdot 30 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} = 588.6 \text{ N}.$$

**Vježba 068**

Uteg mase 20 kg privezan na niti vrtimo po krugu u vertikalnoj ravnini. Za koliko će napetost niti biti veća pri prolazu najnižom točkom kruga od napetosti niti u najvišoj točki kruga? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 400 N.

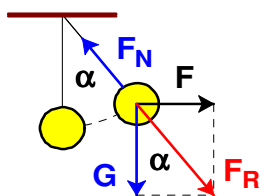
**Zadatak 069 (Ana Marija, gimnazija)**

Vagon vlaka jednoliko usporava te za 3 sekunde smanji brzinu 18 km/h na 6 km/h. Za koliko će se pritom iz vertikalnog položaja otkloniti kuglica koja sa stropa visi na niti? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 069**

$$t = 3 \text{ s}, \quad v_1 = 18 \text{ km/h} = [18 : 3.6] = 5 \text{ m/s}, \quad v_2 = 6 \text{ km/h} = [6 : 3.6] = 1.67 \text{ m/s}, \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Budući da vlak usporava, akceleracija iznosi:



$$a = \frac{v_2 - v_1}{t}.$$

Gledamo samo iznos akceleracije:

$$a = \frac{|v_2 - v_1|}{t}.$$

Kut za koji se kuglica otkloni iz vertikalnog položaja je:

$$\text{tg } \alpha = \frac{F}{G} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{a}{g} \Rightarrow \alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{a}{g} \right) \Rightarrow \alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{|v_2 - v_1|}{g \cdot t} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{|v_2 - v_1|}{g \cdot t} \right) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{1.67 \frac{m}{s} - 5 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 \text{ s}} \right) = 6.46^\circ.$$

**Vježba 069**

Vagon vlaka jednoliko usporava te za 2 sekunde smanji brzinu 18 km/h na 6 km/h. Za koliko će se pritom iz vertikalnog položaja otkloniti kuglica koja sa stropa visi na niti? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $9.63^0$ .

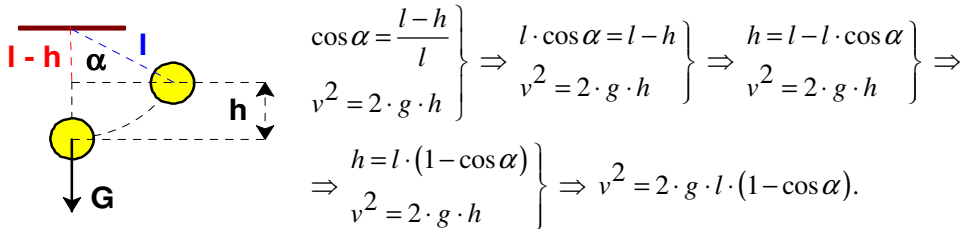
**Zadatak 070 (Ana Marija, gimnazija)**

Uteg mase 1 kg visi na niti koju smo iz vertikalnog položaja otklonili za kut  $\alpha = 30^\circ$ . Nađi napetost niti kad smo uteg ispustili te on prolazi položajem ravnoteže. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rješenje 070**

$$m = 1 \text{ kg}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_N = ?$$

Najprije odredimo sa slike linearnu brzinu utega kad prolazi položajem ravnoteže:



Napetost niti kada uteg prolazi položajem ravnoteže (u najnižoj točki kruga) jednaka je zbroju centrifugalne sile i težine utega:

$$F_N = F_{cf} + G \Rightarrow F_N = m \cdot \frac{v^2}{l} + m \cdot g \Rightarrow F_N = m \cdot \left[ \frac{v^2}{l} + g \right] \Rightarrow F_N = m \cdot \left[ \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)}{l} + g \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_N = m \cdot [2 \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha) + g] \Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot [2 - 2 \cdot \cos \alpha + 1] \Rightarrow F_N = m \cdot g \cdot [3 - 2 \cdot \cos \alpha] =$$
$$= 1 \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot [3 - 2 \cdot \cos 30^0] = 12.44 \text{ N}.$$

**Vježba 070**

Uteg mase 2 kg visi na niti koju smo iz vertikalnog položaja otklonili za kut  $\alpha = 30^\circ$ . Nađi napetost niti kad smo uteg ispustili te on prolazi položajem ravnoteže. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 24.88 N.

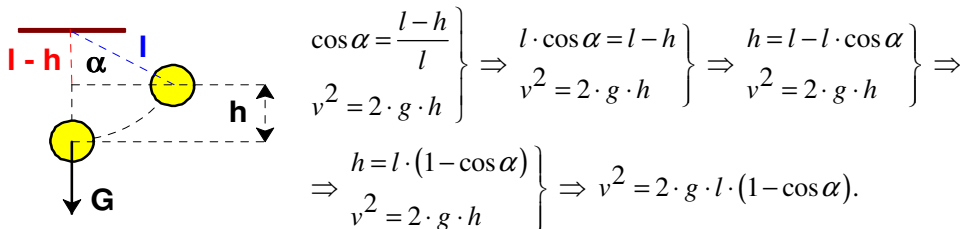
**Zadatak 071 (Ana Marija, gimnazija)**

Čelična žica podnese najveći teret 300 kg. Na žici visi uteg mase 150 kg. Do kojega najvećeg kuta možemo otkloniti uteg na žici da bi izdržala? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

**Rješenje 071**

$$m_{\max} = 300 \text{ kg} \Rightarrow F_N = m_{\max} \cdot g = 300 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 3000 \text{ N}, \quad m = 150 \text{ kg},$$
$$g = 10 \text{ m/s}^2, \quad \alpha = ?$$

Najprije odredimo sa slike linearnu brzinu utega kad prolazi položajem ravnoteže:



Napetost niti kada uteg prolazi položajem ravnoteže (u najnižoj točki kruga) jednaka je zbroju centrifugalne sile i težine utega:

$$F_N = F_{cf} + G \Rightarrow F_{cf} = F_N - G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{l} = F_N - m \cdot g \Rightarrow m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)}{l} = F_N - m \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot m \cdot g \cdot (1 - \cos \alpha) = F_N - m \cdot g \quad / \cdot \frac{1}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow 1 - \cos \alpha = \frac{F_N - m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{F_N - m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{2 \cdot m \cdot g - F_N + m \cdot g}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3 \cdot m \cdot g - F_N}{2 \cdot m \cdot g} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left( \frac{3 \cdot m \cdot g - F_N}{2 \cdot m \cdot g} \right) =$$

$$= \cos^{-1} \left( \frac{3 \cdot 150 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3000 \text{ N}}{2 \cdot 150 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 60^\circ.$$

### Vježba 071

Čelična žica podnese najveći teret 300 kg. Na žici visi uteg mase 120 kg. Do kojega najvećeg kuta možemo otkloniti uteg na žici da bi izdržala? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ).

**Rezultat:**  $75.52^\circ$ .

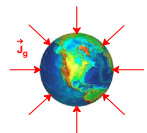
### Zadatak 072 (Vedran, srednja škola)

Nadi jakost gravitacijskog polja na površini Zemlje. (gravitacijska konstanta  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ , polumjer Zemlje  $R = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$ , masa Zemlje  $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ )

#### Rješenje 072

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad R = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad J_g = ?$$

Jakost gravitacijskog polja na površini Zemlje iznosi:



$$J_g = G \cdot \frac{M}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \quad \left( = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right).$$

Uoči da je jakost gravitacijskog polja na površini Zemlje jednaka akceleraciji sile teže.

### Vježba 072

Nadi jakost gravitacijskog polja na površini Zemlje. (gravitacijska konstanta  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ , polumjer Zemlje  $R = 6400 \text{ km}$ , masa Zemlje  $M = 6 \cdot 10^{21} \text{ t}$ )

**Rezultat:**  $9.8 \text{ N/kg}$ .

### Zadatak 073 (Vedran, srednja škola)

Kolika je gravitacijska sila na tijelo mase 1 t u točki Zemljinoga gravitacijskog polja jakosti  $2.4 \text{ N/kg}$ ?

#### Rješenje 073

$$m = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}, \quad J_g = 2.4 \text{ N/kg}, \quad F = ?$$

$$F = J_g \cdot m = 2.4 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 1000 \text{ kg} = 2400 \text{ N}.$$

### Vježba 073

Kolika je gravitacijska sila na tijelo mase 1 t u točki Zemljinoga gravitacijskog polja jakosti  $4.8 \text{ N/kg}$ ?

**Rezultat:**  $4800 \text{ N}$ .

### Zadatak 074 (Berislav, gimnazija)

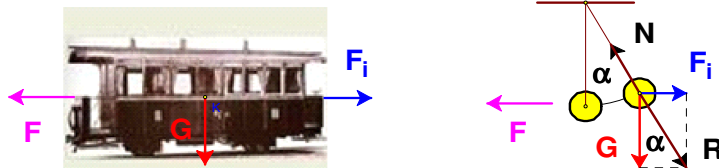
Vagon vlaka usporava se jednoliko te za 3 sekunde smanji brzinu  $18 \text{ km/h}$  na  $6 \text{ km/h}$ . Za koliko će se pritom iz vertikalnog položaja otkloniti kuglica koja sa stropa visi na niti? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 074

$$t = 3 \text{ s}, \quad v_1 = 18 \text{ km/h} = [18 : 3.6] = 5 \text{ m/s}, \quad v_2 = 6 \text{ km/h} = [6 : 3.6] = 1.67 \text{ m/s}, \quad \alpha = ?$$

Promatrajmo neko tijelo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Ako na njega ne djeluje nikakva sila, tijelo neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase  $m$ ,

koje postavimo, primjerice, na pod vagona koji ima stalnu akceleraciju  $a$ , neće mirovati s obzirom na vagon, nego će imati akceleraciju  $-a$ . U vagonu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila  $-m \cdot a$ . Takvu silu zovemo inercijskom silom i označavamo  $F_i$ .



Budući da vlak jednoliko usporava, inercijska sila  $F_i$  otklonit će kuglicu prema naprijed (suprotno od smjera sile kočenja  $F$ ):

$$F_i = -F \Rightarrow F_i = -m \cdot a \Rightarrow F_i = -m \cdot \frac{v_2 - v_1}{t} \Rightarrow F_i = m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}$$

Sa slike vidi se (uočite pravokutan trokut sa katetama  $F_i$ ,  $G$  i kutom  $\alpha$ ):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_i}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{m \cdot \frac{v_1 - v_2}{t}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1 - v_2}{g \cdot t} \Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{v_1 - v_2}{g \cdot t} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{5 \frac{m}{s} - 1.67 \frac{m}{s}}{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s} \right) = 6.46^\circ$$

### Vježba 074

Vagon vlaka usporava se jednoliko te za 6 sekundi smanji brzinu 36 km/h na 12 km/h. Za koliko će se pritom iz vertikalnog položaja otkloniti kuglica koja sa stropa visi na niti? ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $6.46^\circ$ .

### Zadatak 075 (Aca, srednja škola)

Dva utega mase 5 kg i 3 kg spaja nit koja je prebačena preko nepomične koloture. Kolika je napetost niti kad se utezi gibaju u polju sile teže? Trenje zanemarimo. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

### Rješenje 075

$$m_1 = 5 \text{ kg}, \quad m_2 = 3 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad F_N = ?$$

Promatrajmo neko tijelo s obzirom na koordinatni sustav koji se giba jednoliko ubrzano ili usporeno. Ako na njega ne djeluje nikakva sila, tijelo neće mirovati s obzirom na takav sustav. Tijelo mase  $m$ , koje postavimo, primjerice, na pod vagona koji ima stalnu akceleraciju  $a$ , neće mirovati s obzirom na vagon, nego će imati akceleraciju  $-a$ . U vagonu će nam se činiti da na tijelo djeluje sila  $-m \cdot a$ . Takvu silu zovemo inercijskom silom i označavamo  $F_i$ .

Akceleracija sustava dobije se iz osnovnog zakona gibanja (drugi Newtonov poučak):

$$a = \frac{F}{m}$$

Sila  $F$  koja uzrokuje gibanje jednaka je razlici djelovanja sile teže na tijelo mase  $m_1$  i tijelo mase  $m_2$ , tj.

$$F = G_1 - G_2 \Rightarrow F = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \Rightarrow F = (m_1 - m_2) \cdot g$$

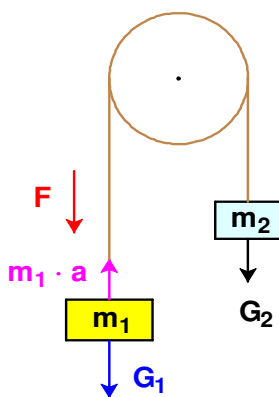
Budući da sila  $F$  pokreće oba tijela (cijeli sustav), to je masa

$$m = m_1 + m_2$$

Tako je:

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2} \Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

Sustav se giba u smjeru sile  $F$  pa je napetost niti  $F_N$ :



$$\begin{aligned}
 F_N &= m_1 \cdot g - m_1 \cdot a \Rightarrow F_N = m_1 \cdot (g - a) \Rightarrow F_N = m_1 \cdot \left( g - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \right) \Rightarrow F_N = m_1 \cdot \left( 1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot g \Rightarrow \\
 &\Rightarrow F_N = m_1 \cdot \frac{m_1 + m_2 - m_1 + m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow F_N = m_1 \cdot \frac{2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \Rightarrow F_N = 2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \\
 &= 2 \cdot \frac{5 \text{ kg} \cdot 3 \text{ kg}}{5 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 36.79 \text{ N}.
 \end{aligned}$$

### Vježba 075

Dva utega mase 10 kg i 6 kg spaja nit koja je prebačena preko nepomične koloture. Kolika je napetost niti kad se utegi gibaju u polju sile teže? Trenje zanemarimo. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:** 73.58 N.

### Zadatak 076 (Ivan, gimnazija)

Odredi udaljenost  $x$  središta Zemlje do umjetnog satelita mase  $m$  i njegovu brzinu  $v$  ako satelit kruži u ravnini Zemljina ekvatora, a sa Zemlje se čini nepomičnim. Možemo uzeti da je polumjer Zemlje  $r = 6400 \text{ km}$ . (masa Zemlje  $m_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , gravitacijska konstanta  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ )

### Rješenje 076

$$T = 24 \text{ h} = [24 \cdot 3600] = 86400 \text{ s}, \quad r = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad m_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \\
 G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad x = ?, \quad v = ?$$

Jednoliko kružno gibanje je gibanje kod kojeg tijelo u jednakim vremenskim intervalima prijeđe jednake lukove kružnice. Vrijednost njegove brzine je stalno ista, ali se pravac i smjer vektora brzine neprestano mijenjaju. Brzina iznosi:

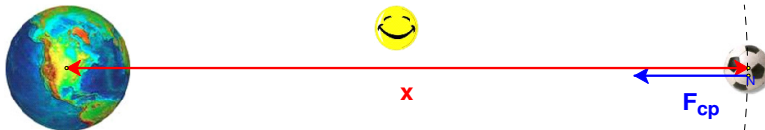
$$v = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T}$$

gdje su  $r$  polumjer kružnice,  $T$  period, tj. vrijeme jednog ophoda.

Da bi se tijelo gibalo po kružnici potrebno je da na nj djeluje centripetalna sila

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow F_{cp} = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2},$$

koja ima smjer prema središtu kružnice.



Sila gravitacije između satelita mase  $m$  i Zemlje mase  $m_Z$  na udaljenosti  $x$  mora biti jednaka centripetalnoj sili na satelit na udaljenosti  $x$  od središta vrtnje:

$$\begin{aligned}
 m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot x}{T^2} &= G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{x^2} \Rightarrow m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot x}{T^2} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{x^2} \cdot \frac{T^2 \cdot x^2}{m} \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \cdot x^3 = G \cdot m_Z \cdot T^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x^3 &= \frac{G \cdot m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \quad / \sqrt[3]{\quad} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_Z \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (86400 \text{ s})^2}{4 \cdot \pi^2}} = \\
 &= 42297523.87 \text{ m} \approx 42300 \text{ km} = 4.23 \cdot 10^7 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Udaljenost od središta Zemlje do umjetnog satelita je 42300 km.

Brzina umjetnog satelita iznosi:

1. inačica

$$v = \frac{2 \cdot x \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot 42300 \text{ km} \cdot \pi}{86400 \text{ s}} = 3.076 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

2. inačica

Budući da je sila gravitacije uzrok kruženja umjetnog satelita oko Zemlje, mora biti centripetalna sila  $F_{cp}$  jednaka sili gravitacije  $F$ :

$$F_{cp} = F \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{x} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{x^2} \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{x} = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{x^2} \cdot \frac{x}{m} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{m_Z}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{m_Z}{x}} = \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4.23 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 3075.87 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3.1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

### Vježba 076

Odredi udaljenost  $x$  središta Zemlje do umjetnog satelita mase  $m$  ako satelit kruži u ravnini Zemljina ekvatora, a sa Zemlje se čini nepomičnim. Možemo uzeti da je polumjer Zemlje  $r = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$ . (masa Zemlje  $m_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ t}$ , gravitacijska konstanta  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ )

**Rezultat:** 42300 km.

### Zadatak 077 (Ana, gimnazija)

Izračunaj prvu kozmičku brzinu na površini Mjeseca kad znaš da je polumjer Mjeseca 1740 km, a akceleracija slobodnog pada na Mjesecu 0.17 Zemljine akceleracije. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

#### Rješenje 077

$$R_M = 1740 \text{ km} = 1.74 \cdot 10^6 \text{ m} \quad g_M = 0.17 \cdot g_Z, \quad g_Z = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad v = ?$$

Prva kozmička brzina je brzina kruženja tijela oko planeta u blizini njegove površine, uz uvjet da je gravitacijska sila koja djeluje na tijelo jednaka centripetalnoj sili:



$$v = \sqrt{R_p \cdot g_p},$$

gdje su  $R_p$  polumjer planeta,  $g_p$  akceleracija slobodnog pada na planetu. Pomoću tog izraza nalazimo brzinu kojom treba izbaciti satelit da bi jednoliko kružio u blizini površine planeta.

Prva kozmička brzina za Mjesec iznosi:

$$v = \sqrt{R_M \cdot g_M} \Rightarrow v = \sqrt{R_M \cdot 0.17 \cdot g_Z} = \sqrt{1.74 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 0.17 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1703.47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Vježba 077

Izračunaj prvu kozmičku brzinu na površini Mjeseca kad znaš da je promjer Mjeseca 3480 km, a akceleracija slobodnog pada na Mjesecu 0.17 Zemljine akceleracije. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ )

**Rezultat:**  $1703.47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

### Zadatak 078 (Edy, gimnazija)

Kolika je prva kozmička brzina za Mjesec ako znamo da je polumjer Mjeseca  $1.74 \cdot 10^6 \text{ m}$ , a masa  $7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ ? ( $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ )

#### Rješenje 078

$$R_M = 1.74 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad m = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad v = ?$$

Prva kozmička brzina je brzina kruženja tijela oko planeta u blizini njegove površine, uz uvjet da je gravitacijska sila koja djeluje na tijelo jednaka centripetalnoj sili:

$$v = \sqrt{R_p \cdot g_p},$$

gdje su  $R_p$  polumjer planeta,  $g_p$  akceleracija slobodnog pada na planetu. Pomoću tog izraza nalazimo brzinu kojom treba izbaciti satelit da bi jednoliko kružio u blizini površine planeta.


Za tijelo mase  $m$  je na površini Mjeseca sila teža jednaka privlačnoj sili tijela i Mjeseca (sila gravitacije):

$$m \cdot g_M = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{R_M^2} \Rightarrow m \cdot g_M = G \cdot \frac{m \cdot m_M}{R_M^2} \quad /: m \Rightarrow g_M = G \cdot \frac{m_M}{R_M^2}$$

Prva kozmička brzina za Mjesec iznosi:

$$\left. \begin{aligned} g_M &= G \cdot \frac{m_M}{R_M^2} \\ v &= \sqrt{R_M \cdot g_M} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{R_M \cdot G \cdot \frac{m_M}{R_M^2}} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{m_M}{R_M}} =$$

$$= \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{7.3 \cdot 10^{22} kg}{1.74 \cdot 10^6 m}} = 1672.82 \frac{m}{s}$$

Malo astronomije		
Planet	Akceleracija slobodnog pada, m/s <sup>2</sup>	Prva kozmička brzina, km/s
 <b>Merkur</b>	2.55	3.0
 <b>Venera</b>	8.86	7.2
 <b>Zemlja</b>	9.81	7.9
 <b>Mars</b>	3.72	3.6
 <b>Jupiter</b>	25.90	42.6
 <b>Saturn</b>	11.10	25.7
 <b>Uran</b>	10.45	15.2
 <b>Neptun</b>	13.80	16.6
 <b>Pluton</b>	23.00	-

### Vježba 078

Kolika je prva kozmička brzina za Mjesec ako znamo da je polumjer Mjeseca  $3.48 \cdot 10^6$  m, a masa  $7.3 \cdot 10^{19}$  t? ( $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ )

**Rezultat:** 1672.82 m/s.

**Zadatak 079 (Denis, srednja škola)**

Izračunaj masu Zemlje ako je njezin polumjer 6400 km. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  
 $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ )

**Rješenje 079**

$$R_Z = 6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2, \quad m_Z = ?$$

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  nalaze u međusobnoj udaljenosti  $r$ , među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je  $G$  gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Težina tijela  $G$  jest sila kojom tijelo zbog Zemljina privlačenja djeluje na horizontalnu podlogu ili ovjes. Za slučaj kad tijelo i podloga, odnosno ovjes, miruju ili se gibaju jednoliko po pravcu s obzirom na Zemlju, težina tijela je veličinom jednaka sili teži,

$$G = m \cdot g.$$

Ako se tijelo mase  $m$  nalazi na površini Zemlje, gravitacijska sila kojom Zemlja djeluje na tijelo dana je izrazom

$$F = m \cdot g.$$

Tu istu silu možemo izraziti pomoću općeg zakona gravitacije, uzevši u obzir da je udaljenost tijela na površini Zemlje od njezina središta jednaka polumjeru Zemlje  $R_Z$ :

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2}$$



Računamo masu Zemlje:

$$\left. \begin{array}{l} F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2} \\ F = m \cdot g \end{array} \right\} \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R_Z^2} = m \cdot g \cdot \frac{R_Z^2}{G \cdot m} \Rightarrow m_Z = g \cdot \frac{R_Z^2}{G} =$$

$$= 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{(6.4 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}} = 6.024 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

**Vježba 079**

Izračunaj masu Zemlje ako je njezin promjer 12800 km. ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  
 $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ )

**Rezultat:**  $6.024 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

**Zadatak 080 (Anita, gimnazija)**

Polumjer Zemlje iznosi  $6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ , a akceleracija sile teže na površini Zemlje ima vrijednost  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Kolika je akceleracija sile teže na visini 1000 km iznad površine Zemlje?

**Rješenje 080**

$$R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad h = 1000 \text{ km} = 10^6 \text{ m}, \quad g_1 = ?$$

Opći zakon gravitacije:

Ako se bilo koja dva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  nalaze u međusobnoj udaljenosti  $r$ , među njima djeluje privlačna gravitacijska sila čiji je iznos

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta koja ima jednaku vrijednost za privlačenje između bilo koja dva tijela.

Silu kojom Zemlja privlači sva tijela nazivamo silom težom. Pod djelovanjem sile teže sva tijela padaju na Zemlju ili pritišću na njezinu površinu. Akceleracija kojom tijela padaju na Zemlju naziva se akceleracijom slobodnog pada. Prema drugom Newtonovom zakonu

$$F_g = m \cdot g,$$

gdje je  $F_g$  sila teža, m masa tijela i g akceleracija slobodnog pada koja je za sva tijela na istome mjestu na Zemlji jednaka. Akceleracija g mijenja se promjenom zemljopisne širine i nadmorske visine jer se sila teža koja je uzrokuje mijenja promjenom zemljopisne širine i nadmorske visine mjesta na kojemu se tijelo nalazi.

Ako se tijelo mase m nalazi na površini Zemlje, gravitacijska sila kojom Zemlja djeluje na tijelo dana je izrazom

$$F_g = m \cdot g.$$

Tu istu silu možemo izraziti pomoću općeg zakona gravitacije, uzevši u obzir da je udaljenost tijela na površini Zemlje od njezina središta jednaka polumjeru Zemlje R:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2}.$$

Zato vrijedi:

$$F_g = F \Rightarrow m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{R^2} \quad /: m \Rightarrow g = G \cdot \frac{m_Z}{R^2}.$$

Ako se tijelo mase m nalazi na visini h iznad površine Zemlje, gravitacijska sila kojom Zemlja djeluje na tijelo dana je izrazom

$$F_g = m \cdot g_1.$$

Tu istu silu možemo izraziti pomoću općeg zakona gravitacije, uzevši u obzir da je udaljenost tijela iznad površine Zemlje od njezina središta jednaka zbroju polumjera Zemlje R i visine h, R + h:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2}.$$

Zato vrijedi:

$$F_g = F \Rightarrow m \cdot g_1 = G \cdot \frac{m \cdot m_Z}{(R+h)^2} \quad /: m \Rightarrow g_1 = G \cdot \frac{m_Z}{(R+h)^2}.$$

Akceleracija sile teže na visini h iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} g_1 = G \cdot \frac{m_Z}{(R+h)^2} \\ g = G \cdot \frac{m_Z}{R^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{G \cdot \frac{m_Z}{(R+h)^2}}{G \cdot \frac{m_Z}{R^2}} \Rightarrow \frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} \quad / \cdot g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1 = \frac{R^2}{(R+h)^2} \cdot g \Rightarrow g_1 = \left( \frac{R}{R+h} \right)^2 \cdot g = \left( \frac{6.37 \cdot 10^6 \text{ m}}{6.37 \cdot 10^6 \text{ m} + 10^6 \text{ m}} \right)^2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7.33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

### Vježba 080

Promjer Zemlje iznosi  $12.74 \cdot 10^3$  km, a akceleracija sile teže na površini Zemlje ima vrijednost  $9.81 \text{ m/s}^2$ . Kolika je akceleracija sile teže na visini 1000 km iznad površine Zemlje?

**Rezultat:**  $7.33 \text{ m/s}^2$ .